

"קשר-חס": לקידום שיפור ורענון החינוך המתמטי

הנושא: סוגיות גיאומטריות בספרות התלמודית

הוכן ע"י: ד"ר דוד גרבר ובוועד צבאן – האוניברסיטה העברית ואוניברסיטת בר-אילן.

תקציר: בחומר מוצגים חישובים ודיונים מתמטיים אשר מופיעים בספרות התלמודית כגון: קירובים לערכו של π ושל $\sqrt{2}$, חישוב שטח של עיגול, חישוב שטח מעטפת של כדור, חישוב נפח של גליל ונפח של כדור, חישוב שטח בין חתכים אופקיים של ספירה ועוד. כן יש התייחסות לחג הסוכות בסוגיה הקשורה לגודל של סוכה עגולה כשרה.

מילות מפתח: תלמוד, משנה, גמרא, היסטוריה של המתמטיקה, חגים, חג סוכות, מספרים אי-רציונליים, קירוב, הנדסה, גיאומטריה, הנדסת המישור, גיאומטריה המישור, π , שטח, מצולע חוסם, מצולע חסום, טריגונומטריה, הנדסת המרחב, גיאומטריה המרחב, שטח מעטפת, נפח, כדור, גליל, חישוב שטח באמצעות חשבון אינטגרלי.

החומר הוגש במסגרת: בי"ס קיץ בנושא "שילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בהוראה", שנה"ל תשס"ד - קיץ 2004.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 13 עמודים.

בס"ד

סוגיות גאומטריות בספרות התלמודית

פרקים :

- א. הקירובים ל- π ול- $\sqrt{2}$
- ב. סיבת השימוש בקירובים
- ג. הוכחת ראב"ח לשטח עיגול
- ד. סוגיית סוכה עגולה וחלון עגול
- ה. נפחי מקוואות גליליים וכדוריים

א. הקירובים ל- π ול- $\sqrt{2}$

מלכים א', ז' כ"ג:

כג
ויעש את-
הים מוצק עשר באמה משפתו עד-שפתו עגל וסביב וחמש
באמה קומתו וקוה שלשים באמה יסב אותו סביב:
וקו

סוכה דף ז' ע"ב:

כל שיש בהיקפו שלשה טפחים יש בו רוחב טפח.

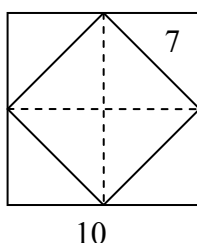
$$\frac{\pi_{\text{HEBREW}}}{\pi_0} = \frac{\text{קוה}}{\text{קו}} = \frac{111}{106} \Rightarrow \pi_{\text{HEBREW}} = 3 \times \frac{111}{106} = 3.141509...$$

סוכה דף ח' ע"א:

כל אמתא בריבועא אמתא ותרי חומשא באלכסוֹנא

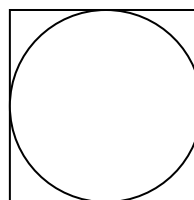
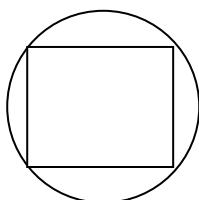
$$\sqrt{2} = 1.414... \approx 1.4$$

זה לא מדויק (על פי תוספות בסוכה):



סוכה דף ח' ע"א-ע"ב:

עיגולא דנפיק מגו ריבועא - רבעא, ריבועא, דנפיק מגו עיגולא - פלגא.



ב. סיבות השימוש בקירובים

1. הגישה הרציונליסטית

רמב"ם, פירוש למשנה, עירובין א' ה'

יש לך לדעת כי ייחוס אלכסון העגולה אל המסבב אותה בלי ידוע, ואי אפשר לדבר בו לעולם באמת, וחסרון זו ההשגה אינה מאיתנו ... אבל הוא בטבעי זה הדבר בלי ידוע ואין במציאותו שיושג. אבל ידוע זה בקרוב ... אשר עליו סומכים חכמי המידות הלימודיות הוא יחוס האחד לשלושה ושביעית וכל עגולה שיהיה באלכסון שלה אמה יהיה בהיקפה שלוש אמות ושביעית בקירוב, ולפי שזה לא יושג לעולם אלא בקירוב, לקחו הם בחשבון הגדול ואמרו "כל שיש בהיקפו שלושה טפחים יש בו רוחב טפח", וסמכו על זה במה שהוצרכו אליו מן המדידה בתורה.

