"קשר-חם" : לקידום שיפור ורענון החינוך המתימטי

הנושא: **מן ההיסטוריה של הקלקולוס**

הוכן ע"י: מיכאל רײנהרץ, ביה"ס הראלי העברי בחיפה.

תקציר: בחומר מובאות שיטות שונות מן ההיסטוריה של המתמטיקה למציאת משיק לעקום.

מילות מפתח: חשבון דיפרנציאלי, חשבון אינטיפיסימלי, גבול, משיק, נורמל, פונקציה, עקומה, נגזרת, גיאומטריה אנליטית, הנדסה אנליטית, שיפוע, קו ישר, מעגל, אליפסה, פרבולה, היסטוריה של המתמטיקה, אפולוניוס, פרמה, דקארט, ניוטון, ליבנייץ.

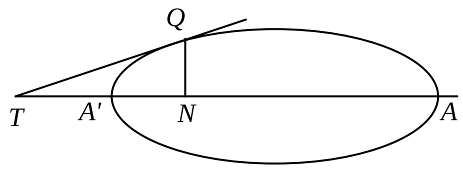
החומר הוגש במסגרת: בי"ס קיץ בנושא: שילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בהוראה, תשס"ד, 2004.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 7 עמודים.

מן ההיסטוריה של הקלקולוס

שרטוט המשיק לעקומה על פי הגיאומטריה האוקלידית

עד למאה ה-17 שלטה הגיאומטריה היוונית בכל תיאור הקשור למשיק ל"גרף" או לעקומה. כבר מתקופתו של אפולוניוס (262-190 לפנה"ס) היה ידוע כיצד לשרטט משיק לעקומה באופן מכני; לדוגמא, שרטוט של משיק לחרוט, או ליתר דיוק לחתך שלו על-ידי מישור, נעשה בעזרת חלוקה הרמונית של קטע.
במקרה של אליפסה:



מסמנים נקודה Q על העקומה, מורידים ממנה אנך לציר האליפסה AA' ומוצאים את הנקודה T על ישר זה המקיימת:

$$\frac{AT}{A'T}=\frac{AN}{NA'}$$

כלומר אפולוניוס קובע את הנקודה T שמחלקת את הקטע AA' מבחוץ כמו ש- N מחלקת את הקטע AA' מבפנים. אנו רואים, שההתייחסות למשיק הינה כאל ישר מסוים (שמשיק לעקומה) ואי-אפשר ליחס לו תכונות נוספות. אין חידוד של חשיבות המשיק, אלא רק זווית הסתכלות מיוחדת על-פיה למשיק יש קשר חיצוני לעקומה.

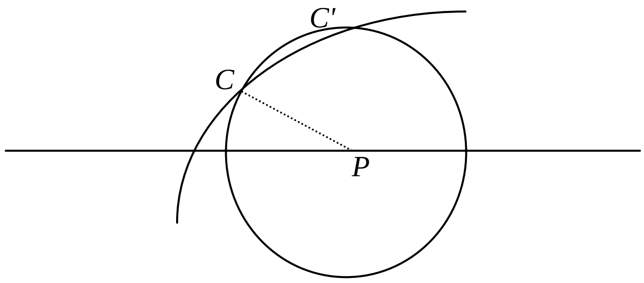
המשיק אצל פייר דה פרמה (1601-1665):

לפרמה הייתה ידועה העובדה שבנקודות הקיצון של עקומה למשיק יש שיפוע '0'.
הדרך לפיה הגיע פרמה למסקנה זו נשענת על שיטה שנקראת 'סינקריזם' ששוכללה על-ידו באופן הבא:
נסתכל לדוגמה במשוואה: $bx^2-x^3=c$, $b\neq 0$.
לכל c הקטן בערכו מן הערך המקסימאלי וגדול מהערך המינימאלי של הפונקציה: $f(x)=bx^2-x^3$, יהיו למשוואה לפחות שני שורשים. נסמנם: x ו-y.
על פי שיטה זו מתקיים: $bx^2-x^3=c$;
וגם: $by^2-y^3=c$;
מכאן נובע: $b(x^2-y^2)=x^3-y^3$.
נפרק את x^3-y^3 לגורמים, ונקבל: $b(x+y)=(x^2+xy+y^2)$ כאשר $x\neq y$.
אבל בנקודת המקסימום $x=y$.
לכן אם ידוע כי: $bx+by=x^3+xy+y^2$,
אז כאשר $x=y$ מקבלים: $2bx=3x^2$.
זוהי כידוע משוואה שקולה להשוואת הנגזרת של $f(x)$ לאפס באמצעים מודרניים.
יש בעייתיות רבה בשיטה אלגברית שכזו, כיוון שאנו מבצעים משחק כפול במשתנים x, y. מצד אחד השורשים x ו-y הם שונים ולכן מותר לחלק בגורם: $(x-y)$, מצד שני מספר שלבים לאחר מכן פרמה משווה ביניהם לצורך סיכום התרגיל. אין כאן מצב של התקרבות לאפס, של אחד

