הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

"קשר-חם": לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי

הנושא: **<u>הוכחות ויזואליות ללא מילים (כמעט)</u>**

<u>הוכן ע"י</u>: אורית זסלבסקי, גרייסי ויניצקי.

<u>תקציר</u>: בחומר מובאות הוכחות ויזואליות למשפטים מתחומים שונים במתמטיקה.

<u>מילות מפתח</u>: הוכחות, אלגברה - טכניקה אלגברית, אלגברה - סדרות, תורת הקבוצות, גיאומטרית המישור, אנליזה - חשבון דיפרנציאלי, אנליזה - חשבון אינטגרלי, טריגונומטריה, נוסחאות הכפל המקוצר, אי-שוויון הממוצעים, סכום סדרה חשבונית, סכום סדרה הנדסית אינסופית, משולש, מרובע, שטח משולש, שטח מקבילית, שטח טרפז, משפט פיתגורס, נגזרת, פונקציה הפוכה, אינטגרציה בחלקים, משפט הקוסינוסים.

<u>החומר הוגש במסגרת</u>: הכנס הארצי של מרכזי המקצוע מתמטיקה, כפר המכביה, אפריל 92.

<u>החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה</u>: 17 עמודים.

הוכחות ויזואליות ללא מילים (כמעט)

1. השימוש בייצוגים ויזואליים ללמידת מתמטיקה

הוכחות ללא מילים (כמעט) מבוססות, בדרך כלל על ייצוגים ויזואליים, שכמעט מדברים בעד עצמם. ייצוגים ויזואליים יכולים לכלול: צורות גיאומטריות, גרפים, צבעים, קיפולי נייר, וכל דבר חזותי שתופס את העין.

המציאות בביה"ס כיום היא, שהשימוש בייצוגים ויזואליים, הרבה פחות שכיח מאשר בייצוגים אחרים (כגון ייצוגים אלגבריים/אנליטיים). מחקרים רבים מצביעים על כך, שתלמידים (וכפי הנראה, גם מורים למתמטיקה) נמנעים מלהשתמש בייצוגים ויזואליים, גם כאשר שימוש זה הכרחי או מפשט בצורה ניכרת את הבעיה (איזנברג ודרייפוס (1989, 1991), דרייפוס (1991), וינר (1989)). חלק מהקשיים הנפוצים, הגורמים לשימוש המועט בהוכחות ויזואליות הם:
אינטרפרטציה לא נכונה של מידע גרפי; חוסר הבחנה בין יציר גיאומטרי והציור המייצג אותו; היעדר יכולת לקשר ולתרגם בין ייצוג ויזואלי לאנליטי (המעבר מייצוג ויזואלי לאנליטי קשה יותר, בדרך כלל, מהכיוון ההפוך).

ייצוג ויזואלי, הנשען על האינטואיציה של הלומד, יכול להביא ללמידה משמעותית יותר. כמו כן, עצם השימוש בייצוגים שונים (multiple - representations) יכול לתרום להבנה של תלמידים רבים יותר, מאחר ותלמידים מסוימים מסוגלים לפתור בעיות דווקא בקונטקסט גיאומטרי, למשל, ולא באלגברי. כיום, בעידן המחשבים, הולכת וגוברת ההכרה בכך שלייצוגים ויזואליים יש פוטנציאל לתרום לתהליך הלמידה, להעשיר אותו, ולהביא להבנה מעמיקה של מושגים מתמטיים.

2. על התוקף של הוכחות ויזואליות

הוכחות ללא מילים (כמעט) הנשענות של ייצוגים ויזואליים, זוכות להכרה בקרב קהיליית המתמטיקאים. ביטוי לכך אפשר למצוא בעובדה שבעיתונות מתמטית מקצועית (למשל, ב- Mathematics Magazine וב- The College Mathematics Journal), מופיעות בקביעות דוגמאות להוכחות מסוג זה.

ישנם סוגים שונים של הוכחות ללא מילים. הוכחות אלה נבדלות ביניהן, למשל, במידת השקיפות והכלליות שלהן. אפשר להבחין בין הוכחות ויזואליות תקפות לחלוטין לבין הוכחות שבהן הייצוג קובע, מעצם טבעו, מגבלות מסויימות על הנתונים ובכך פוגע בכלליות ההוכחה. ישנן גם "הוכחות" ללא מילים, שקשה לקבלן כתקפות, אך בכל זאת יש להן ערך כהדגמה או המחשה של טענות שהוכחו כבר או יוכחו בעתיד בכלים אחרים.

יש לקחת בחשבון כי השימוש בייצוג ויזואלי לא תמיד מהווה יתרון. יש לבדוק לגופו של עניין את מידת התרומה של השימוש בו. ישנם גם מקרים, שבהם הייצוג הויזואלי איננו מקל על ההוכחה, אלא רק מסבך אותה. אין להתעלם גם מהסכנות הטמונות בהסתמכות-יתר על ייצוג ויזואלי. עם זאת, הגישה האומרת שיש להימנע כליל מהסתמכות על ייצוגים ויזואליים, כדי להמנע משימוש לא מוצלח בהם - שכרה יוצא בהפסדה.

מעניין לציין, שכמעט ללא קשר למידת התקפות של הוכחה ויזואלית, תמיד יימצאו כאלה, שלאחר שהועלו בפניהם נימוקים ויזואליים תקפים, לא יסתפקו בכך ויבקשו לקבל גם "הוכחה מתמטית".

3. דוגמאות

הדוגמאות שלהן ערוכות לפי נושאים, ומייצגות תכנים מתמטיים הנלמדים מהכיתות של חטיבת הביניים ועד לכיתות הגבוהות של החטיבה העליונה.

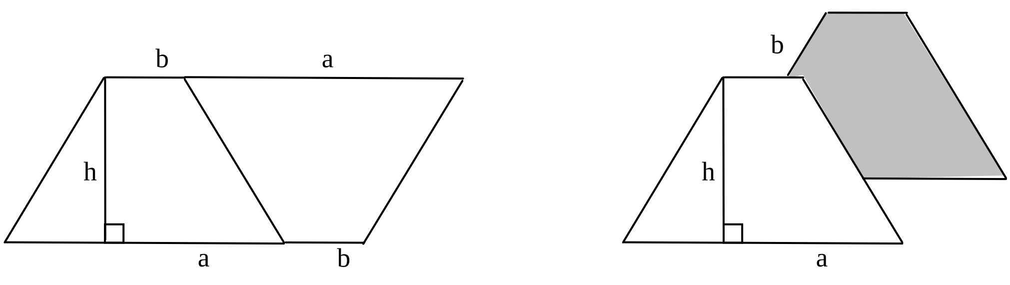
3.1 חישובי שטח

סעיף זה מבוסס על: Student Math Notes, May 1986, p. 120

הדוגמאות בסעיף זה ממחישות את השקילות בין מקבילית למלבן, המהווה בסיס לחישוב שטח המקבילית, ובאופן דומה, מתוך שקילות למחצית מקבילית, נבנות הנוסחאות לחישוב שטח משולש וטרפז.