"שער הציון" לאורח חיים סימן שע"ב ס"ק י"ח

... אלא האמת נראה לעניות דעתי דאין לדקדק בזה יותר דסמכו חכמים על אלו השיעורים על הענינים שבתורה מפני שקשה לצמצם העודף. ואולי היה מקובל להם מסיני שיש לסמוך על השיעורים האלו אף בשיעורי תורה. ואיך שיהיה במילתא דרבנן בודאי יש לסמוך על השיעורים אלו, וכמעט כן משמע מהרמב"ם שם.

2. הגישה המיסטית-מודרנית

"ניסים גאומטריים" בבית המקדש :
א. עשרה ניסים נעשו לאבותינו בבית המקדש ... עומדים צפופים ומשתחווים רוחים [אבות ה' ה'].
ב. מקום ארון אינו מן המידה [מגילה י' ע"ב].

ולכן יתכן שה- π בבית המקדש אכן היה 3. (הרב מתתיהו מונק, במאמר משנת תשכ"ב)

3. הגישה הפדגוגית

שו"ת תשב"ץ חלק א' סימן קס"ה

או שנאמר שהם כשנשאו ונתנו בזה על עיקרים אלו עשו זה לקרב ההבנה אל התלמידים לפי שלעולם ישנה אדם לתלמידו בדרך קצרה כדאיתא בפרק קמא דפסחים [ג' ע"ב] ובפרק אלו טרפות [ס"ג ע"ב], אבל לענין מעשה יש לנו לדקדק הענין על פי הדקדוק האמתי ומסרוהו לחכמים יודעי השיעורים נמצא כי ההלכה מסורה לתלמידים המתחילים והמעשה מסורה אל החכמים לדקדקו על פי האמת וזה הדרך ישר בעיני לתקון דבריהם ז"ל.

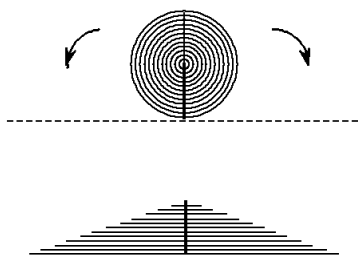
ג. הוכחת ראב"ח לשטח עיגול

מהקדמת "חיבור המשיחה והתשבורת" לרבי אברהם בר חייא הנשיא :

... ואין אדם יכול לדקדק בחשבון עד שלא יבוא בו לידי הונאה, אם לא ילמד חכמת החשבון ... ומי שאינו בקי ורגיל בחכמת השיעור אינו מודד את הארצות ולא חולק אותה באמת ובמשפט בלא הונאה ... ומכאן אתה למד שהחכמות האלו מצורך התורה הן ... וראיתי רוב חכמי דורנו בארץ צרפת אינן בקיאים במדידת הארצות ולא זריזים בחלוקתן, אבל הם מזלזלים בדבר הזה ולזול גדול ומחלקין את הקרקעות בין היורשין והשותפין לפי אמידה וגוזמא ובאין במעשה הזה לידי עון ואשמה ורובם מזידים וחוטאים וכל אחד מהם חטאו בטעותן כפי שבוש אומדנותן ... שאין בעולם הונאה הגדולה מן ההונאה הבאה על ידם ...

בחלקו השני של הספר מופיעה שיטה מכנית אלגנטית לחישוב שטח של עיגול :

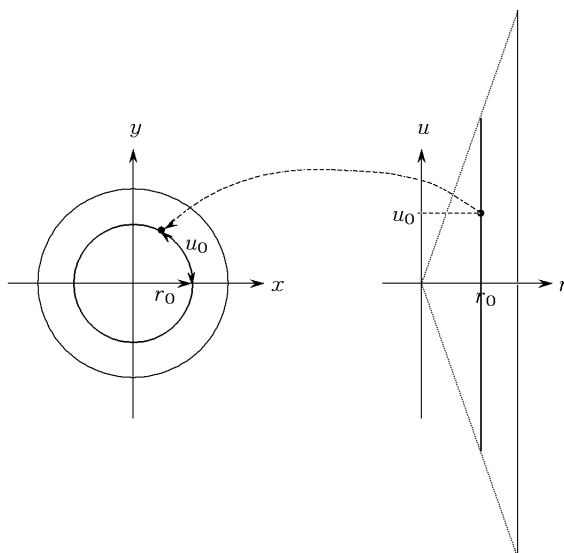
ואחר שידענו הקו הסובב [=ההיקף] והקוטר, אנו יודעים תשבורת [=שטח] כל העגולה [=העיגול] ... והאות על התשבורת הזה ידענו, אם תפתח שטח העגול מצד אחד ותישר כל הקווים [=המעגלים] הסובבים מקו החיצוני עד המרכז, יתפשטו כל המקיפים שטח העיגול ויחזרו לקוים ישרים מתמעטים והולכים עד שחוזרים אל נקודה אחת והיא נקודת המרכז ... ובזה נולדה לנו צורת המשולש.



