הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

"קשר-חם": לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי

הנושא: שימושים לרקורסיה (לא בסדרות)

הוכן ע"י: אורי רימון

תקציר: בחומר מובאים שימושים בשיטת הרקורסיה למציאת נוסחאות שונות בתחום הקומבינטוריקה, פולינום טיילור, גיאומטריה, חישוב π .

מילות מפתח: אלגברה, קומבינטוריקה, גיאומטריה, הנדסה, גיאומטרית המישור, הנדסת המישור, טור טיילור, רקורסיה, נוסחת נסיגה, קבוצות חלקיות, תמורות, בניות, חישוב π, מעגל, מצולע, ניקולאוס קוזאנוס.

החומר הוגש במסגרת: "קשר חם" בחיפה, סדנא שלישית בשנה"ל תשנ"ה, ינואר 1995.
"קשר חם" בתל-אביב, סדנא שלישית בשנה"ל תשנ"ה, פברואר 1995.
"קשר חם" בבאר-שבע, סדנא שלישית בשנה"ל תשנ"ה, פברואר 1995.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 8 עמודים.

שימושים לרקורסיה (לא בסדרות)

בתוכנית הלימודים במתמטיקה, ברמה של 4-5 יח"ל, מופיע מושג הרקורסיה במסגרת לימוד פרק הסדרות והאינדוקציה.
הנסיון מראה, שהנושא אהוב על התלמידים, ולפחות ברמה של 5 יח"ל אין קשיים מיוחדים בהוראתו.

לאחר שהתלמיד קלט את משמעות מושג הרקורסיה וגם רכש מיומנות בתהליכים רקורסיבים (פרק הסדרות) ניתן לנצל ולהרחיב את השימוש במושג זה גם לפרקי מתמטיקה נוספים. יש נושאים שבהם הלימוד באמצעות רקורסיה פשוט יותר מהבחינה המתמטית ולפעמים קל יותר להבנה משיקולים דידקטיים.

להלן יובאו מספר דוגמאות. הנושאים לקוחים מתוכנית הלימודים או מפרקי העשרה הקשורים בתוכנית.

1. **קומבינטוריקה**

א. <u>מספר הקבוצות החלקיות של קבוצה בת n איברים</u>

תהי $A_n = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ קבוצה בת n איברים. נסמן ב- b_n את מספר הקבוצות החלקיות של A_n. כדי לבנות כלל נסיגה, נתחיל בדוגמאות.

$n = 1$ הקבוצות החלקיות של $A_1 = \{a_1\}$ הן: $\phi, \{a_1\}$ ולכן $b_1 = 2$

$n = 2$ הקבוצות החלקיות של A_2 הן:

$\phi, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$

שתי הקבוצות הראשונות הן הקבוצות החלקיות של A_1. שתי הקבוצות הנותרות התקבלו מהקבוצות החלקיות של A_1 שלכל אחת הוספנו את a_2. מכאן $b_2 = 2 \cdot b_1$.

נחשב עתה את b_{n+1} באמצעות b_n.

נבנה את הקבוצות החלקיות של $A_{n+1} = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}\}$ בשני שלבים:

<u>שלב א'</u>: כל הקבוצות החלקיות של $A_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ מספרן b_n (כל קבוצה חלקית מופיעה בדיוק פעם אחת).

<u>שלב ב'</u>: הקבוצות החלקיות שהופיעו בשלב א' כשלכל אחת מהן מוסיפים את a_{n+1}.

הערה: בכתה מומלץ להקדים למקרה הכללי מקרה פרטי נוסף למשל $n = 3$.

בכל אחד מהשלבים שתארנו יש b_n קבוצות חלקיות. אפשר להוכיח כי בשיטה שבנינו מופיעות כל הקבוצות החלקיות של A_{n+1} וכל הקבוצות החלקיות שונות זו מזו.

מכאן $b_{n+1} = 2b_n$. b_n היא לכן סדרה הנדסית שמנתה $q = 2$ ואיברה הראשון $b_1 = 2$

ולכן $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

ב. <u>תמורות (בלי חזרות)</u>

נסמן ב P_n את מספר התמורות האפשריות של n עצמים שונים $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$.