שטח המקבילית = $h \cdot a$

כפליים שטח המשולש = $h \cdot a$



כפליים שטח הטרפז = $h \cdot (a + b)$

3.2 נוסחאות הכפל המקוצר

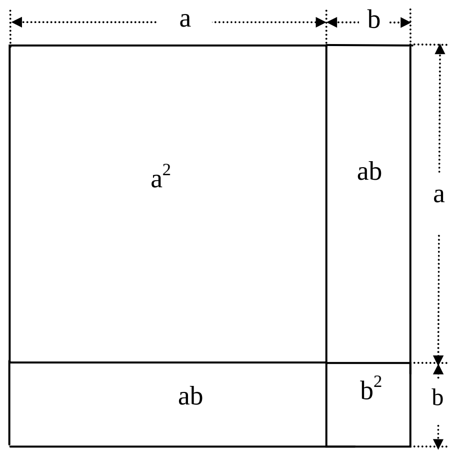
סעיף זה מבוסס על:

(1) Mathematics in School, September 1979, p. 15

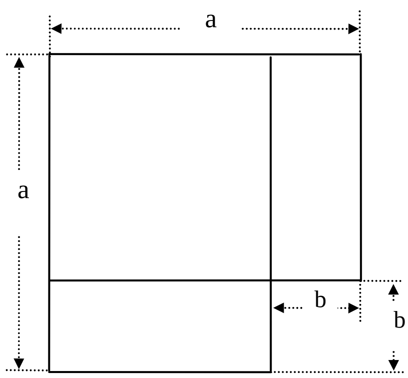
(2) Student Math Notes, May 1986, p. 120

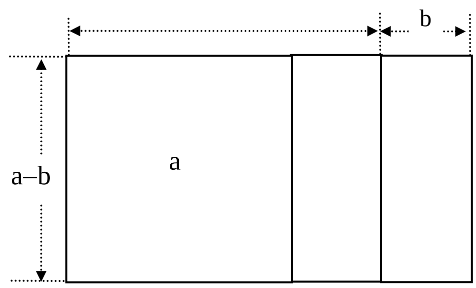
ההוכחות של נוסחאות הכפל המקוצר נשענות על חישובי שטחים ונפחים, כאשר העיקרון המנחה הוא שימור השטח (או הנפח) של צורה גיאומטרית תחת פירוקה והרכבתה מחדש. להלן חמש דוגמאות כאלה (שתיים מהן קשורות לאותה נוסחה).

מן הראוי לציין, שהוכחות אלה תופסות רק עבור מספרים חיוביים (מדוע?)

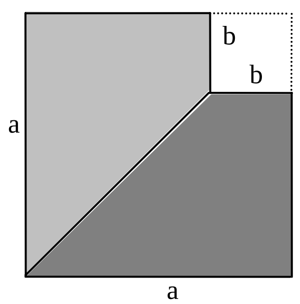


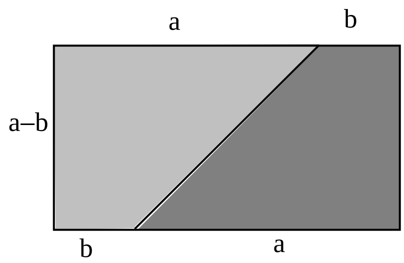
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