$$\frac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2$$

- ארכימדס בשיטתו (קירוב על ידי מצולעים) כבר קדם לראב"ח ביותר מ 1300 שנה.

הוכחה מודרנית לנכונותה של שיטת ראב"ח



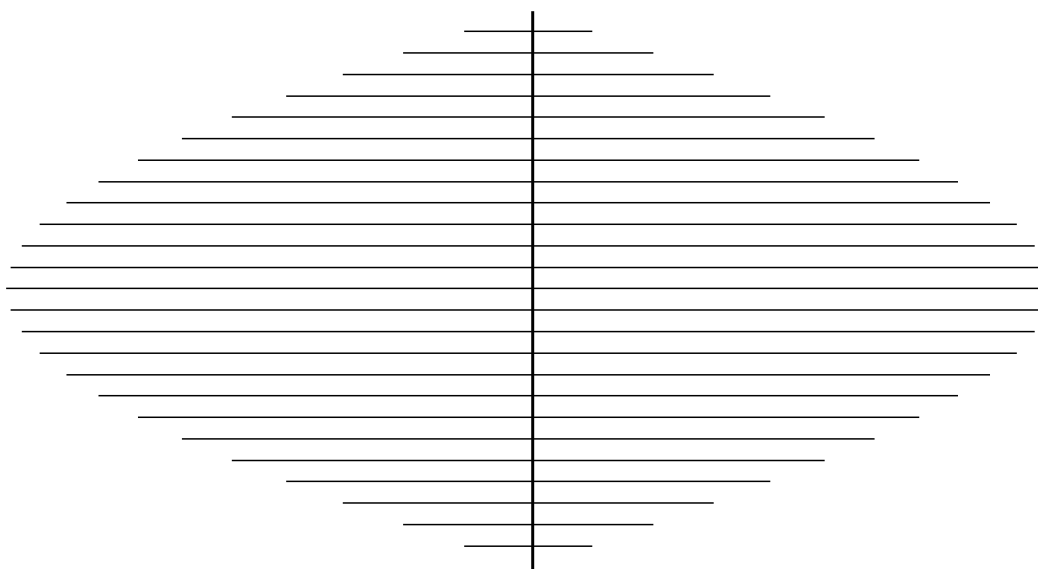
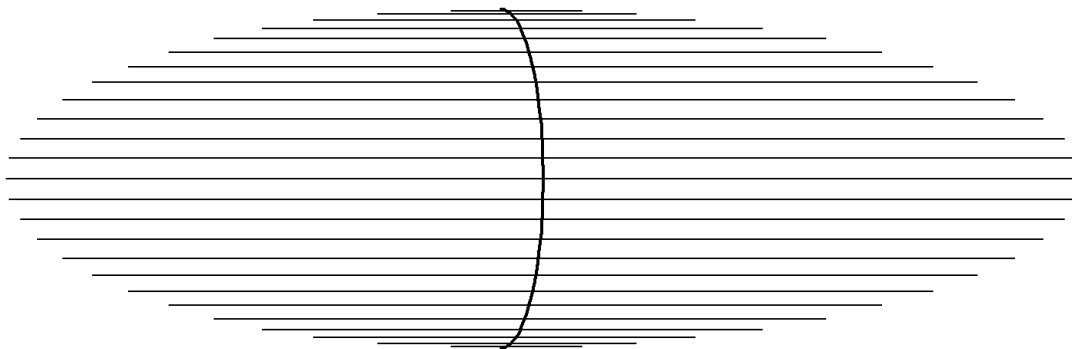
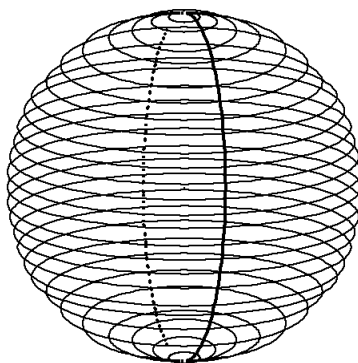
$$g(r, u) = (r \cos(u/r), \sin(u/r))$$

