הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

״קשר-חם״: ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תמטי

הנושא: **מה עשוי לקרות בנקודות ״חשודות״ של פונקציה**

הוכן ע״י: אלכס קופרמן.

תקציר: בחומר דוגמאות למקרים מיוחדים של התנהגות פונקציה בסביבת נקודות חשודות וטיפול במקרים אלה בהסתמך על משפטים מתמטיים מתאימים.

מילות מפתח: אנליזה, חשבון דיפרנציאלי, חדו״א, חקירת פונקציה, נקודות קיצון, נקודות חשודות, נקודות קריטיות, נגזרת.

החומר הוגש במסגרת: ״קשר-חם״ - בחיפה, סדנא ראשונה בשנה״ל תשנ״ד, נובמבר 1994.
״קשר-חם״ - בתל-אביב, סדנא ראשונה בשנה״ל תשנ״ד, דצמבר 1994.
״קשר-חם״ - בבאר-שבע, סדנא ראשונה בשנה״ל תשנ״ד, דצמבר 1994.

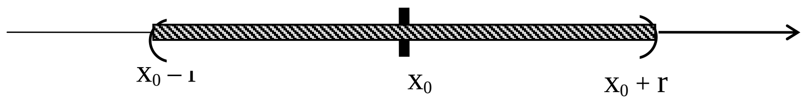
החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 7 עמודים.

מה עשוי לקרות בנקודות "חשודות" של פונקציה

להלן מספר דוגמאות להתנהגות חריגה של פונקציות בסביבת נקודות קריטיות (נקודות "חשודות"). דוגמאות אלה עשויות להביא להבנה עמוקה יותר של המושגים מקסימום ומינימום מקומיים ולמנוע מחלק מהתלמידים לפתח תפיסות שגויות הקשורות במושגים אלה.
תחילה נזכיר מספר הגדרות.

הגדרה מס' 1

תהי x_0 נקודה על ציר המספרים, ויהי $r > 0$ מספר ממשי חיובי. קבוצה של כל המספרים (הנקודות) x המקיימים את אי-השוויון : $x_0 - r < x < x_0 + r$ נקראת סביבה של x_0 ברדיוס r.
מבחינה גיאומטרית, קבוצה זו מהווה קטע פתוח וסימטרי ביחס לנקודה x_0.



ציור 1

<u>דוגמא</u>:

סביבה ברדיוס $r = \frac{1}{10}$ אשר מרכזה בנקודה $x_0 = 2$ ניתן לתאר בעזרת האי-שוויון
$2 - \frac{1}{10} < x < 2 + \frac{1}{10}$ או $|x - 2| < \frac{1}{10}$.

הגדרה מס' 2

נקודה x_0 נקראת נקודה פנימית של קטע I אם קיימת סביבה $x_0 - r < x < x_0 + r$, $(r > 0)$, אשר כולה מוכלת בתוך הקטע I.

<u>דוגמאות</u>:

א. בקטע $a < x < b$ כל נקודה x היא נקודה פנימית.
ב. בקטע $a \le x \le b$ נקודות הקצה $x = a$, $x = b$ אינן פנימיות.

הגדרה מס' 3

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע מסויים. נאמר כי ל- $f(x)$ יש מינימום מקומי (מקסימום מקומי) בנקודה x_0 אם קיימת סביבה $x_0 - r < x < x_0 + r$, $(r > 0)$, אשר בה מתקיים :
$f(x) \ge f(x_0)$ $(f(x) \le f(x_0))$ לכל x בסביבה זו. נקודה x_0 שהיא נקודת מינימום מקומי (נקודת מקסימום מקומי) נקראת נקודת קיצון מקומי או נקודת אקסטרמום מקומי של $f(x)$.

<u>הערה</u>: נקודות הקצה של $a \le x \le b$ אינן יכולות להיות לפי ההגדרה הנ"ל נקודות קיצון מקומי.

הגדרה מס' 4

תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע מסויים. נקודה פנימית x_0 נקראת נקודה קריטית ("חשודה") של $f(x)$ אם מתקיים <u>אחד</u> משני התנאים :

א. $f(x)$ אינה גזירה ב- x_0.
ב. $f'(x_0) = 0$.

<u>דוגמא - מקרה א׳</u>

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ המוגדרת לכל x. $f(x)>0$ לכל $x\neq 0$.

$f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. הנגזרת אינה מוגדרת כאשר $x_0=0$.

מכאן f(x) אינה גזירה ב- $x_0=0$ ולכן זוהי נקודה קריטית. $f(0)=0$ ולכל x: $f(x)\geq f(0)$. לכן בנקודה

$x_0=0$ יש מינימום מקומי ל- f(x).