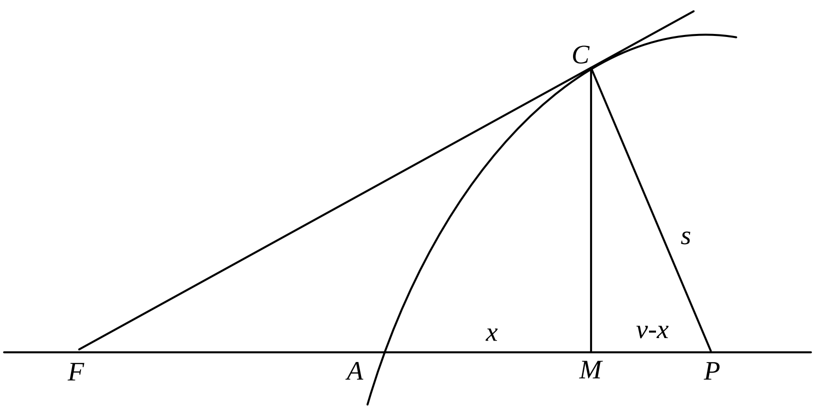
המשתנים אלא התקרבות לאפס של ההפרשים. כמו כן, אין בפיתוח הנ"ל התייחסות לגדלים אינפיניטסימאלים, למרות שאפשר לראותם 'מתחת לפני השטח' בעצם השאיפה של x ל-y. אולם יותר מכך, שיטה זו אינה לגיטימית מבחינה מתמטית לצורך מציאת נקודות קיצון, כי אם מהווה אינדיקאטור בלבד לקיומן של נקודות כאלה.

המשיק אצל רנה דיקארט 1596-1650

השיטה של דקארט למציאת משיק לעקומה מתבססת על מעגלים. לפי שיטתו צריך למצוא את המעגל 'המוצלח' ביותר שמרכזו על גבי ישר כלשהו, כך שאם נעביר מעגל דרך שתי נקודות שעל העקומה: C ו- C', קרובות ככל שניתן אזי הישר שיחבר ביניהן הוא המשיק המבוקש.



כלומר, המטרה היא מציאת משוואה של מעגל שמחבר בין שתי נקודות כאלה ומרכזו על הישר. בפישוט רעיונו של דיקארט לסימונים מודרניים וברורים יותר נקבל:



תהא CA עקומה ביחס לציר x. נסמן את AM באות x, ונניח כי העקומה מתוארת על ידי המשוואה האלגברית: $F(x,y)=0$.

נקבע $A(0,0)$ ו- $P(v,0)$ נקודת החיתוך של הנורמל לעקומה ב-C עם ציר ה-x. נסמן $PC=s$ ו- $CM=y$. על-פי משפט פיתגורס ב- ΔMPC נקבל: $s^2=y^2+(v-x)^2$

זוהי משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $(v,0)$, וממנה ניתן לבודד או את y: $y=\sqrt{(s^2-(v-x)^2}$, או את x: $x=v-\sqrt{(s^2-y^2)}$.

על-ידי בחירת המשוואה הנוחה לנו, ניתן לבטל את אחד הנעלמים במשוואה $F(x,y)=0$ המתארת את העקומה. על-ידי כך תיווצר אחת משתי המשוואות החדשות: $G(x,s,v)=0$, אם בחרנו את הביטוי עבור ה-y, או $H(y,s,v)=0$, אם בחרנו את הביטוי עבור ה-x. בכל מקרה נקבל, כי עבור ערך קבוע של v: הערכים השונים של s יוצרים <u>משפחה של מעגלים</u>- סביב P. אם CP הוא אכן הנורמל המבוקש, הערכים המתאימים של v ו-s יקבעו מעגל שיהיה משיק לעקומה

בנקודה C. לערכים אחרים ייווצרו מעגלים אחרים שלא ישיקו בנקודה אחת, אלא יפגעו בעקומה בשתי נקודות או שכלל לא יפגעו בה.