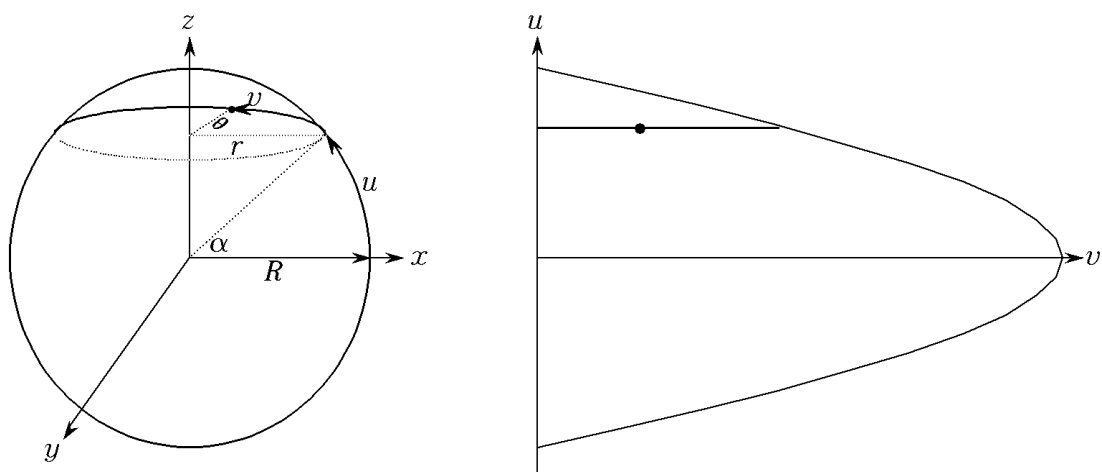
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial u} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{u}{r} + \frac{u}{r} \sin \frac{u}{r} & -\sin \frac{u}{r} \\ \sin \frac{u}{r} - \frac{u}{r} \cos \frac{u}{r} & \cos \frac{u}{r} \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה המתקבלת היא :

$$\left(\cos \frac{u}{r} + \frac{u}{r} \sin \frac{u}{r} \right) \cos \frac{u}{r} - \left(-\sin \frac{u}{r} \right) \left(\sin \frac{u}{r} - \frac{u}{r} \cos \frac{u}{r} \right) = \cos^2 \frac{u}{r} + \sin^2 \frac{u}{r} = 1$$

שיטה לחישוב שטח המעטפת של כדור





הנוסחה של הגרף התוחם חצי זה היא: $v = \pi R \cos(u/R)$

$$\int_{\frac{\pi R}{2}}^{\frac{\pi R}{2}} \pi R \cos\left(\frac{u}{R}\right) du = \pi R \left[R \sin\left(\frac{u}{R}\right) \right]_{\frac{\pi R}{2}}^{\frac{\pi R}{2}} = 2\pi R^2$$

ולכן שטח הספירה כולה הוא

$$S = 4\pi R^2$$

השטח בין חתכים אופקיים של הספירה

אם נחתוך את הספירה בגובה $h = \alpha R$, נקבל ששטח הפנים של החלק הנותר מהספירה הוא:

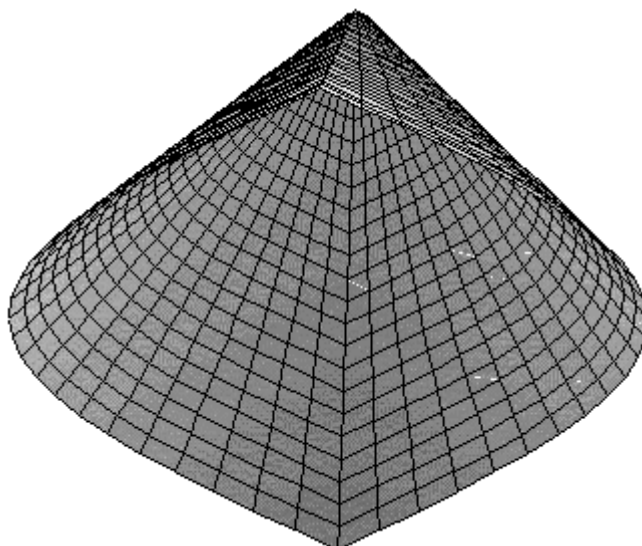
$$2 \int_0^{\alpha R} \pi R \cos\left(\frac{u}{R}\right) du = 2\pi R \left[R \sin\left(\frac{u}{R}\right) \right]_0^{\alpha R} = 2\pi R(R \sin \alpha) = 2\pi Rh$$