<u>דוגמא - מקרה ב׳</u>

$f(x)=x^3$. פונקציה זו מוגדרת לכל x.

$f'(x)=3x^2$. לכן f(x) גזירה לכל x.

$f'(x)=0$ עבור $x_0=0$; $f(0)=0$.

עבור $x>0$ מתקיים $f(x)>f(0)$ ועבור $x<0$ מתקיים $f(x)>f(0)$. לכן בנקודה $x_0=0$ אין קיצון מקומי.

משפט 1 (תנאי מספיק לקיצון באמצעות הנגזרת הראשונה)

תהי f(x) מוגדרת בקטע מסויים, ותהי x_0 נקודה פנימית בקטע זה.

א. אם קיים $r>0$ כך שעבור $x_0-r<x<x_0$ מתקיים: $f'(x)<0$ ועבור $x_0<x<x_0+r$ מתקיים $f'(x)>0$ אזי בנקודה x_0 יש מינימום מקומי.

ב. אם קיים $r>0$ כך שעבור $x_0-r<x<x_0$ מתקיים: $f'(x)>0$ ועבור $x_0<x<x_0+r$ מתקיים $f'(x)<0$ אזי בנקודה x_0 יש מקסימום מקומי.

משפט 2 (תנאי מספיק לקיצון באמצעות הנגזרת השניה)

תהי f(x) מוגדרת בקטע מסויים, ותהי x_0 נקודה פנימית בקטע זה, עבורה מתקיים $f'(x_0)=0$.

א. אם $f''(x_0)>0$ אזי בנקודה x_0 יש ל- f (x) מינימום מקומי.

ב. אם $f''(x_0)<0$ אזי בנקודה x_0 יש ל- f (x) מקסימום מקומי.

<u>דוגמא 1</u>:

הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x^5}+5\cdot\sqrt[3]{x^2}$ מוגדרת לכל x.

$$f'(x)=\frac{5}{3}x^{2/3}+5\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{5\cdot(x+2)}{3\cdot\sqrt[3]{x}}\ ,\ (x\neq 0)$$

לכן ל- f(x) יש שתי נקודות ״חשודות״ $x_1=0$, $x_2=-2$ שהן בעלות אופי שונה. בנקודה $x_1=0$ הנגזרת לא קיימת, ובנקודה $x_2=-2$ הנגזרת מתאפסת $f'(-2)=0$.

x	$-\infty<x<-2$	-2	$-2<x<0$	0	$0<x<\infty$
$f'(x)$	+	0	-	לא מוגדר	+

מהטבלה הנ״ל ברור כי בנקודה $x_1=0$ יש מינימום מקומי ובנקודה $x_2=-2$ יש מקסימום מקומי.

האם ניתן לקבוע עובדות אלה באמצעות הנגזרת השניה?

<u>דוגמא 2</u> :

הפונקציה $f(x) = x \cdot e^{-x}$ מוגדרת לכל x.

$f'(x) = e^{-x} \cdot (1 - x)$, $f'(x) = 0$ עבור $x = 1$. לכן הנקודה $x_0 = 1$ היא "חשודה".

$f''(x) = e^{-x}(x - 2)$

$f''(1) < 0$

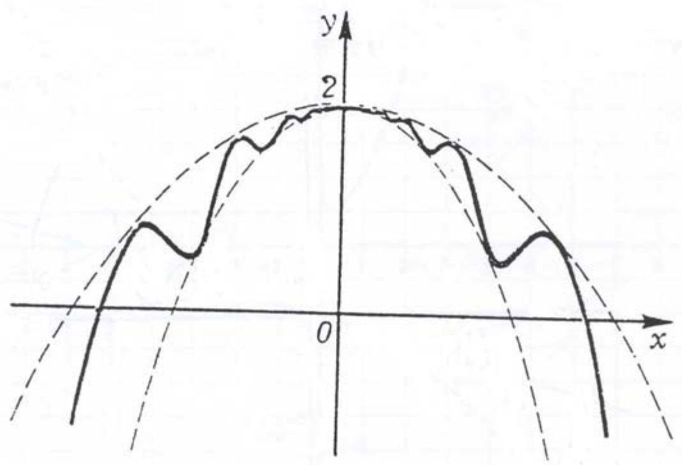
לכן בנקודה $x_0 = 1$ יש מקסימום מקומי.

<u>דוגמא 3</u> :

תהי $f(x)$ גזירה לכל x ממשי, ותהי x_0 נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$. האם תמיד קיימת סביבה $x_0 - r < x < x_0 + r$ כך שעבור $x_0 < x < x_0 + r$ מתקיים $f'(x) < 0$ ועבור $x_0 - r < x < x_0$ מתקיים $f'(x) > 0$?