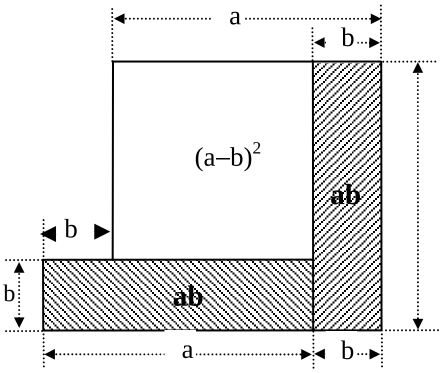


$a^2 – b^2 = (a – b) (a + b)$





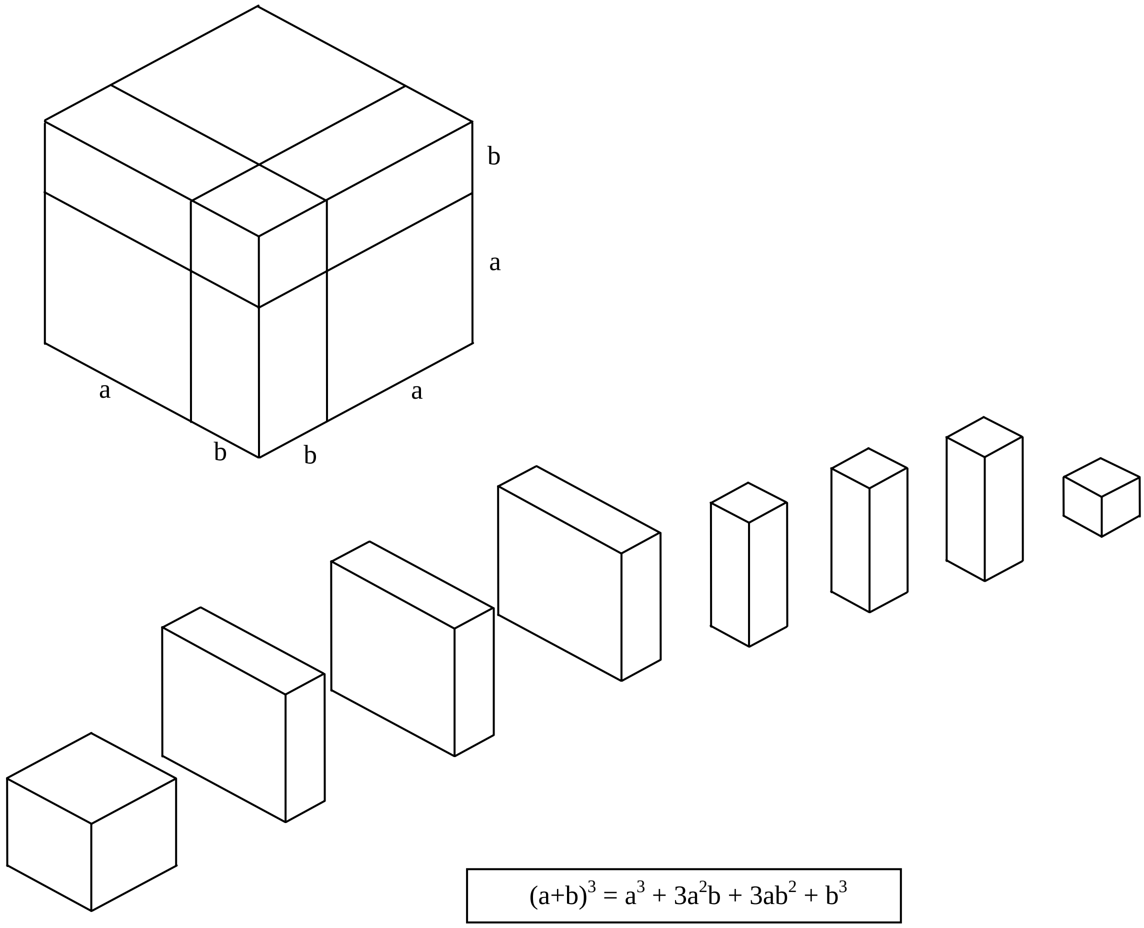
$a^2 – b^2 = (a-b) (a+b)$



$$(a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$



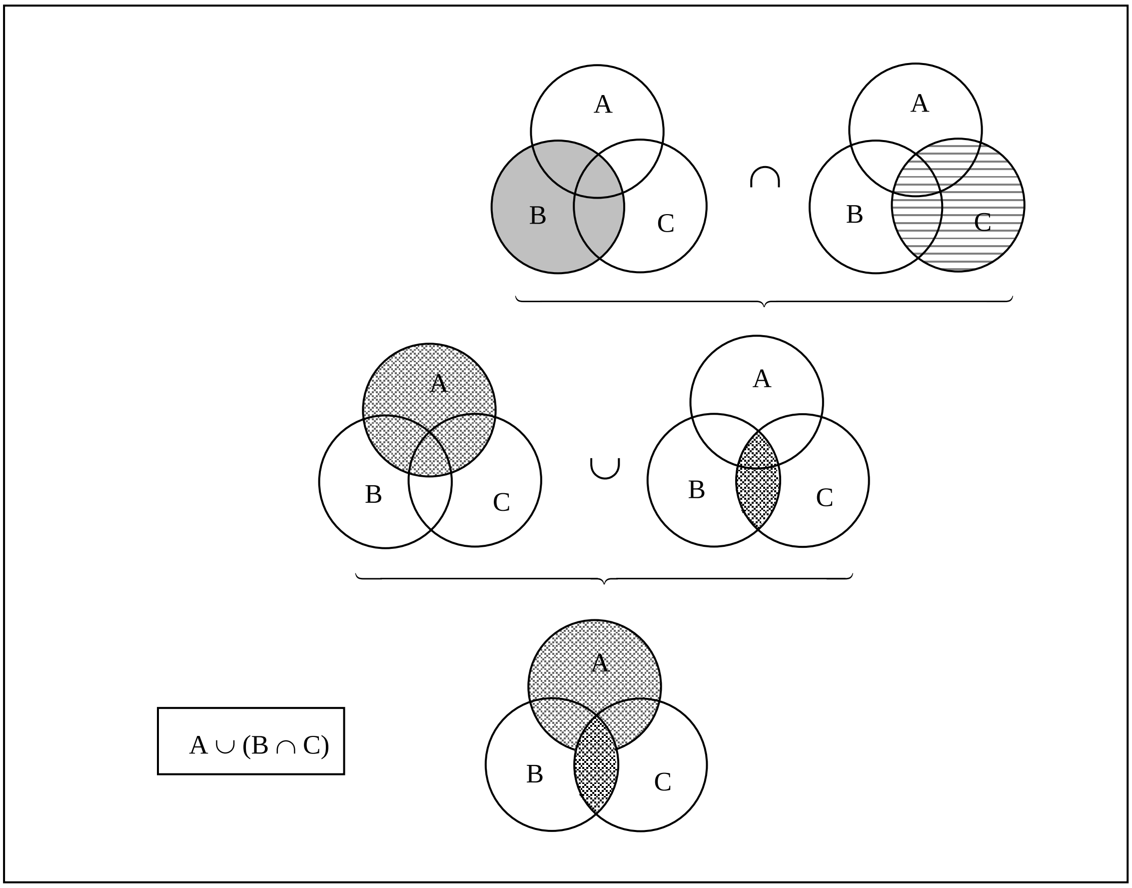
$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

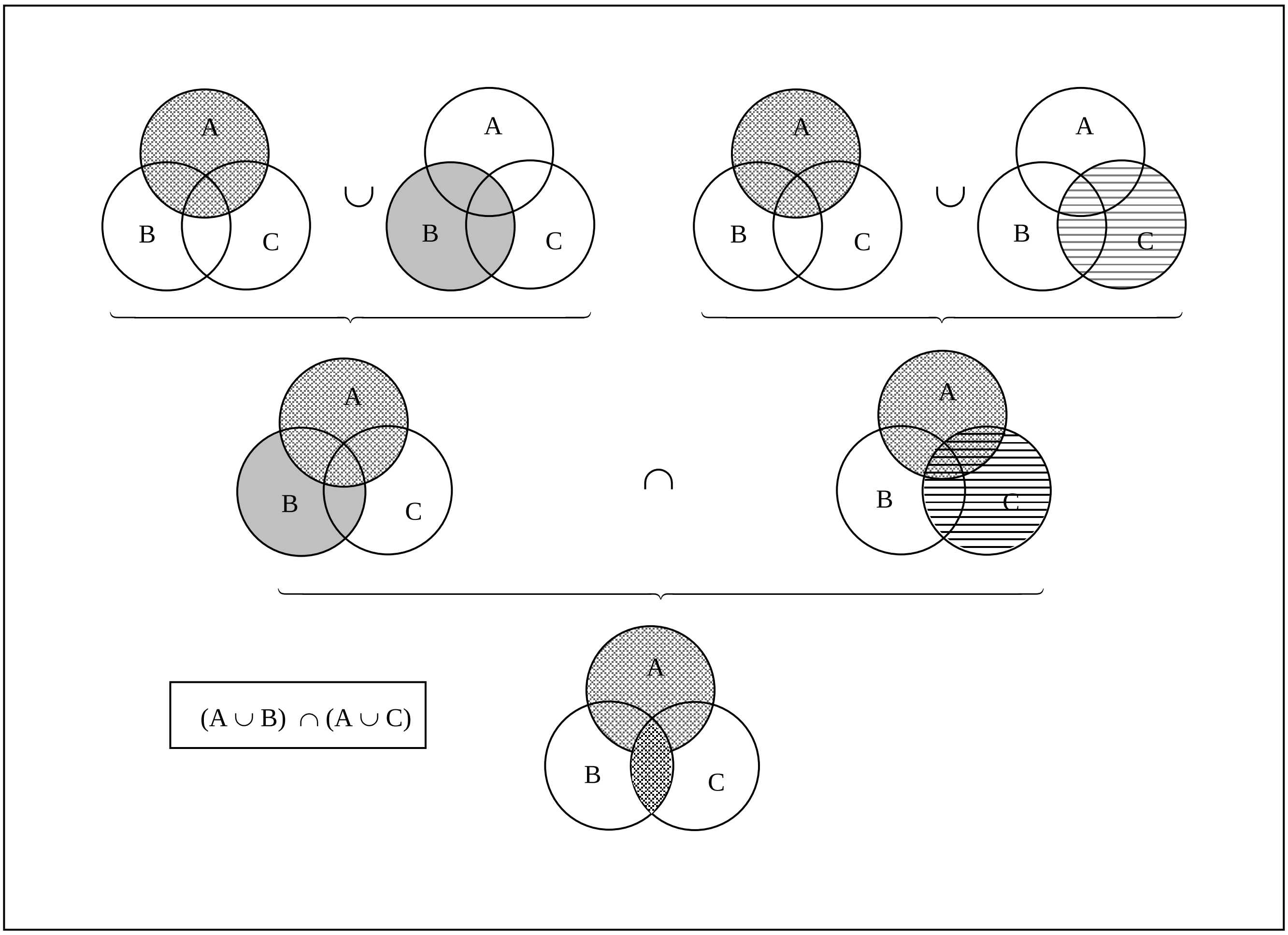
3.3 תורת הקבוצות

סעיף זה מבוסס על: Barwise & Etchemendy, 1991

נוכיח, בעזרת דיאגרמות וון, את הטענה הבאה עבור הקבוצות A ,B ,C:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$





$$\Downarrow$$

$$\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$$

האם ההוכחה תקפה <u>לכל</u> שלוש קבוצות?