לכן השטח בין שני חתכים אופקיים, האחד בגובה a והשני בגובה b , הוא:

$$2\pi Rb - 2\pi Ra = 2\pi R\Delta$$

- השטח בין שני חתכים אופקיים תלוי רק במרחק ביניהם ולא תלוי במיקומם.

נפח הכדור: נפח זה שווה למעשה לנפח המתקבל על ידי פתיחת כל הספירות שמוכלות בו.



ד. סוגיית סוכה עגולה וחלון עגול

סוכה דף ח'

אמר רבי יוחנן: סוכה העשויה ככבשן, אם יש בהקיפה כדי לישוב בה עשרים וארבעה בני אדם - כשרה, ואם לאו - פסולה. כמאן - כרבי, דאמר: כל סוכה שאין בה ארבע אמות על ארבע אמות - פסולה.

מכדי, גברא באמתא יתיב, כל שיש בהקיפו שלשה טפחים יש בו רוחב טפח, בתריסר סגי! - הני מילי בעיגולא, אבל בריבועא - בעיא טפי. -

מכדי, כמה מרובע יותר על העיגול - רביע, בשיתסר סגי! - הני מילי בעיגול דנפיק מיגו ריבועא, אבל ריבועא דנפיק מגו עיגולא - בעיא טפי, משום מורשא דקרנתא. -

מכדי, כל אמתא בריבועא אמתא ותרי חומשא באלכסונא, בשבסר נכי חומשי סגיא! - לא דק. - אימור דאמרינן לא דק פורתא, טובא מי אמרינן לא דק? -

אמר ליה מר קשישא בריה דרב חסדא לרב אשי: מי סברת גברא באמתא יתיב? תלתא גברי בתרתי אמתא יתבי. - כמה הוו להו - שיתסר, אנן שיבסר נכי חומשא בעינן! - לא דק. - אימור דאמרינן לא דק לחומרא, לקולא מי אמרינן לא דק? -

אמר ליה רב אסי לרב אשי: לעולם גברא באמתא יתיב, ורבי יוחנן מקום גברי לא קחשיב. - כמה הוו להו - תמני סרי, בשיבסר נכי חומשא סגיא! - היינו דלא דק, ולחומרא לא דק.

רבנן דקיסרי, ואמרי לה דייני דקיסרי אמרי: עיגולא דנפיק מגו ריבועא - רבעא, ריבועא, דנפיק מגו עיגולא - פלגא. - ולא היא, דהא קחזינן דלא הוי כולי האי.

עירובין דף ע"ו

משנה. חלון שבין שתי חצירות, ארבעה על ארבעה בתוך עשרה - מערבין שנים. ואם רצו - מערבין אחד. פחות מארבעה על ארבעה, או למעלה מעשרה - מערבין שנים ואין מערבין אחד.

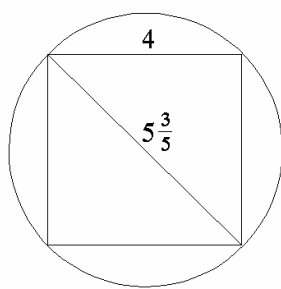
גמרא. ... אמר רבי יוחנן: חלון עגול צריך שיהא בהיקפו עשרים וארבעה טפחים, ושנים ומשהו מהן בתוך עשרה, שאם ירבענו נמצא משהו בתוך עשרה. –

מכדי כל שיש בהיקפו שלשה טפחים - יש בו ברוחבו טפח, בתריסר סגיא! הני מילי - בעיגולא, אבל בריבועא בעינן טפי. –

