"קשר-חם" : ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תימטי

הנושא : **מי הפך את הירח לריבוע?**

הוכן ע"י : עטרה שריקי.

תקציר : בחומר מוצגת הבעיה של תרבוע צורה מישורית - אחת הבעיות המאתגרות של המאה החמישית לפנה"ס. בעיה זו עוסקת בבניית ריבוע ששטחו שווה לשטחה של צורה נתונה. את הבנייה יש לבצע באמצעות סרגל (ללא שנתות) ומחוגה בלבד.
בעיית התרבוע קסמה ליוונים, שכן מבחינה מעשית לא תמיד קל למצוא את שטחה של צורה במיוחד אם היא איננה מצולע. אילו ניתן היה להחליף צורה שכזו בריבוע שקול, ניתן היה בקלות למצוא את שטחה. מעבר לשיקול המעשי, היוונים ראו בכך את היופי הקיים במתמטיקה – החלפת הא-סימטרי בסימטרי, החלפת הלא מושלם במושלם.

מילות מפתח : גיאומטריה, הנדסה, גיאומטרית המישור, הנדסת המישור, בניות, סרגל, מחוגה, תרבוע העיגול, מלבן, ריבוע, משולש, מצולע קעור, מצולע קמור, מעגל, סהרון, שטח, לומדה, מחשב, היסטוריה של המתמטיקה, יוון, אוקלידס, היפוקרטס.

החומר הוגש במסגרת : בי"ס קיץ בנושא "שילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בהוראה", שנה"ל תשס"ד - קיץ 2004.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה : 8 עמודים.

מי הפך את הירח לריבוע?

1. תרבוע מצולעים

1.1. תרבוע מלבן

הדרך לתרבוע של מלבן הופיעה בטענה מס' 14 בכרך השני של ה"יסודות" של אויקלידס.

להלן תיאור הבניה (ר' שרטוט מס' 1):

נתון מלבן ABCD.

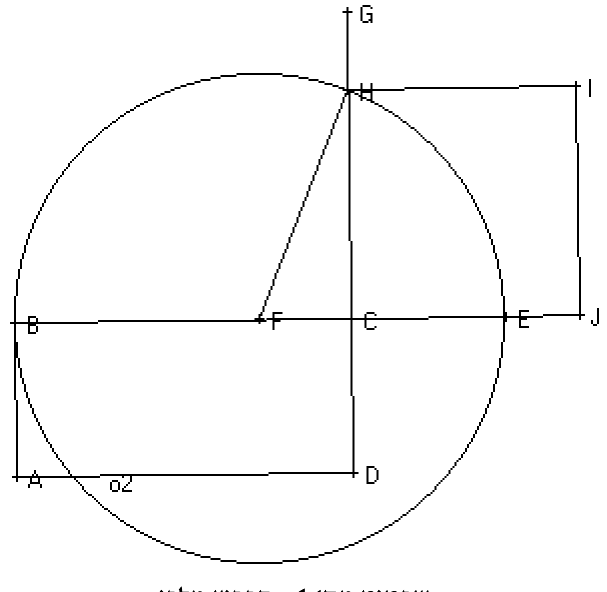
א. מאריכים את BC, כך ש - CE=CD.

ב. חוצים את הקטע BE, ומסמנים ב - F את אמצע הקטע.

ג. משרטטים מעגל שמרכזו ב – F ומחוגו BF .

ד. מעבירים מהנקודה C אנך ל – BE, בהמשך ל - DC. מסמנים ב - H את נקודת החיתוך של האנך עם המעגל.

ה. משלימים לריבוע CHIJ.



שרטוט מס' 1 – תרבוע מלבן

בצעו את הבנייה בסיוע לומדה גיאומטרית, והוכיחו שאכן בנייה זו מביאה לידי תרבוע המלבן ($S_{ABCD} = S_{CHIJ}$).