אם נרצה נוכל לבדוק את נכונות שיטתו של דיקארט ביחס למקרה הבא: נסתכל בפרבולה המתוארת על-ידי המשוואה: $y = x^2$ ובנקודה (x_0, x_0^2) שעליה. הנקודה על ציר ה-x היא $(v,0)$.

נציב את הנתונים כפי שמתואר לעיל: $s^2 = (x^2)^2 + (v-x)^2$;

נפתח סוגריים ונקבל: $0 = x^4 + v^2 - 2vx + x^2 - s^2$.

זוהי משוואה ממעלה רביעית ולכן צריך להשוותה למשוואה מהצורה: $(x-x_0)^2 q(x)$, בה $q(x)$ הוא פולינום ממעלה שניה, אותו ניתן לגלות על-ידי השוואת מקדמים.

כלומר נדרוש: $x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - s^2 = (x-x_0)^2(x^2 + ax + b)$

נפתח סוגריים ונכנס איברים בקבוצות באגף ימין ונקבל:

$$x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - s^2 = x^4 + (a - 2x_0)x^3 + (b - 2x_0 a + x_0^2)x^2 + (ax_0^2 - 2bx_0)x + bx_0^2$$

על ידי השוואת מקדמים נגיע למסקנות הבאות:

1) אין ביטוי עם x^3 באגף שמאל לכן: $a - 2x_0 = 0$

2) לביטוי עם x^2 שבאגף שמאל יש מקדם '1' לכן: $b - 2x_0 a + x_0^2 = 1$

3) לביטוי עם ה-x : $ax_0^2 - 2bx_0 = -2v$

4) ולבסוף לגבי האיבר החופשי: $bx_0^2 = v^2 - s^2$

עבור שלוש המשוואות הראשונות, אם: $a = 2x_0$, אז: $b = 2ax_0 - x_0^2 + 1$.

נציבן במשוואה השלישית ונקבל: $2x_0^3 - 2x_0(2ax_0 - x_0^2 + 1) = -2v$,

כיוון שהביטוי שבתוך הסוגריים שווה בערכו ל-b, וידוע ש: $a = 2x_0$ נבצע את ההצבה ונקבל:

$$b = 1 + 2x_0 \cdot 2x_0 - x_0^2 \quad \leftarrow \quad b = 1 + 4x_0^2 - x_0^2 \quad \leftarrow \quad b = 1 + 3x_0^2 \ .$$

עם הנתון החדש הזה נחזור להצבתנו במשוואה השלישית:

$$2x_0 \times x_0^2 - 2x_0(1 + 3x_0^2) = -2v$$
$$2x_0^3 - 2x_0 - 6x_0^3 = -2v$$
$$-4x_0^3 - 2x_0 = -2v$$

נחלק ב-(-2) : $2x_0^3 + x_0 = v$

זהו מיקומה של הנקודה v על ציר ה-x. כאשר x_0 ידוע, ניתן בקלות לאתר את מיקום הנקודה v שמסביבה ייבנה המעגל שיפגע בגרף הפרבולה $y = x^2$ בנקודה אחת בלבד. את הנקודה הזו ניתן יהיה לחבר עם הנקודה P ששיעוריה הם $(v,0)$ וליצור את הנורמל לעקומה. אז באופן מידי ניצור גם את המשיק למעגל, שהוא גם המשיק לעקומה בנקודה x_0. הערך של שיפועו הוא הופכי ונגדי לשיפוע של הנורמל! יש לציין שדיקארט כלל לא היה מודע לעובדה זו. אותו עניינה מציאת הנורמל בלבד. הרגישות לעניין המשיק הייתה משנית למרות שריחפה באוויר כל העת.

על-פי נוסחת השיפוע בין שתי נקודות במישור $\left[\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}\right]$, נחשב את השיפוע בין הנקודה $(v,0)$ לנקודה (x_0, x_0^2) שעל גרף הפרבולה $y = x^2$.