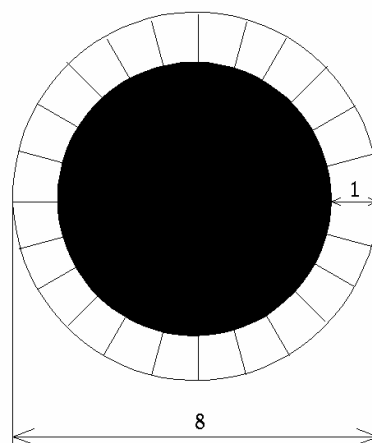
מכדי, כמה מרובע יתר על העגול - רביע, בשיתסר סגיא! - הני מילי - עיגולא דנפיק מגו ריבועא, אבל ריבועא דנפיק מגו עיגולא - בעינן טפי. מאי טעמא - משום מורשא דקרנתא –

מכדי, כל אמתא בריבוע אמתא ותרי חומשי באלכסונא בשיבסר נכי חומשא סגיא! –

רבי יוחנן אמר כי דייני דקיסרי, ואמרי לה כרבנן דקיסרי, דאמרי: עיגולא מגו ריבועא - ריבועא ריבועא מגו עיגולא - פלגא.



(1)



(2)

שיטות המפרשים בסוגיות

שיטת התוספות

תוספות מסכת עירובין דף ע"ו ע"ב
אלא שהש"ס בסוכה ורבי יוחנן דהכא טעו בדבריהם [של דייני דקיסרי] והיו סבורים שעל ההיקף אמרו.

והשתא אתי שפיר מה דנקט פלגא דהכל קאי אריבוע החיצון כלומר עיגולא מגו ריבועא ריבועא כלומר פחות רביע מריבוע החיצון ריבועא מגו עיגולא פלגא ממה שנשאר בריבוע החיצון על ריבוע הפנימי דהוא נמי חציו של פנימי.

- יש הבנה לא נכונה של הכלל "ריבועא מגו עיגולא פלגא" בכך שחושבים שכלל זה נאמר בהיקף.
- לתוספות יש הבנה אחרת בכללי דייני דקיסרי.

שיטת הגר"א

הגר"א בפירושו לעירובין דף ע"ו ע"ב אות א' (על שיטת תוספות)
וחס וחלילה שטעו אלא שרבי יוחנן אמר בהיקפו רצה לומר בריבוע החיצון, ואורך האלכסון בעיגול הוא ה' טפחים וג' חומשין ורביע חומש, נמצא היקף ריבוע החיצון כ"ב טפחים וג' חומשין.

- כל החישובים שנעשים ביחס להיקף דברים עגולים - נעשים בהיקף הריבוע שחוסם אותם.

שיטת המאירי

מאירי עירובין דף ע"ו ע"א:
וביאור הדברים שלא רצה רבי יוחנן בזה באומרו בהיקפו על החוט אלא כאילו אמר בשיבורו או בהערכתו מלשון 'מקיפין בבועי' שהוא ענין ערך, היקש ודמיון.

- הבנת 'בהיקפו' בצורה שונה - שטח.

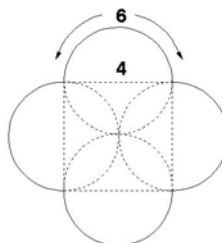
שיטת הריטב"א

ריטב"א עירובין דף ע"ו ע"ב

ואיני יודע מה הרווחנו לתלות הטעות ברבי יוחנן, ועוד תמה על עצמך שלא הבין רבי יוחנן מה שאנו מבינים בהם.

והנכון בעיני כי דברי דייני דקיסרי ודברי רבי יוחנן אמת אלא שאמרו במליצה וחידה שכן דרך בעלי החשבון לדבר.

והגע עצמך שאם תעשה מרובע מד' על ד' ותעשה בכל צלע וצלע מהם עיגול בפני עצמו שיהא רוחב העיגול ד' באורך הצלע יהא בהיקפו של עיגול י"ב דכל שיש ברוחבו טפח יש בהיקפו ג', והרי חצי העיגול הבולט לחוץ שישה. ונמצא שיהא בארבעת חצאי העיגולים הקוטפים הסובבים למרובע מבחוץ כ"ד טפחים, והם עודפים על צלעות המרובע שבתוכן חצי המרובע י"ו טפחים ואילו העגולים כ"ד טפחים.



שיטת התשב"ץ

רבי יוחנן בחישוביו השתמש בערכים מדויקים יותר של היחסים שזכרו לעיל. ניקח את הערך $3\frac{1}{7}$ עבור היחס שבין היקף המעגל לקוטרו, נקבל שההיקף של סוכה עגולה כשרה (החוסמת סוכה ריבועית בגודל 4x4 אמות) הוא: $4 \cdot 1\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{7} = 17\frac{3}{5}$. אם נשתמש עתה בשיטת רבי יוחנן על פי הבנתו של רב אסי לעיל, נקבל שההיקף שדורש רבי יוחנן הוא $17\frac{5}{7}$, שהוא ערך מאוד קרוב ל- $17\frac{3}{5}$.