3.4 סדרות חשבוניות

סעיף זה מבוסס על:

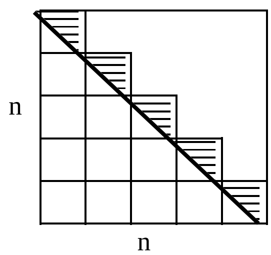
(1) Mathematics in School, Sep. 1979, p. 15
(2) Eisenberg & Dreyfus, 1991
(3) Mathematics Magazine, 1984, Vol. 57, No. 2, p. 104
(4) Student Math Notes, May 1986, p. 119, 121

ההוכחות בסעיף זה נשענות על אפשרות הייצוג של המספרים הטבעיים כאוסף של עצמים בדידים. מקובל להשתמש בנקודות או במשבצות, ולמצוא שיטה כללית למנייתם, גם אם היא מתבצעת בפועל על מספר מצומצם של עצמים.

<u>חישוב סכום המספרים הטבעיים מ- 1 עד n</u>

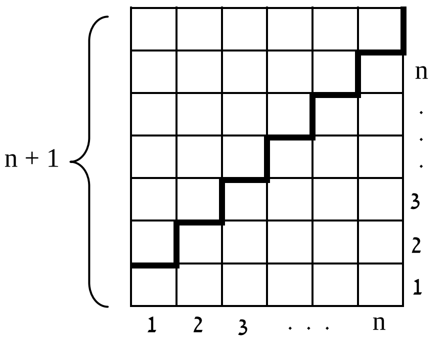
להלן שלוש דרכים שונות להגיע לנוסחת הסכום של n המספרים הטבעיים הראשונים:

1. <u>השלמה לריבוע</u>



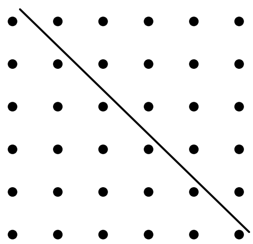
$$1+2+3+...+n=\frac{n\cdot n}{2}+n\cdot\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

2. <u>השלמה למלבן</u>



$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

.3



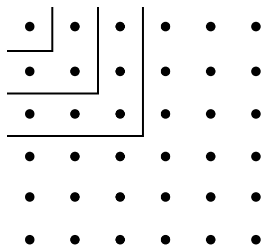
$$\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n-1}k=n^2$$
$$\Downarrow$$
$$S_n+S_{n-1}=n^2$$
$$S_n+S_n-n=n^2$$
$$2S_n=n^2+n$$
$$S_n=\frac{n^2+n}{2}$$

<u>חישוב סכום המספרים הטבעיים האי-זוגיים מ- 1 עד 1 – 2n</u>

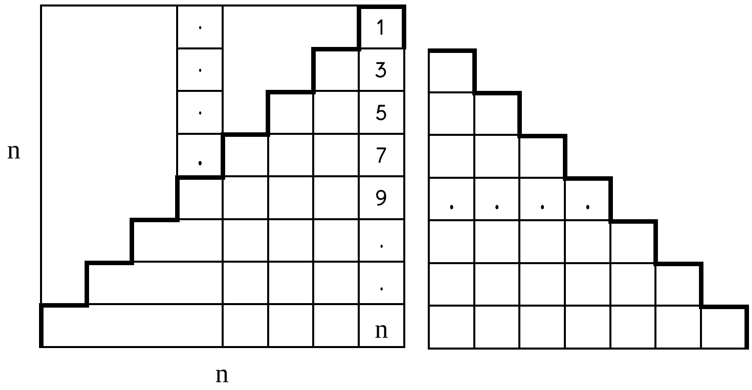
להלן שתי הוכחות לנוסחת הסכום של n המספרים האי-זוגיים הראשוניים :

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$$

.1



.2



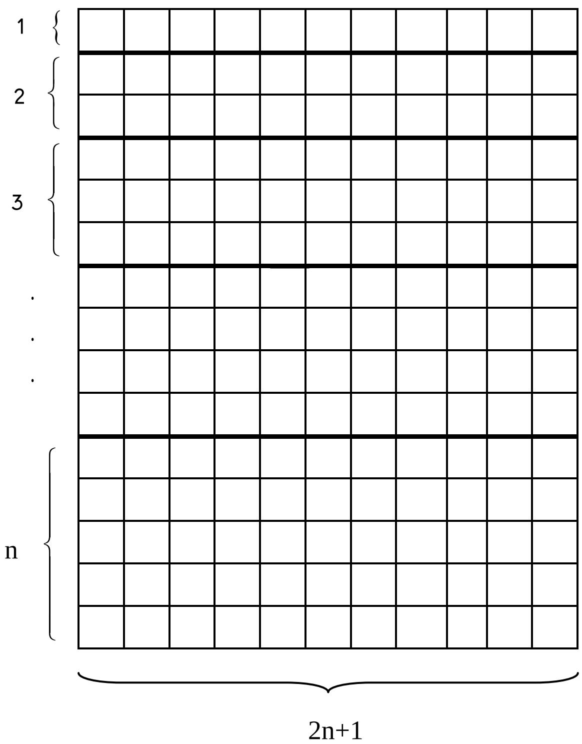
גם כאן יש שימוש בתכונה הצורנית המיוחדת שיש למספרים הריבועיים : כל מספר ריבועי ניתן לסדר כריבוע.

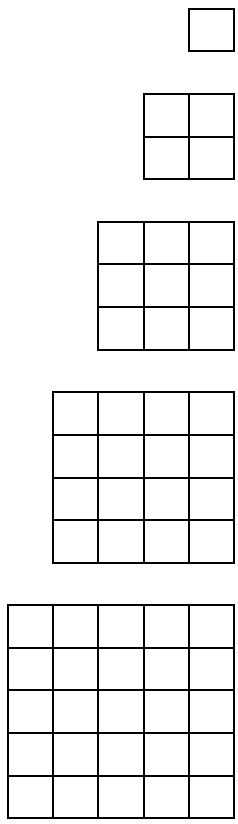
3.5 סדרת הריבועים השלמים

סעיף זה מבוסס על : The College Mathematics Journal, Vol. 22, No. 2, March 1991, p. 124

להלן הוכחת הזהות :

$$(1 + 2 + ... + n)(2n + 1) = 3(1^2 + 2^2 + ... n^2)$$





3.6 סדרה הנדסית מתכנסת

סעיף זה מבוסס על:

(1) Mathematics Magazine, Vol. 61, No. 4, October 1998

(2) Mathematics Teacher, Vol. 84, No. 7, October 1991, p. 508

(3) Eisenberg & Dreyfus, 1991

את מושג הגבול לא ניתן לתאר בדיוק, אולם בהוכחות הבאות נראה כיצד אפשר להמחישו, ומתוך כך להגיע לגבול של סדרה הנדסית מתכנסת.