1.2 תרבוע משולש

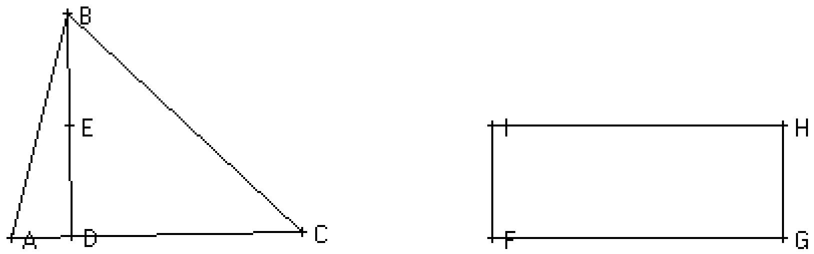
להלן תיאור תהליך של תרבוע משולש (ר' שרטוט מס' 2) :

נתון משולש ABC.

א. מהקודקוד B בונים אנך לצלע AC, ומסמנים ב – D את נקודת פגישת האנך עם הצלע.

ב. חוצים את BD, ומסמנים ב - E את אמצע הקטע.

ג. בונים מלבן IFGH שבו GH=DE ; FG=AC.



שרטוט מס' 2 – תרבוע משולש

בצעו את הבנייה בסיוע לומדה גיאומטרית.

הוכיחו ששטח המלבן, שהתקבל כתוצאה מתהליך הבנייה שתואר לעיל, שווה לשטח המשולש הנתון. כלומר, $S_{ABC} = S_{IHGF}$.

נמקו: מדוע ניתן לתרבע משולש?

1.3 תרבוע מצולע כלשהו

להלן תיאור תהליך של תרבוע מצולע קמור (ר' שרטוטים 3 ו – 4) :

נתון מצולע ABCDE.

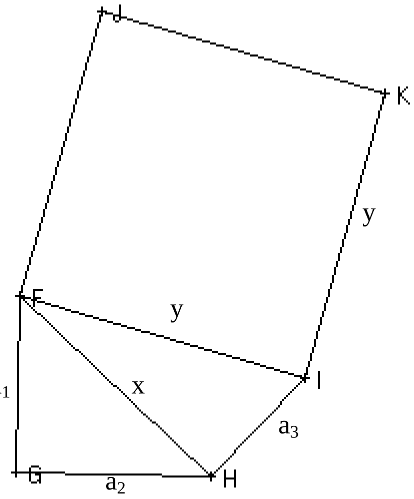
א. בעזרת אלכסונים נחלק אותו למשולשים בעלי שטחים S_1 , S_2 , S_3. סה"כ שטח המצולע הוא $S_1 + S_2 + S_3$.

ב. מתוך סעיף 1.2 ידוע שניתן לבנות ריבועים בעלי צלעות באורכים a_1 , a_2 , a_3 ושטחים S_1 , S_2 , S_3 בהתאמה.

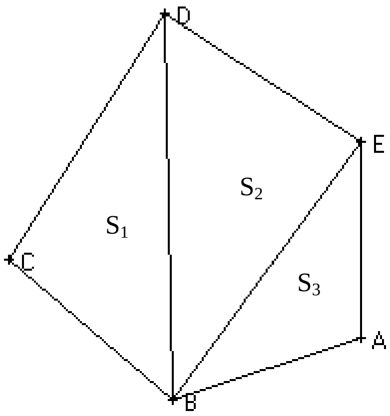
ג. בונים משולש ישר-זווית שאורכי ניצביו הם a_1 ו – a_2 ואורך היתר שלו הוא x.

ד. בונים משולש ישר זווית שאורכי ניצביו הם x ו – a_3 ואורך היתר שלו הוא y.

ה. בונים ריבוע FJKI שצלעו y.



שרטוט מס׳ 4 – תרבוע מצולע



שרטוט מס׳ 3 – חלוקת מצולע למשולשים

בצעו את הבנייה בסיוע לומדה גיאומטרית.

הוכיחו כי שטח הריבוע, שהתקבל כתוצאה מתהליך הבנייה שתואר לעיל, שווה לשטח המצולע הנתון, כלומר: $S_{ABCDE} = S_{FGKI}$.