שיטת הרב סתהון (בהקדמה לספרו "ארץ חיים")

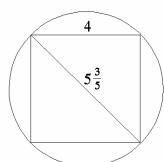
הוא נוקט בשיטת האינטרפולציה הלינארית: האלכסון הוא $\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$.

יודעים: $5 < \sqrt{32} < 6$, ולכן:

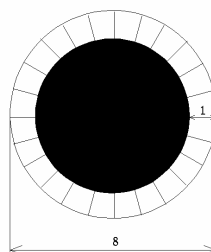
$$\sqrt{32} \approx 5 + \frac{32 - 25}{36 - 25} = 5\frac{7}{11}$$

כעת, לתירוץ רב אסי:

$$(5\frac{7}{11} + 2)\pi \approx 7\frac{7}{11} * 3\frac{1}{7} = 24$$



(1)



(2)

ה. נפחי מקוואות גליליים וכדוריים

1. מקוואות גליליים

שו"ת תשב"ץ ח"א סימן קכ"ט

ומכאן תוכל ללמוד למקוה עגול שאם תרצה לידע כמה יהיה ברומו אם הוא רחב אמה ויהיה בו שיעור מקוה הוסיף הרביע אם כן כשיהיה רוחב העגול אמה ויהיה רומו ארבע אמות הוא מחזיק מ' סאה.

וכן אם הוא ברום ג' אמות שצריך שיהיה רחב העגול שבעה טפחים פחות משהו. והדרך בידיעה זה שאם היה מרובע ו' טפחים על ו' טפחים ברום ג' אמות מחזיק מ' סאה כמה הם בשבור ל"ו ואם הוא בעיגול אתה צריך להוסיף שיהיה רחב העגול שאם היה מרובע היה בשבור מ"ח שהוא רביע יותר על ל"ו, ואלו היה המרובע ז' על ז' ולפי שאינו אלא מ"ח הם ז' פחות משהו.

אם כן מקוה עגול שהוא ברום ג' אמות ורחב ז' טפחים פחות משהו או אם הוא רחב אמה ברום ד' אמות, וכן אם הוא ברחב שתי אמות ורום אמה שלשת אלו המוספים הם שוים לאמה על אמה ברום ג' אמות מרובעות, לפי שאם היו שתי אמות מרובעות ברום אמה היו ארבע אמות בשבור, עכשו שהם בעיגול הם ג' אמות לפי שהעיגול חסר מהמרובע רביע.

2. מקוואות כדוריים

א. נפח כדור שלם

ראב"ח ואנבלשום [מופיע בשו"ת התשב"ץ] בונים את נוסחתם לנפח כדור שלם בשלבים. ראשית, הם מחשבים את שטח הכדור שהוא שטח המעטפת (הפנים) של הכדור:

$$\pi d^2 = 4\pi r^2$$

כאשר d הוא קוטר הכדור ו- r הוא רדיוסו.

בשלב השני, כדי לקבל את נפח הכדור, יש להכפיל את השטח שמצאנו בשישית הקוטר:

$$\frac{1}{6} d \pi d^2 = \frac{1}{6} \pi d^3 = \frac{8}{6} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

ראב"ח (חיבור המוה"ת, סעיף 178) אנבלשום (תשב"ץ ח"א סימן קסד)
ותשבורת הכדור כאשר זכרו אנשי חוכמת השיעור, וכן שאלת לדעת תשבורת כל גשם הכדור.

שתהיה מרבע את קוטר הכדור כפול כל הקוטר על עצמו,

ותכפול המרובע הזה ג' פעמים ושביעית פעם והעולה כפלהו על שלוש ושביעית,

ויעלה בידך משיחת שטח הכדור, וזהו כל הקוטר על כל ההיקף למבין, ויעלה לך שטח הכדור.

מנה אותו בשישית הקוטר, כפול אותו בשישית הקוטר,

ויעלה בידך תשבורת גוף הכדור. ויהיה תשבורת כל גשם הכדור.