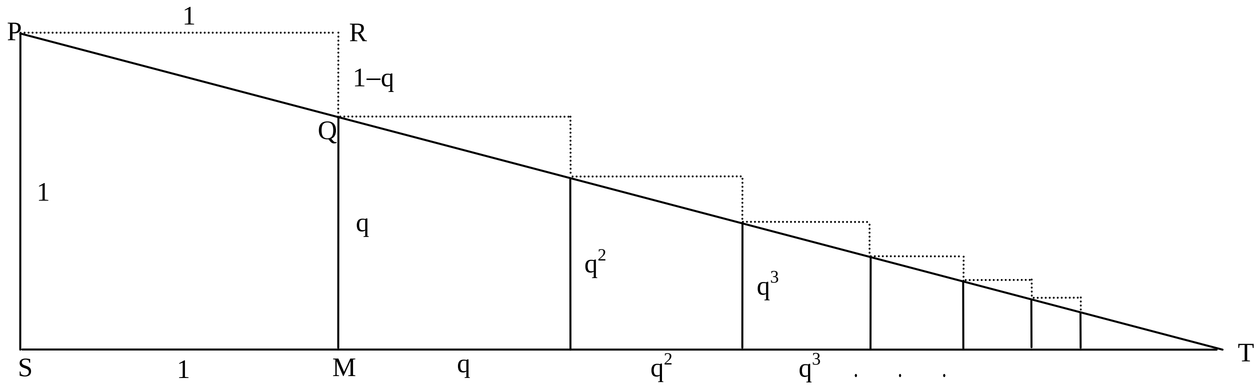
תנו דעתכם באיזו מידה מטפלות ההוכחות הבאות במקרים כלליים ובאיזו מידה הן תקפות.

א. להלן הוכחה של נוסחת הסכום של סדרה הנדסית: $1+q+q^2+...=\frac{1}{1-q}$

נתון: $|q| < 1$.

על צלע ריבוע היחידה PRMS מקצים קטע MQ השווה ל- q.

הישר PQ חותך את הישר SM בנקודה T. על MT מקצים בזה אחר זה קטעים באורכים של חזקות עולות של q.



$$\Delta PRQ \sim \Delta TSP$$

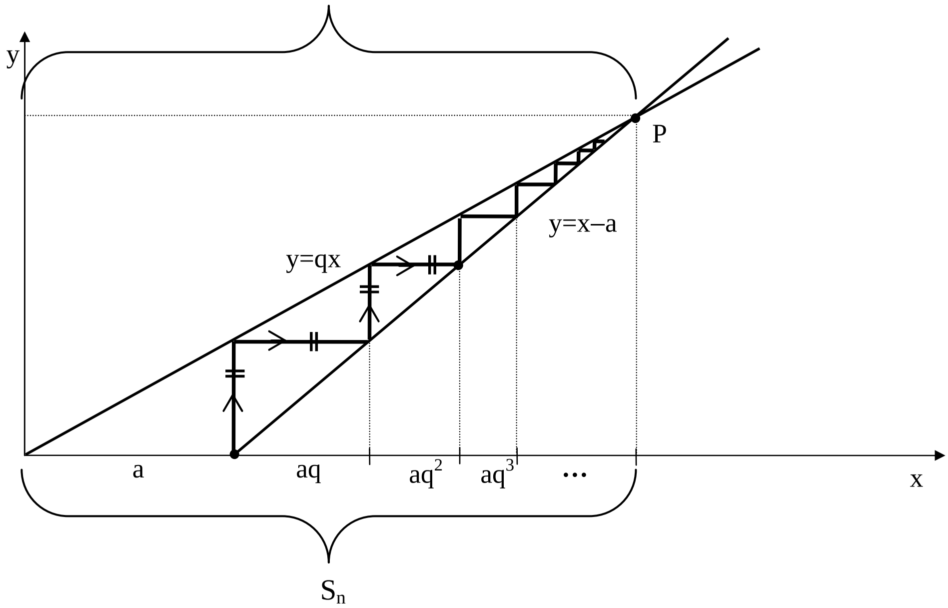
$$\Downarrow$$

$$\frac{ST}{PR}=\frac{PS}{RQ}$$

$$\Downarrow$$

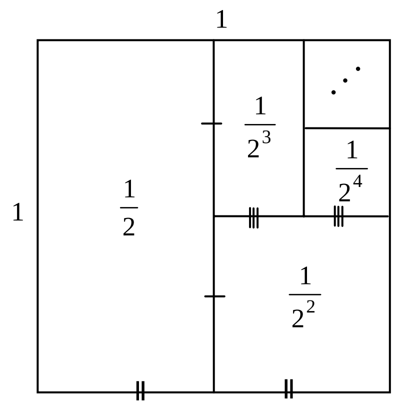
$$1+q+q^2+\ldots=\frac{1}{1-q}$$

ב. להלן הוכחה של נוסחת הסכום : $a+aq+aq^2+\ldots=\dfrac{a}{1-q}$



$$x-a=qx$$
$$\Downarrow$$
$$S_n-a=qS_n$$
$$\Downarrow$$
$$S_n=\frac{q}{1-q}$$

ג.



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=1$$

3.7 אי שוויון הממוצעים

סעיף זה מבוסס על:

(1) Mathematics Magazine, Vol. 59, No. 1, Feb 1986, p. 11

(2) Eisenberg & Dryfus, 1991

להלן מובאות שתי הוכחות לכך שהממוצע הגיאומטרי קטן או שווה לממוצע החשבוני. האחת מבוססת על הפרש שטחים. השניה מבוססת על המשמעות הגיאומטרית של שני הממוצעים הללו במעגל, ועל כך שהקוטר הוא המיתר הגדול ביותר במעגל.

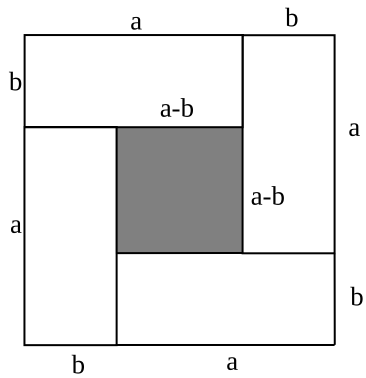
נסו לברר לעצמכם, בכל אחת מההוכחות, מתי מתקיים השוויון בין שני הממוצעים, ומה המשמעות הגיאומטרית של מקרה זה.