כדי לענות על שאלה זו נתבונן בפונקציה :
$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

תאורה הגרפי של הפונקציה מופיע בציור 2.



ציור 2

תחילה נוכיח שהפונקציה רציפה בנקודה הבעייתית $x = 0$.

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left[2 - x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)\right] = 2 - \lim_{x\to0}\left[x^2\underbrace{\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)}_{\leq 3}\right] = 2 - 0 = 2 = f(0)$$

כי $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

ולכן הפונקציה רציפה ב- $x = 0$.

מתוך ההגדרה ברור כי בנקודה $x_0 = 0$ יש מקסימום מקומי ל- $f(x)$, כי $2 + \sin\frac{1}{x} \geq 1$

ולכן $2 - x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) \le 2$

עבור $x \neq 0$: $f'(x) = -2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) - x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -4x - 2x\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}$

לפי הגדרת הנגזרת (בעזרת גבולות) נקבל:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2-2h^2-h^2\sin\frac{1}{h}-2}{h} = \lim_{h\to 0}\left[-h\underbrace{\left(2+\sin\frac{1}{h}\right)}_{\le 3}\right] = 0$$

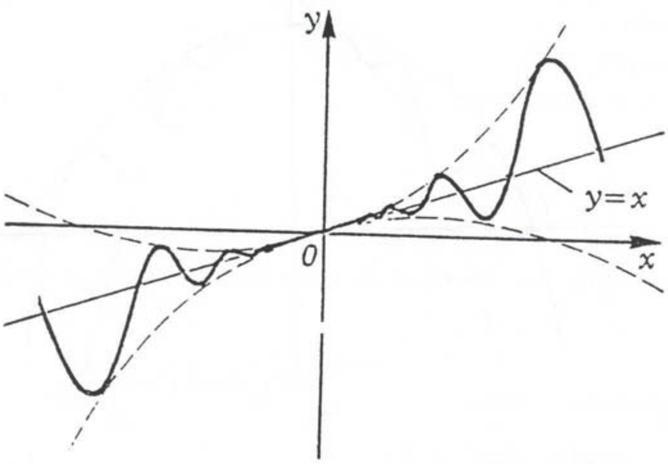
לכן הנקודה $x_0 = 0$ היא "חשודה".
בכל אחד מהקטעים $0 < x < r$, $-r < x < 0$, $f'(x)$ מחליפה את הסימן מ- (+) ל- (–) אינסוף פעמים. כי כאשר $x \to 0$ אזי הביטויים $-4x$ ו- $-2x\sin\frac{1}{x}$ שמופיעים בנגזרת שואפים לאפס והמחובר $\cos\frac{1}{x}$ משתנה בין ± 1 אינסוף פעמים $\left(-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1, -1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1\right)$. הסיבה לכך היא שבסביבת $x_0 = 0$ יש ל- $f(x)$ אינסוף נקודות קיצון אחרות.

<u>דוגמא 4</u>:
תהי $f(x)$ מוגדרת וגזירה לכל x. האם ייתכן שבכל סביבה של x_0 יש אינסוף נקודות קריטיות ל- $f(x)$ והנקודה x_0 עצמה אינה נקודה קריטית?

נתבונן בפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2\cos\frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

תאורה הגרפי של הפונקציה נתון בציור 3.



ציור 3

נוכיח שהפונקציה רציפה בנקודה $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0}\left(x+x^2\cos\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x^2}\right)=0+0=f(0)$$

כי $\quad -1\le\cos\frac{1}{x^2}\le 1$

עבור $x\neq 0$: $\quad f'(x)=1+\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}+2x\cos\frac{1}{x^2}$

לפי הגדרת הנגזרת (בעזרת גבולות) בנקודה $x=0$.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+h^2\cos\frac{1}{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(1+h\cdot\cos\frac{1}{h^2}\right)=1$$