בהצבה שלנו נקבל:

$$\frac{(0 - x_0^2)}{(v - x_0)} = \frac{-x_0^2}{(v - x_0)}$$

כיוון שמצאנו קודם ש: $v = 2x_0^3 + x_0$ נחזור ונציב בנוסחת השיפוע ונקבל:

$$\frac{-x_0^2}{(2x_0^3+x_0-x_0)}=\frac{-x_0^2}{2x_0^3}=\frac{-1}{2x_0}$$

כך, אם שיפוע הנורמל הוא $\frac{-1}{2x_0}$, אזי שיפוע המשיק הוא הופכי ונגדי לערך זה, כלומר, $2x_0$. זהו כידוע שיפוע המשיק לפרבולה זו בנקודה x_0 כלשהי.

לצורך הדגמת השיטה: נסו למצוא את משוואת המעגל המשיק לגרף הפרבולה $y=x^2$ בנקודה בה: $x=2$ על פי התהליך של דיקארט.

המשיק אצל איזאק ניוטון (1642-1727)

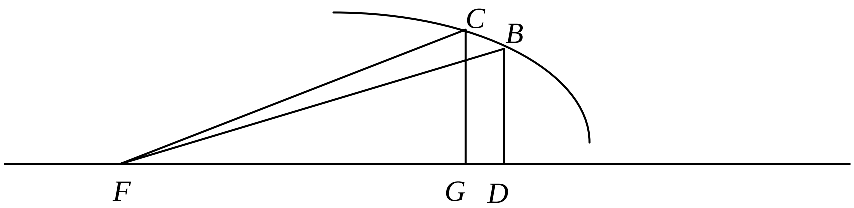
פיתוח המשיק אצל ניוטון התרחש בשלבים.

שלב א – פיתוח הבינום:

ניוטון, על-פי התכתבויותיו, פיתח את נוסחת הבינום כבר בשנת 1664. הוא מתאר פיתוח זה בפרוט במכתבו לאולדנבורג באוקטובר 1676. אולדנבורג העבירו ללייבניץ: הרעיון המרכזי הוא בהצגת הביטוי הפונקציונאלי על-ידי טורים שמתכנסים, בדרך כלל על ידי טור מתכנס יחיד.

שלב ב – פיתוח הקלקולוס:

ניוטון מגדיר את הנגזרת בשונה מן המקובל היום. מבחינתו, בכל מקרה קיים גורם של זמן מתמיד שמבוטא באמצעות הקו הישר. העקומה היא סטייה מן הזמן המתמיד. מציאת המשיק לעקומה מתבססת על העברת ישרים מנקודה כלשהי על גבי הישר וחישוב מנת ההפרשים בין ערכי ה-y לערכי ה-x. בציור מודגם התהליך על העקומה של: $y=\sqrt{rx}$.



ניוטון שולח ישרים מנקודה F אשר מחוץ לעקומה שפוגעים בה בנקודות B ו-C. מהן הוא מוריד אנכים לציר הקבוע. רק אז הוא בודק מהו היחס בין אורכי הקטעים CG ו-BD כאשר המרחק בין G ל-D הולך וקטן. הוא מציג עמדה לפיה קווים נוצרים על-ידי נקודות בתנועה, שיטה זו מכונה:
THE METHOD OF PRIME AND ULTIMTIVE "RATIOS"

הנגזרת, על-פי שיטה זו, היא בעצם היחס הראשוני של התוספות המתהוות. לפי ניוטון:

> "אני מחשיב כמויות מתמטיות לא כמורכבות מחלקים קטנים, אלא על-ידי תנועה נמשכת של נקודות, כך נוצרים ישרים – זה קורה כאשר הדברים מתהווים ונראים יום-יום בתנועת הגופים, לכן אם נתחשב בכמויות אלה בעת גדילתן או הקטנתן בהתאם למהירות הווקטורים בזמן נתון, אני חשבתי על שיטה לקביעת כמויות אלה מהמהירויות של התנועות (או התוספות) מהיכן שהן נוצרות, ולקרוא למהירויות אלה של התנועות:
> FLUXIONS –שטפים, והכמויות שנוצרות – FLUENTS, אני גיליתי שיטה זו בשנים 1665-1666".

ניוטון מדבר כאן על ה-FLUXIONS כנגזרות ביחס לזמן של ה-FLUENTS שאלו הם המשתנים. שטפים אלה הם התוספות שנוצרות כאשר ה'זרם' נוצר, והם מהווים את היחס הראשוני של התוספות שמתהוות.