.1

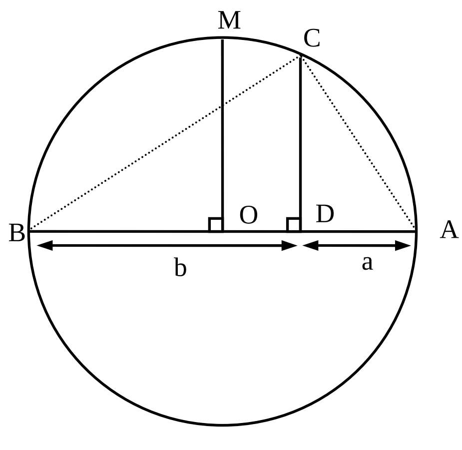
$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$



.2



O מרכז המעגל

$$MO = \frac{a+b}{2}$$

$$CD = \sqrt{ab}$$

(הגובה ליתר במשולש יש"ז הוא הממוצע הגיאומטרי בין שני היטלי הניצבים על היתר)

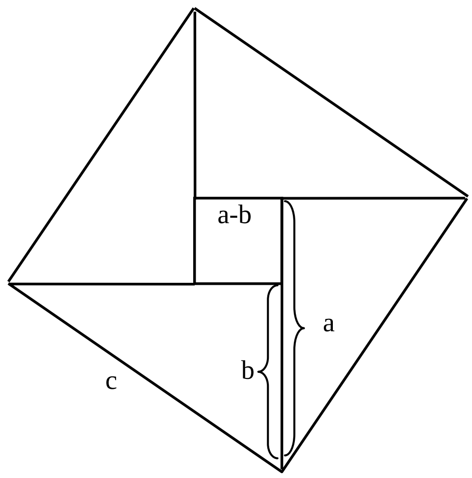
$\Downarrow$ (היות ו- $MO > CD$)

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

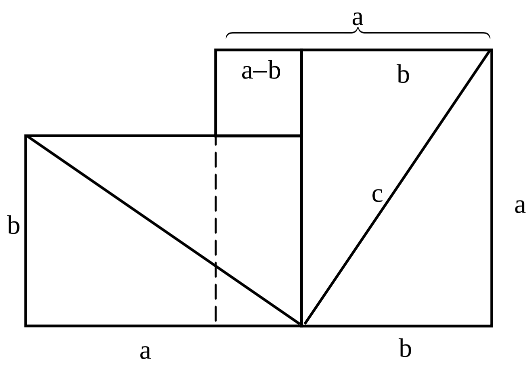
3.8 משפט פיתגורס

כידוע, למשפט פיתגורס יש הוכחות ויזואליות רבות. אחת מהן, הלקוחה מ- Eves, 1983 (p. 32), מובאת להלן. גם כאן, כמו בהוכחות של נוסחאות הכפל המקוצר, העיקרון המנחה הוא שימור השטח כאשר מפרקים את הצורה ומרכיבים אותה מחדש עם אותם החלקים באופן אחר.

לוקחים ארבעה משולשים ישרי זווית ומסדרים אותם כך:



שלב א'



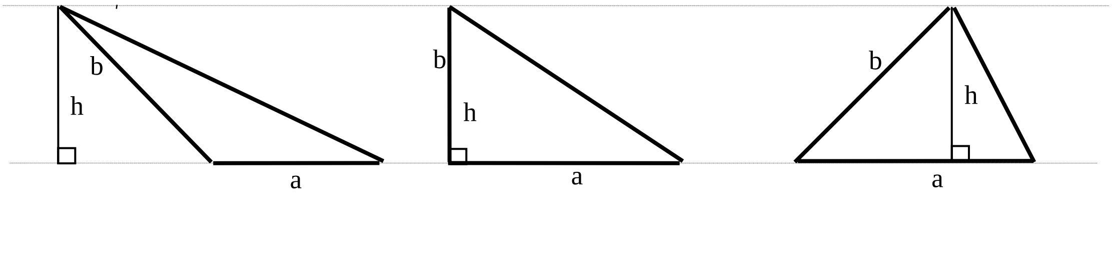
שלב ב'

3.9 אי שוויון במרובע

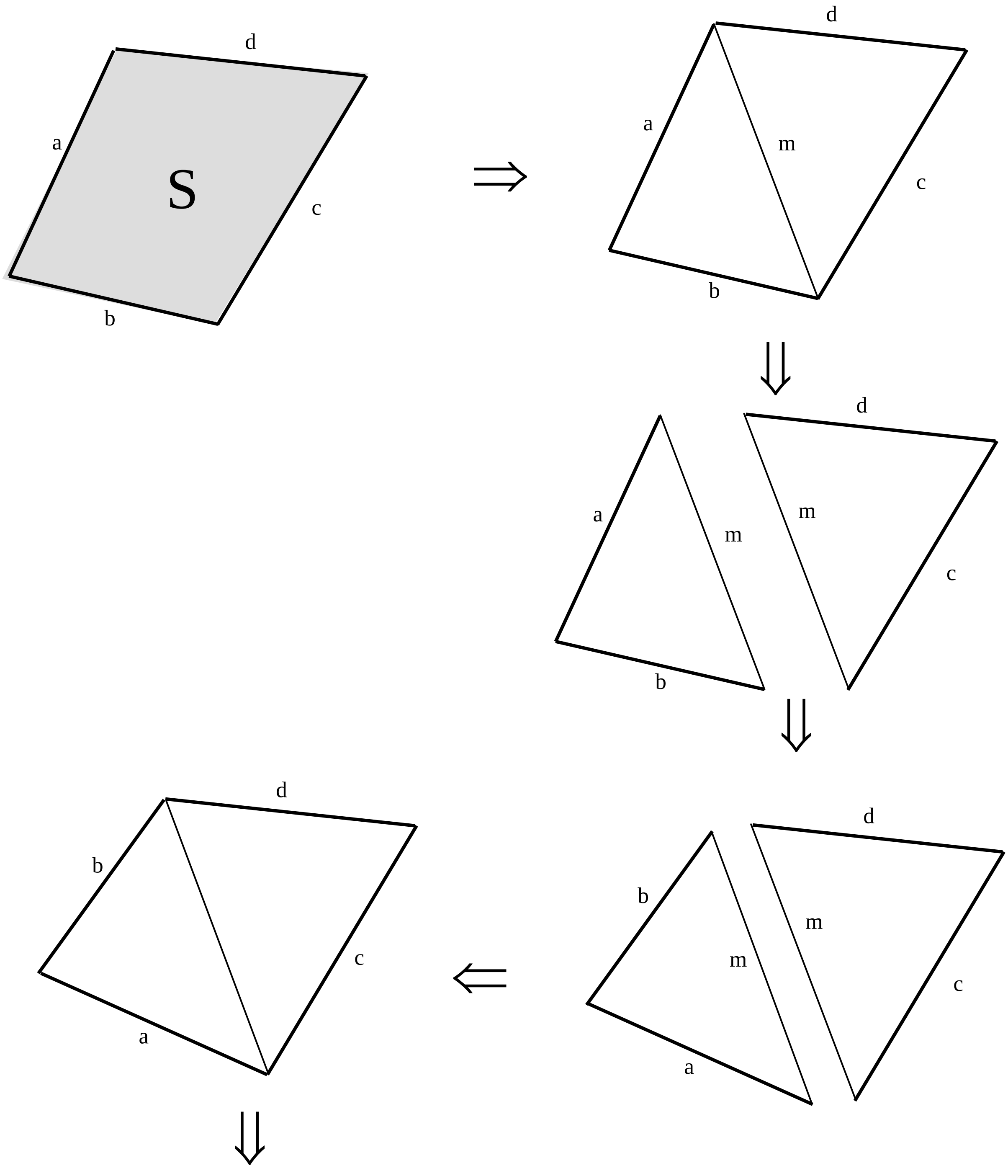
בסעיף זה נראה הוכחה למשפט הבא:

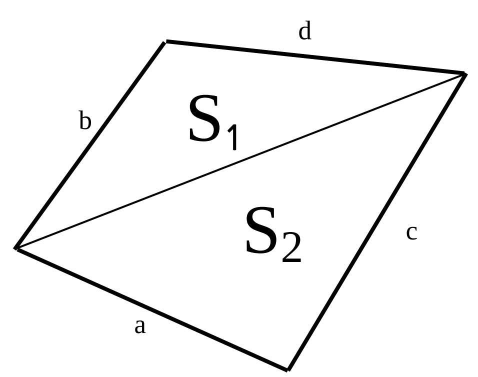
<u>משפט</u>: שטח מרובע (S), שצלעותיו a, b, c, d (a, c הן צלעות נגדיות), קטן או שווה לממוצע החשבוני של מכפלות הצלעות הנגדיות, כלומר: $S \le \frac{ac+bd}{2}$

הוכחת המשפט הינה דינמית בטבעה, ואפשר להמחיש אותה היטב באמצעות שקפים, שניתן לסובב ולהפוך. ההוכחה נשענת על הטענה, (הקלה יותר להוכחה), ששטח משולש קטן או שווה למחצית מכפלת שתיים מצלעותיו.



כלומר, בכל משולש מתקיים: $S_\Delta = \frac{ah}{2} \le \frac{ab}{2}$





מכאן: $S_1 \le \frac{ac}{2}\ ,\ S_2 \le \frac{bd}{2} \Rightarrow S = S_1 + S_2 \le \frac{ac+bd}{2}$

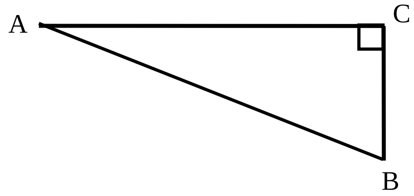
3.10 חוצה הזווית הישרה במשולש ישר זווית

סעיף זה מבוסס על : The College Mathematics Journal, Vol. 22, 1991, p. 420

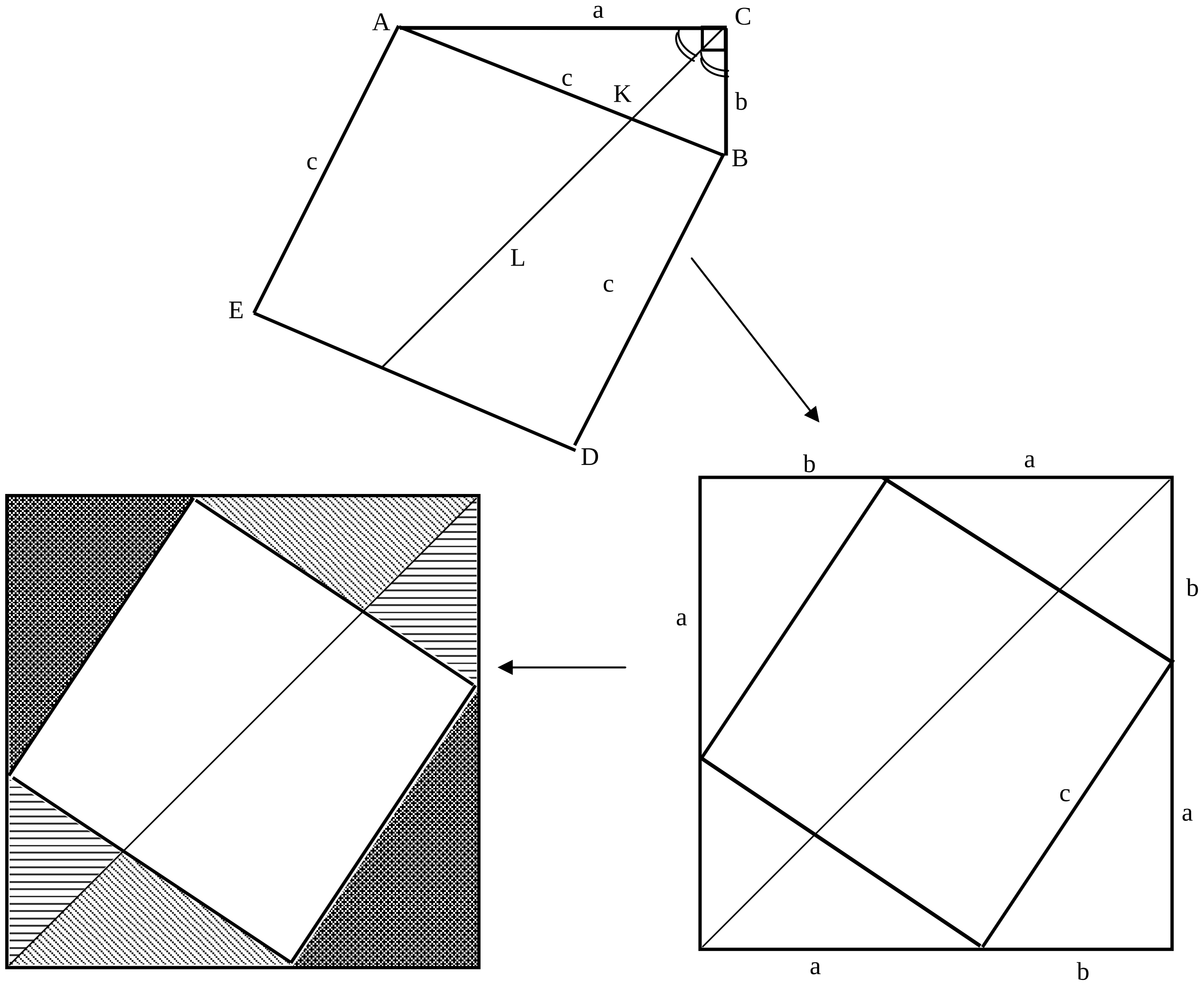
בסעיף זה נדגים הוכחה של המשפט הבא :
<u>משפט</u> : חוצה הזווית הישרה במשולש ישר זווית מחלק את הריבוע הבנוי על היתר לשני מרובעים חופפים.