ב. נפח חצי כדור

גם במקרה של נפח חצי כדור, הנוסחה נבנית בשלבים :

א. ראשית, מחשבים את שטח חצי הכדור :

$$\pi d \cdot \frac{d}{2} = \pi \cdot \frac{d^2}{2} = 2\pi r^2$$

ב. בשלב שני, מחשבים את נפח חצי הכדור על ידי הכפלת השטח בשישית הקוטר :

$$\frac{1}{6} d\pi \cdot \frac{d^2}{2} = \frac{1}{12} \pi d^3 = \frac{8}{12} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$$

ראב"ח (חיבור המורה"ת, סעיף 179) **אנבלשום (תשב"ץ ח"א סימן קסד)**

כגון בריכת מים אשר גופה מבפנים מעוגל ופיה עגול שאלתך היא כאשר יהיה מקוה או חפירה כדמות חצי ורוחבו שבע ואמצעייתו עמוק שלוש אמות וחצי, תדע כי כדור, וביקשת לדעת כמה מחזיק בדרך חכמי השיעור. הבריכה הזאת חצי כדור היא.

ובוא ומנה עומקה ברוחב פיה אשר הוא קוטר הכדור, כפול הקוטר על העומק שהוא חצי הקוטר,

והנקבץ בידך כפלהו ג' פעמים ושביעית פעם כאשר עשית והעולה כפלהו על שלושה ושביעית, ויעלה לך שטח חצי בכדור, ויעלה בידך ע"ז והוא משיחת שטח הבריכה הזאת.

מנה אותו בשתות הקוטר יהיה צ' פחות שתות, והוא כפול אותו על שישית הקוטר, והוא תשבורת גשם חצי תשבורת הבריכה אשר היא חצי כדור. הכדור, או המקוה או החפירה שהיא כדמות חצי הכדור

ג. נפח חלקי כדור

גם נוסחת נפח כלי שצורתו היא חלק מכדור נבנית בשלבים :

א. בשלב הראשון, מוצאים את קוטר הכדור : $d = \frac{a^2}{h} + h$, באשר a הוא הרדיוס של פי הכלי.

ב. בשלב שני מוצאים את שטח פני הכלי : $dh \cdot 3\frac{1}{7}$.

ג. בשלב האחרון, מחשבים את נפח הכלי : $dh \cdot 3\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} d = d^2 h \cdot \frac{11}{21}$.

ראב"ח (סעיפים 123 ו-180) **אנבלשום (תשב"ץ ח"א סימן קסד)**

ואם אתה יודע את המיתר ואחד מן החיצים ותראה תוספת לקח. אם יהיה לך מקוה או חפירה כדוריי פחות לדעת את הקוטר, או יותר מחצי הכדור, דע תחילה קוטר הכדור,

הוי מרבע את חצי המיתר, וזה כשתכפול חצי הרוחב בעצמו,

וחלק מרובעו על החץ אשר ידעת, והעולה חלקהו על העומק,

ותמצא החץ השני, ויצא לך מחצית הקוטר,

ושני החיצים יחד הן אורך הקוטר. הוסף עליו העומק, ויעלה לך כל הקוטר.

ואילו היה העומק פחות מחצי הרוחב היית יודע שהבריכה הזאת מעוטה ממחצית הכדור כאשר ראית בשברון העגולות בשער השני מן החיבור הזה, כגון בריכה עגולת הגוף אשר עומקה ב' אמות ורוחב עגולת פיה גדר ארבעים שהוא ו' וכגון שליש; ואתה יודע שהבריכה הזאת אין בה חצי כדור מפני שעומקה פחות ממחצית רוחב פיה. ואם אתה מוציא את קוטרה כאשר למדת בשער הב' תמצאנו ז' ;

אחר כך כפול העומק בכל הקוטר,

ובא ומנה שנים אשר הוא העומק, בז' אשר הוא קוטר הכדור, יהיה י"ד ;

והעולה כפלהו על שלוש ושביעית,

כפול אותן ג' פעמים ושביעית פעם,

והוא שטח הגשם או החפירה או המקוה.

יהיה משיחת שטח הבריכה ;

כפול השטח הזה בשישית הקוטר,

מנה אותו בשתות הקוטר והוא אחד ושתות,

והוא תשבורת הגשם או החפירה או המקוה שיהיו קצת מהכדור.

יהיה כ"א ושלש, והוא תשבורת גוף הבריכה.

הנוסחה המדויקת לנפח כדור קטום היא : $\pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)$.