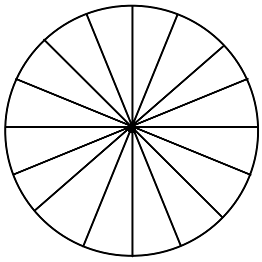
פיתוחו של לייבניץ

חשיבתו המתמטית של לייבניץ הושפעה ממספר רעיונות חשובים של קודמיו:

I. גלילאו גליליאי – שתרומתו העיקרית למדע היא הכנסת המתמטיקה לצורך חישובים פיזיקאליים, קבע אמת נוספת, או יותר נכון גישה מקורית שעיקריה סייעו מאד ללייבניץ לפתח את הקלקולוס שלו מאוחר יותר. גלילאו הניח *שקו* יכול להיחשב כאוסף אינסופי של נקודות; *משטח* – כאוסף אינסופי של קווים מקבילים *ונפח* – כאוסף אינסופי של משטחים.

II. יוהנס קפלר – גרס ששטחים מורכבים מאינסוף משולשים עם מרכז אחד. קל לדמיין טענה זו כאשר חושבים על מעגל.

שיטה זו סייעה לו בחישובי שטחים, כמו בדוגמא של המעגל:



המרכז ידוע; המרחק בין שתי נקודות B_1, B_2 למשל, שעל המעגל הוא קטן באופן אינפיניטסימאלי. כך, ניתן לחשב בעזרת אינטגרציה פרימיטיבית (כלומר, ע"י חישוב שטחי משולשים) מהו שטח המעגל. אם נתייחס למעגל ולשטחו כאל אוסף משולשים ישרי זווית, שטח המעגל יהיה מורכב משטחי המשולשים הבאים:

$$\frac{B_1 \cdot r}{2} + \frac{B_2 \cdot r}{2} + ... + \frac{B_n \cdot r}{2} = \frac{r}{2}(B_1 + B_2 + ...B_n)$$ כאשר סכומי הקטעים $B_1 + ... + B_n$ הם

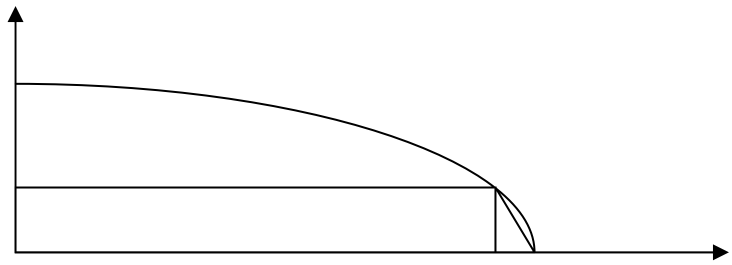
בדיוק היקף המעגל C ואז השטח הוא כבנוסחה הידועה $\frac{r}{2} \cdot C$. כלומר, תרומתו של קפלר נעוצה בהכנסת גדלים אינפיניטסימאליים לתוך הוכחות גיאומטריות.

III. בלייז פסקל – מכל כתביו של פסקל, מה שהשפיע רבות, לדעתי, על לייבניץ ביצירת הקלקולוס שלו היה הלגיטימציה שפסקל נתן לרעיון של סידרת הפרשים יורדת במשולש ההרמוני, בו כל גורם שאינו נמצא בשורה הראשונה הוא ההפרש בין שני הגורמים שמעליו. כיוון שלייבניץ עבד עם סדרות יורדות וסכומיהן, הרעיון שבמשולש ההרמוני סייע לו רבות.

IV. אייזאק בארו – בדיוק כשם שהוא היה אביו הרוחני של ניוטון כך גם לייבניץ הושפע רבות מקריאת כתביו. הרעיון של שימוש בגדלים אינפיניטסימאלים קטנים והוכחות באמצעות דמיון משולשים, נטע ביטחון בלייבניץ לפתח קלקולוס שמבוסס על השימוש בגדלים אלה.