ההוכחה שלהלן מבוססת על השלמה של הצורה הנתונה לריבוע גדול. ראיית הנתונים כחלק מצורה גדולה יותר מפשטת את ההוכחה.

נתון המשולש ABC :



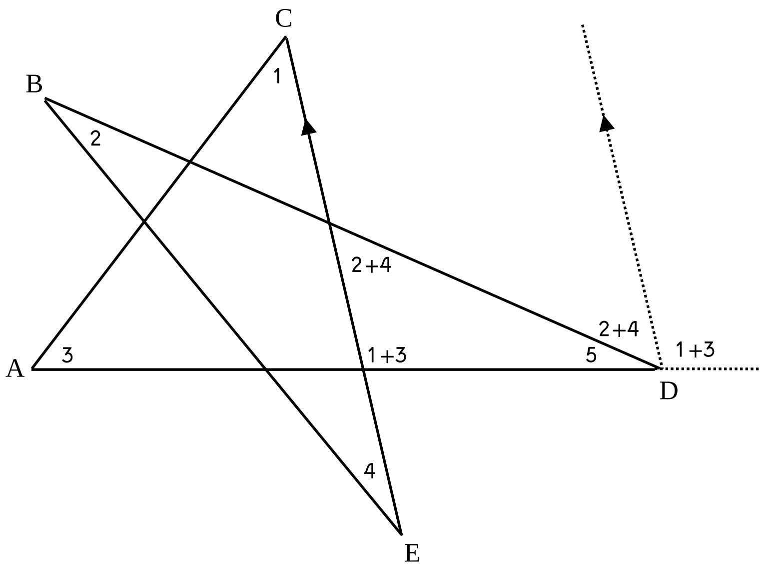
CL הוא חוצה הזווית הישרה.
עלינו להוכיח שהמרובעים : AELK ו- DLKB חופפים.



מכאן, ההמשך כבר מיידי. אפשר גם הפעם, בדומה להוכחה שבסעיף 3.9, לגזור את הריבוע הגדול לאורך האלכסון שלו. ע"י טרנספורמציות על מחצית הריבוע הזה, ניתן להרכיבו בחזרה באופן שהחפיפה תנבע משיקולי סימטריה. כדאי לנסות!

3.11 סכום זוויות הקודקוד (הפנימיות) בכוכב

סעיף זה מבוסס על: The College Mathematics Journal, Vol. 17, No. 4, September 1986, p. 338

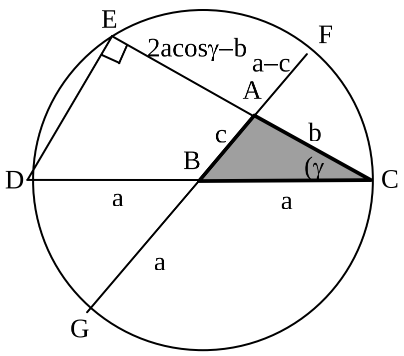


מכאן, סכום זוויות הקודקוד (הפנימיות) של כוכב הוא $180°$.

3.12 משפט הקוסינוסים

סעיף זה מבוסס על: Mathematics Magazine, Vol. 63, No. 5, December 1990

בציור נתון משולש ABC. יש להוכיח את משפט הקוסינוסים.
לשם כך, בונים מעגל שמרכזו ב- B ורדיוסו שווה ל- a.



מתקיים״: $EA \cdot AC = FA \cdot AG$

$$\Downarrow$$

$$(2a\cos\gamma - b)\cdot b = (a-c)(a+c)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

רצוי לתת את הדעת, באיזו מידה הוכחה זאת ניתנת להכללה, למשל, עבור המקרים: $a = c$; $a < c$.

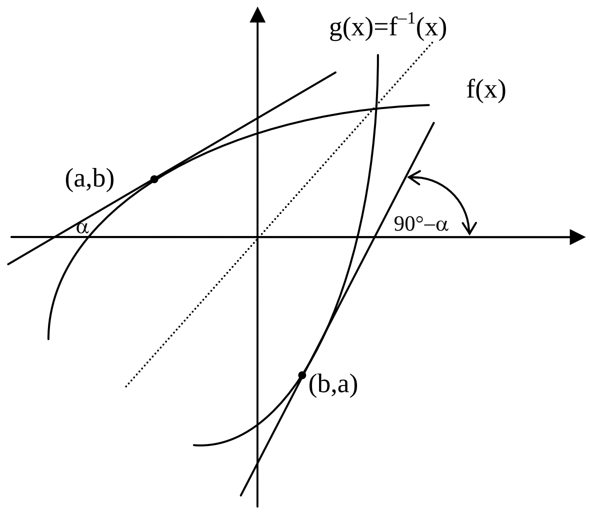
- במקרה ש- $a < c$ מבצעים את הבניה הנ״ל כאשר הרדיוס הוא c.
- במקרה ש- $a = c$ מבצעים את הבניה הנ״ל כאשר הרדיוס הוא b (ההוכחה לא תהייה תקפה אם $a = b = c$).

3.13 הנגזרת של פונקציה הפוכה

סעיף זה מבוסס על: Eisenberg & Dreyfus, 1991

הקשר בין הנגזרת של פונקציה לנגזרת של הפונקציה ההפוכה לה, נובע מהסימטריה של שני הגרפים ביחס לישר y=x, וכן מהמשמעות הגיאומטרית של הנגזרת, דהיינו, שיפוע המשיק. מכיון ששיפוע של קו ישר הוא טנגנס הזווית שהוא יוצר עם הכוון החיובי של ציר ה- x, מספיק לבדוק מהו הקשר בין שתי הזוויות שהמשיקים המתאימים יוצרים עם הציר. בציור הבא מופיע המידע הדרוש למציאת הקשר המבוקש:

כאשר: $f(a) = b$, $\left[f(a)\right]' = \dfrac{1}{\left[f^{-1}(b)\right]'}$



$$f'(a) = tg\alpha$$

$$g'(b) = tg(90° - \alpha) = ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{f'(a)}$$

מקורות

1. Barwise, J. & Etchemendy, E. (1991). Visual information and Vailld Reasoning. In W. Zimmermann, & S. Cunningham (eds.), Visualization in Teaching and Learning Mathematics, (pp. 9-24). Providence, RI: MAA Notes Series, Vol. 19.

2. Dreyfus, T. (1991). On the Status of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education. In F. Furinghetti (Ed.), Proceedings of the Fifteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education, (pp. 33-48), Assisi, Italy.

3. Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1989). Spatial Visualization in the Mathematics Curriculum Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol. 11, No. 1 (pp, 1-4).

4. Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the Reluctance to Visualize Mathematics. In W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds), Visualization in Teaching and Learning Mathemtics, (pp. 25-37). Providence, RI: MAA Notes Series, Vol. 19.

5. Eves, H. (1983). Great Moments in Mathematics Before 1650, The Mathematical Association of America.

6. Vinner, S. (1989). The Avoidance of Visual Consideration in Calculus Students. Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol. 11, No. 2 (pp. 149-156).

7. Student Math Notes, May 1986, p. 119, 120, 121.

8. Mathematics in School, September 1979, p. 15