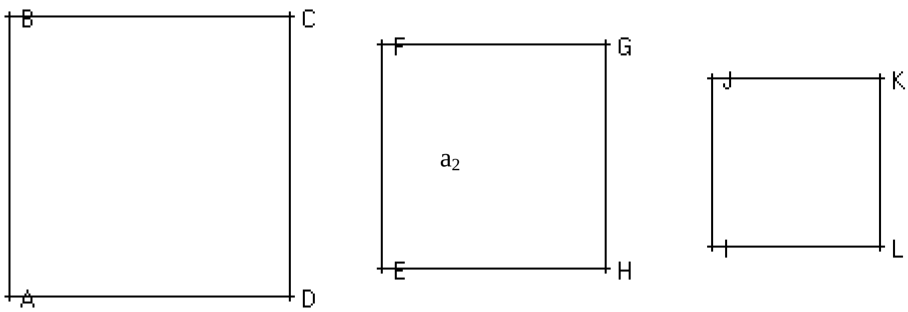
נמקו: מדוע ניתן לתרבע מצולע קמור כלשהו?

האם ניתן לתרבע מצולעים קעורים בדרך שתוארה לעיל? מדוע?

1.4 הפרשים בין שטחים

נתונים שני ריבועים, אשר התקבלו מתוך תרבוע של שני מצולעים. שטחו של אחד מהריבועים הוא S_1 ואורך צלעו הוא a_1, שטחו של הריבוע השני הוא S_2 ואורך צלעו הוא a_2. כמו כן נתון $S_1<S_2$ (ר׳ שרטוט מס׳ 5).

ברצוננו לבנות ריבוע בעל שטח S_3 השווה להפרש בין שטחי שני הריבועים הנתונים. כלומר - $S_3=S_1-S_2$. נסמן את אורך הצלע של ריבוע זה באמצעות a_3.

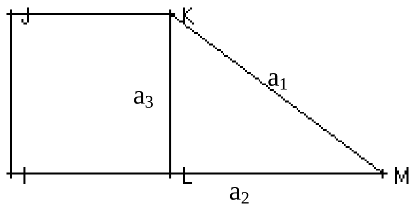


שרטוט מס׳ 5 – ריבוע ששטחו כהפרש שטחי שני ריבועים נתונים

לצורך בניית הריבוע ששטחו S_3 בונים משולש ישר-זווית שאורך היתר שלו הוא a_1 ואורך אחד מניצביו הוא a_2 (ר' שרטוט מס' 6). נסמן ב – a_3 את אורך הניצב השני.

מתקבל:

$$S_{IJKL}= a_3^2 = a_1^2 – a_2^2 = S_1 – S_2 = S_3$$



שרטוט מס' 6 – בניית ריבוע ששטחו שווה להפרש בין שטחי ריבועים

מתהליך הבנייה שתואר לעיל אפשר להסיק שניתן לבנות ריבוע ששטחו שווה להפרש שטחם של שני ריבועים.

נמקו: האם ניתן לבנות ריבוע ששטחו שווה להפרש שטחם של שני מצולעים כלשהם?

2. תרבוע של צורות שאינן מצולעיות

2.1 תרבוע הסהרון

״סהרון״ הוא צורה מישורית התחומה על-ידי שתי קשתות מעגליות. היפוקרטס לא תרבע את כל הצורות הללו אלא רק סהרון מסויים, שאותו בנה לצורך זה. את טענתו לנכונות הבנייה שלו ביסס על המשפטים הבאים:

א. משפט פיתגורס.

ב. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.

ג. יחס השטחים של שני עיגולים או חצאי עיגולים הוא כיחס ריבועי הקטרים שלהם.

שני המשפטים הראשונים היו ידועים עוד לפני זמנו של היפוקרטס. אל המשפט השלישי התייחס היפוקרטס כאל מוכח, למרות שלא ידוע אם אכן הייתה לו הוכחה לכך.

להלן תיאור תהליך בניית הסהרון של היפוקרטס, תוך התייחסות לשרטוט מס׳ 7 (זכרו – ברשותו רק סרגל ומחוגה!):

נתון מעגל שמרכזו ב – A וקוטרו BC.

א. בונים את המחוג AD בניצב ל – BC.