ייחודיותו של פיתוח הקלקולוס על ידי לייבניץ נעוצה ביכולתו לשלב רעיונות לוגיים לכלל רעיון חדש ומקורי. כלומר, לא רצף של שיטות ויזואליות מנחות אותו, אלא עקרונות כללים שבשילובם יחד ניתן ליצור קלקולוס חדש. במכתבו של לייבניץ לאולדנבורג מ- 21.6.1677 הוא כותב:

"... זה זמן רב שאני מנסה לפתח דרך כללית שמקורה בהפרשי הרכיבים והיחס ביניהם... מציאת המשיק הינו קץ התהליך של הסתכלות במשולש קטן והולך..."



על-פי גלילאו וקפלר, העקומה AC_1C_2 הינה אוסף אינסופי של נקודות, ואילו לייבניץ גורס שאם נחברן נוכל להתייחס לעקומה כאל מצולע בעל מספר אינסופי של צלעות. לכן, בסופו של דבר ניתן להסתכל על המשולש ΔDC_1C_2 כהולך וקטן עד אשר בגודל קטן באופן אינפיניטסימאלי, היתר של המשולש C_1C_2 מתקרב לעקומה עד כדי התלכדות עמה. כך גודל המשולש ישאף לאפס ושיפוע היתר יהיה גם שיפוע המשיק.

כלומר, לייבניץ רואה את כל התהליך של בניית המשיק כ'תהליך פנימי' של העקומה, וזאת לעומת ניוטון ודיקארט ובארו ופרמה, שרואים את התהליך מ'בחוץ'. בשתי הדרכים מגיעים לאותה תוצאה, אולם מידת הסרבול בשיטתו של לייבניץ פשוטה לאין ערוך משיטות החישוב אצל האחרים. ניוטון אינו מגיע לרמת ההכללה בדרך החישוב שלו, אלא רק לאחר מקבץ חישובים מייגעים. אצלו, הנגזרת היא עניין נקודתי. אצל לייבניץ יש מיקוד בעבודה בעזרת סימונים שהוא פיתח.

כיוון שהפרשנות שלו לגבי הקלקולוס הינה כאל סדרת ערכים יורדת, רעיון אותו הוא שאב מפסקל, יש הגיון לייצוג משתנים ששואפים לאפס וכך לעבור לרמת ההכללה. בעוד שניוטון עובד נקודתית על גבי גרף העקומה, לייבניץ מעבד את הנוסחה הראשית שמתארת את העקומה ועל-ידי כך הוא מגיע לנוסחה שמתארת את הנגזרת בקלות רבה יותר. כאשר הוא מגיע לנוסחה, הוא לא צריך לחשב בכל פעם מחדש מהו ערך הנגזרת, אלא, הוא מציב את ערך ה-x בנוסחה שהוא פיתח ומגלה מהו ערך הנגזרת באותה נקודה.

מכיוון שלייבניץ מתעסק בסדרות והפרשים אינפיניטסימאלים קטנים, הוא יכול לחשוב על כיוון של יצירת אלגוריתם שחושף את חוקיות הסדרות. זאת לעומת ניוטון שחושב ורואה את הגרף כסטייה ממצב יחיד, כלומר סטייה מן הזמן המתמיד. לכן, בכל פעם צריך לחשב הכל מן ההתחלה, אין אלגוריתם, אלא חישוב הסטייה מן הזמן המתמיד.

ייחודיותו של הפיתוח של לייבניץ נעוצה בשילוב גורמים שאפשרו ראיה אינפיניטסימאלית והתכנסות סדרות. שילוב זה מושלך אל עבר פתרון בעיית המשיק על-ידי יכולת ליצור אלגורית. המתודיקה של לייבניץ היא מתודיקה דיפרנציאלית. עצם הסתכלותו על העקומה כצלעון אינסופי מסייעת לו לפתור את הבעיה המתמטית שלפניו, דהיינו, מציאת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה נתונה על-ידי שימוש בגדלים אינפיניטסימאלים שמאפשרים גיבוש נוסחאות כלליות יותר לדיפרנציאציה ואינטגרציה. אין לו צורך ביחס ראשוני ואולטימטיבי כמו אצל ניוטון, אלא הכללת נוסחת השיפוע בין שתי נקודות במקרה של קו ישר, לנוסחת שיפועים שבה קיים גודל אינפיניטסימאלי ששואף לאפס.

בזה מתבטא "המעוף הלוגי" של לייבניץ. הוא משלב בין דברים שלכאורה אינם נראים קשורים זה לזה: הרעיון של חישוב מנת ההפרשים בין ערכי ה-y לערכי ה-x שמשלבים את תפקיד היתר במשולש האינסופי הקטן יחד עם הגדרת הנגזרת כמשיק לגרף העקומה בנקודה נתונה.