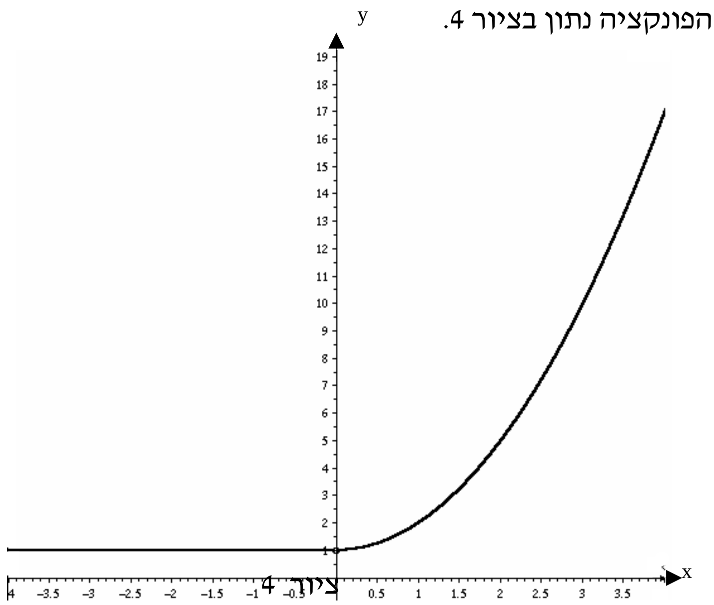
$f'(0)\neq 0$ ולכן $x_0=0$ אינה נקודה קריטית. בכל סביבה של $x_0=0$, $f'(x)$ משנה סימן מ- (+) ל- (–) אינסוף פעמים (מדוע?).

<u>דוגמא 5</u> :

תהי $f'(x)$ מוגדרת וגזירה לכל x, ותהי x_0 נקודת מינימום מקומי של $f(x)$. האם ייתכן שבכל סביבה $x_0-r<x<x_0+r$, עבור כל x : $x_0-r<x<x_0$ מתקיים : $f'(x)<0$, ועבור כל x : $x_0<x<x_0+r$, מתקיים $f'(x)>0$?

נתבון בפונקציה : $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & x\ge 0\\ 1 & x<0\end{cases}$.

תאורה הגרפי של הפונקציה נתון בציור 4.



ציור 4

עבור $x>0$, $\quad f'(x)=2x$ ולכן $f'(x)>0$

עבור $x<0$, $\quad f'(x)=0$

ו- $\quad f'(0)=0$

לכן בנקודה $(0,1)$ יש לפונקציה מינימום מקומי.

<u>תרגילים:</u>

לגבי כל אחת משלוש הפונקציות הבאות גלו איזו התנהגות חריגה מתקיימת בנקודה $x_0 = 0$?

.1
$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

.2
$$f(x)=\begin{cases}|x|\cdot\left(2+\cos\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

.3
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\cdot\sin\frac{1}{x} & x>0\\ 0 & x=0\\ \sqrt{-x} & x<0\end{cases}$$

<u>פתרונות:</u>

1. עבור $x \neq 0$
$$f'(x) = -\sin\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\cdot\sin\frac{1}{x}$$

ניקח רצף מספרים בסביבת $x = 0$:
$$\frac{1}{\pi},\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{3\pi},\ \frac{1}{4\pi},\dots,\frac{1}{k\pi},\dots\to 0$$

בנקודות אלה :
$$\sin\frac{1}{x} = \sin k\pi = 0$$

בין הנקודות האלה הפונקציה $\sin\frac{1}{x}$ מקבלת סימנים נגדיים. לכן $f'(x)$ משנה סימן מ- (+) ל-(-) אינסוף פעמים ולפונקציה יש אינסוף נקודות קיצון בסביבת הנקודה $x_0 = 0$.

בנקודות המינימום $f(x) = -1$, ובנקודות המקסימום $f'(x)=1$.

2. לפונקציה יש מינימום בנקודה $(0, 0)$ כי $2+\cos\frac{1}{x} > 0$ לכל $x \neq 0$, ולכן $f(x) > 0$ לכל $x \neq 0$.

הפונקציה זוגית ולכן מספיק להתבונן בתחום $0 \leq x$.

ונקבל:
$$f(x)=\begin{cases}x\cdot\left(2+\cos\frac{1}{x}\right) & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

עבור $x \neq 0$

$$f'(x) = 2 + \cos\frac{1}{x} + x\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = 2 + \cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$$

בקטע $0 < x < r$, $f'(x)$ מחליפה סימן מ- (+) ל- (-) אינסוף פעמים. לכן לפונקציה בסביבת $x_0 = 0$ יש אינסוף נקודות קיצון נוספות.

3. עבור $x < 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}} \cdot (-1) \quad \text{ו-} \quad f'(x) < 0$$

עבור $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x} + \sqrt{x}\cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 2x\cos\frac{1}{x}}{2x^2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x}}{2x\sqrt{x}}$$

עבור $x > 0$ הנגזרת מחליפה סימן אינסוף פעמים בכל סביבה $0 < x_0 < r$.
לכן הנקודה $x = 0$ אינה נקודת קיצון, אבל בצידה הימני יש אינסוף נקודות קיצון.