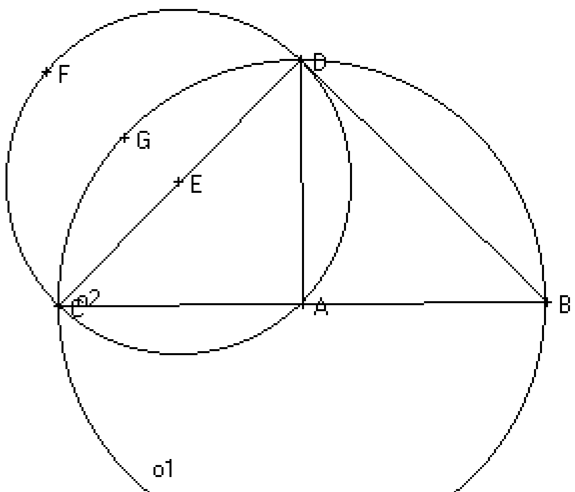
ב. בונים את CD ואת BD.

ג. חוצים את CD, ונסמן ב – E את אמצע הקטע.

ד. משרטטים מעגל שמרכזו ב – E ומחוגו CE.

ה. מתקבל הסהרון CFDG.

הוכיחו שסהרון זה ניתן לתרבוע (רמז: משולש מתווך בין הצורות...).



שרטוט מס׳ 7 – תרבוע הסהרון

2.2 אז מה עוד נשאר לתרבע?...תרבוע העיגול

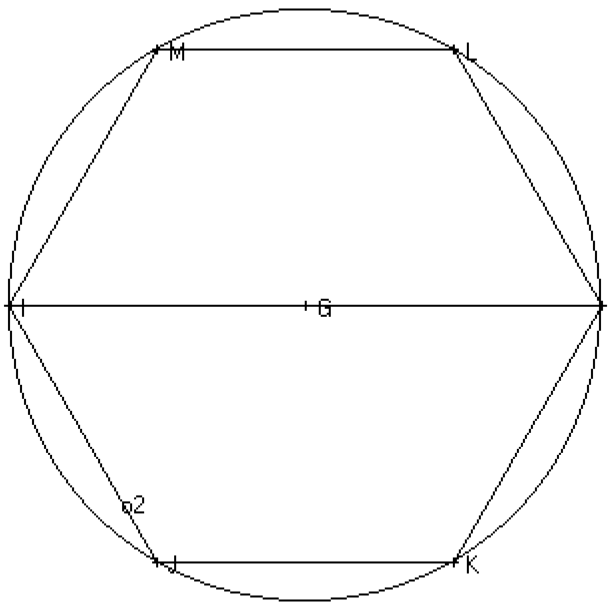
משהצליח היפוקרטס לתרבע את הסהרון, היו המתמטיקאים היווניים אופטימיים בנוגע ליכולתם לתרבע את המושלם מכולם – העיגול.

היפוקרטס ניסה לתרבע את העיגול בעזרת טיעונים דומים לאלה שבעזרתם הצליח לתרבע את הסהרון. מתוך כתבים מאוחרים של Alexander Aphrodisiensis (210 לספירה) ניתן ללמוד שהיפוקרטס סבר שאכן הצליח לתרבע את העיגול. יחד עם זאת, לא נמצאו לכך הוכחות. אלכסנדר עצמו תיאר את בנייתו של היפוקרטס באופן הבא (ר' שרטוטים 8-10):

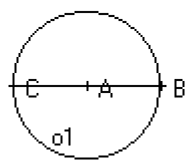
נתון מעגל שמרכזו ב – A וקוטרו BC.

א. בונים שמרכזו ב – G וקוטרו IH=2*BC.

ב. בתוך המעגל G חוסמים משושה משוכלל (בניה שהייתה ידועה ליוונים – כל אחת מצלעות המשושה המשוכלל שווה באורכה למחוג המעגל. כלומר, כל אחת מצלעות המשושה המשוכלל החסום שווה ל – BC).