מציאת היתר במשולש האינסופי הקטן שקולה במצב אינפיניטסימאלי להעברת משיק לעקומה באותה נקודה, ובה גודלו של היתר במשולש האינסופי הקטן שואף לאפס.

<u>רשימה ביבליוגרפית:</u>

אונגרו ש. (1989). *מבוא לתולדות המתימטיקה*, חלק ב, האוניברסיטה המשודרת. עמודים 42-66.

ברגמן ש.ה. (1990). *תולדות הפילוסופיה החדשה*, מניקולאס קוזאנוס עד תקופת ההשכלה, ביאליק. עמודים 382-419.

לייבניץ. (1984). *השיטה החדשה*, הוצאת מגנס.

Alexander H.G. (1970). *The LEIBNIZ-CLARKE, Correspondence*, Manchester Univ. Press.

Arthur R.T.W.(1995). *NEWTON'S Fluxion and Equably Flowing Time*, In Studies of History and Philosophy of Science, No.2 in Vol.26, PP. 323-351.

Barrow I . (1976). *LECTIONES GEOMETRICAE*, G.Olms Pub.

Baron M.E. (1969). *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Pregamon Press, Ch. 7.

Baumgardt C. (1951). *Johanes Kepler,Life and Letters*, Philosophical Library, N.Y.

Bell,E.T. (1937). *Men of Mathematics* , Simon & Schuste, N.Y.

Bertoloni-Meli D. (1993). *Equivalence & Priority*, Clarendon Press, Oxford. PP. 6-73.

Boyer C.B. (1968). *A History of Mathematics*, Wiley & Sons Inc.

Boyer C.B. (1949). *The History Of the Calculus and it's Conceptual Development*, Dover Pub. PP.187-223

Broad C.P. (1964). *Leibniz's Last Controversy With the Newtonias*, in Thoria, Vol.12, No.3. PP.143-168.

Brophy J. (1962). *The Achivements of Galileo*, College Press, New-Haven.

Child J.M. (1920). *The Early Mathematical Manuscripts Of Leibniz*, Open Court Pub.
Ch.3, PP.22-58.

De Gandt F .(1995). *Force and Geometry in Newton's Principia*, Princeton Univ. Press, PP.159-165, 208-231.

Descartes R. (1925). *The Geometry of Re'ne' Descartes*, Open Court Pub.

Hall A.R. (1963). *From Galileo to Newton 1630-1720* , Collins pub, PP. 82-92.

Hall A.R. (1980). *Philosophers At War*, Cambridge Univ. Press.

Hill A. (1683). *Some Accounts of the Life of Dr. I. Barrow*.

Katz V. J. (1993). *A History of Mathematics* , Collins Pub.

Kline M. (1972). *Mathematical Thought From Ancient To Modern Times* , Oxford Univ. Press. PP. 342-349.

Latta R. (1948). *Leibniz-The Monadology*, Oxford Univ. Press.

Jolley n. (1995). *Leibniz*, Cambridge Univ. Press. PP. 18-43.

Mahoney M.S..(1994). *The Mathematical Career of Pie'rre De Fermat (1601-1665)* , Princeton Univ. Press, New Jersey, Ch. 4.

Meyer R.W. (1952). *Leibniz and the 17 th. Century Revolution*, Henry Regnery Company, Chicago.

Newton I.(1999). *Principia Mathematica*, PP.9-39

Scriba C.J. (1962-1966). The Inverse Method of Tangents , PP.113-134, In Trusdell C.,
Archive For History Of Exact Science , Vol. 2.

Turnbull H.W.(1945). *The Mathematical Discoveries of Newton*, Blackie & sons Lim. PP.2-33.

Turnbull H.W.(1959-1977). *The Correspondence of Isaac Newton*, Cambridge Univ. Press.Vol. 2.
PP.130-161, 219-230.

Wallace W.A. (1984). *Galileo and His Sources*, Princeton Univ. Press.

Whiteside D.T. (1976). *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Cambridge Univ. Press. Vol.1, PP.234-321,Vol.8,PP.92-159.

Wilson N.L.,(1998). *The Leibniz-Clarke Correspondence*, PP.189-206.