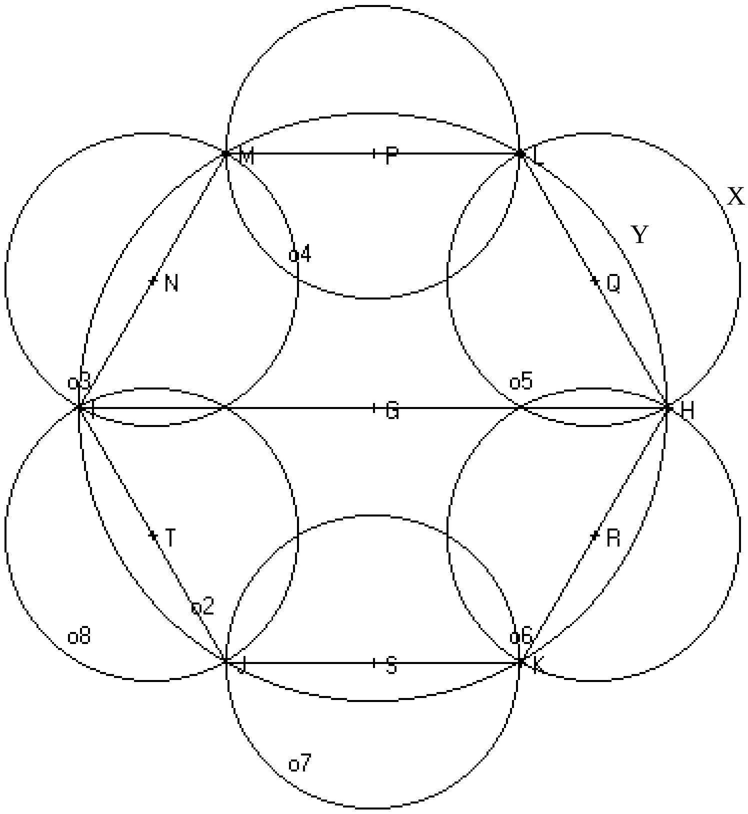


שרטוט מס' 9 – חסימת משושה משוכלל במעגל



שרטוט מס' 8 – המעגל הנתון

ג. על כל אחת מצלעות המשושה המשוכלל בונים מעגלים בהם הצלע היא קוטר, ומקבלים שישה סהרונים (לדוגמא – הסהרון LXHY), כפי שניתן לראות בשרטוט מס׳ 10.



שרטוט מס׳ 10 – תרבוע העיגול

טענה: בעזרת תהליך הבניה שתואר, ניתן לתרבע את העיגול.

הוכחה:

מהבנייה מתקבל ששטח חצי העיגול הבנוי על כל אחת מצלעות המשושה המשוכלל החסום במעגל G שווה לשטח חצי העיגול A.

נסמן את ב – I שטחו של כל אחד מחצאי העיגולים הבנויים על צלעות המשושה החסום, ב - $S_{hexagon}$ את שטח המשושה החסום במעגל G, וב - S_{lune} את שטחו של כל סהרון.

על פי שרטוט מס׳ 10 מתקבל: $S_{hexagon} + 6 \cdot I = Scircle_G + 6 \cdot S_{lune}$

אולם: $2 \cdot I = S_{circle\ A}$

לכן: $S_{hexagon} + 3 \cdot S_{circle\ A} = S_{circle\ G} + 6 \cdot S_{lune}$

היות ו – $IH=2 \cdot BC$, הרי ש: $S_{circle\ G} = 4 \cdot S_{circle\ A}$

לכן: $S_{hexagon} + 3 \cdot S_{circle\ A} = 4 \cdot S_{circle\ A} + 6 \cdot S_{lune}$

כלומר: $S_{hexagon} = S_{circle\ A} + 6 \cdot S_{lune} \Rightarrow S_{circle\ A} = S_{hexagon} - 6 \cdot S_{lune}$

משושה, בהיותו מצולע – ניתן לתרבע.

סהרון – ניתן לתרבע, ולכן – ניתן לבנות ריבוע ששטחו הוא כסכום ששת הסהרונים.

את העיגול הבנוי על BC ניתן לתרבע על-ידי תהליך פשוט של חיסור שטחים.

מה דעתכם – האם אכן הצליח היפוקרטס לתרבע את העיגול?

<u>רשימת מקורות:</u>

Boyer C. B. & Merzbach U. C. (1989): *A history of mathematics*, second edition, John Wiley & Sons, Pp. 77-84

Burton D. M. (1985): *The history of mathematics, an Introduction*, Allyn Bacon Inc, Pp. 129-149.

Dunham W. (1990): *Journey through genius*, Penguin Books, Pp. 1-26

זיסקין ק. (1998): *שלוש בעיות בניה עתיקות יומין*, הכנס הארצי השביעי למרכזי המקצוע מתמטיקה, קשר חם.