נתחיל בדוגמאות.

$n = 2$ התמורות הן a_1, a_2

a_2, a_1

ולכן $P_2 = 2$

$n=3$ נבנה את התמורות של a_1,a_2,a_3 בשלבים.

שלב א': נבנה את התמורות כאשר a_1 ראשון. נרשום תמורות אלו בקיצור כך:

$$a_1 \begin{cases} a_2,\ a_3 \\ a_3, a_2 \end{cases}$$

שלב ב': התמורות כאשר a_2 ראשון:

$$a_2 \begin{cases} a_1,\ a_3 \\ a_3,\ a_1 \end{cases}$$

שלב ג': התמורות כאשר a_3 ראשון:

$$a_3 \begin{cases} a_1,\ a_2 \\ a_2,\ a_1 \end{cases}$$

קיבלנו בדרך זו את כל התמורות האפשריות של שלושה עצמים ואין שתי תמורות שוות.
שימו לב כי בכל שלב מופיעות בדיוק $P_2=2$ תמורות (מספרן כמספר התמורות של שני העצמים הנותרים). לכן: $P_3=3\cdot P_2=6$
בצורה דומה נביע את P_{n+1} באמצעות P_n.

נבנה את התמורות של $n+1$ העצמים $a_1,a_2,a_3,...,a_n,a_{n+1}$ בשלבים.
נתחיל בתמורות שהעצם הראשון הוא a_1. את n העצמים הנותרים נוכל לסדר ב- P_n אופנים, ולכן יש p_n תמורות של $n+1$ עצמים שהראשון הוא a_1.

נעבור עתה לתמורות שהעצם הראשון בהן a_2. גם כאן נותרו n עצמים לסידור ועל כן מספר התמורות של $n+1$ עצמים שהראשון בהם a_2, אף הוא P_n. כך נמשיך הלאה עד שנגיע ל- a_{n+1}. יש P_n תמורות שהעצם הראשון בהן a_{n+1}.

בדרך הבניה כללנו את כל התמורות האפשריות של $n+1$ עצמים, כי כל תמורה הרי מתחילה באחד העצמים a_3,a_2,a_1 וכו'. כמו כן התמורות שונות זו מזו, כי אם הן מתחילות באותו עצם, למשל a_5, הן נבדלות בסידור n העצמים הנותרים, ואם הן מתחילות בעצמים שונים הן בוודאי שונות.

נסכם:
יש P_n תמורות של $n+1$ עצמים שהראשון הוא a_1
יש P_n תמורות של $n+1$ עצמים שהראשון הוא a_2
יש P_n תמורות של $n+1$ עצמים שהראשון הוא a_3
. . . .
. . . .
. . . .
יש P_n תמורות של $n+1$ עצמים שהראשון הוא a_{n+1}.

אלו הן כל התמורות של $n+1$ עצמים והן שונות זו מזו על כן $P_{n+1}=(n+1)P_n$

אם $n>1$ נוכל לרשום את כלל הנסיגה כך:

$$P_n = n \cdot P_{n-1}$$

מכיוון ש- $P_1 = 1$ נוכל להגיע בשימוש חוזר של כלל הנסיגה (או באינדוקציה)

למסקנה כי: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

ג. בגן חיות מסודרים n כלובים בשורה אופקית. יש להכניס לתוך הכלובים שני אריות שלא ניתן להבחין ביניהם. בכמה אופנים ניתן לעשות זאת בתנאי שהאריות לא ימצאו באותו כלוב או בכלובים סמוכים?

התרה: נסמן ב- $L(n)$ את מספר האפשרויות. כמובן ש- $L(n)$ מוגדר רק עבור $n \ge 3$. כאשר $n=3$ אפשר להכניס את האריות רק לכלוב הראשון והאחרון ולכן $L(3)=1$ (אין חשיבות לסדר!). כאשר $n>3$ כלל הנסיגה:

$$L(n) = L(n-1) + L(n-2)$$

הסבר: אם האריה האחד לא נמצא בכלוב שהוספנו אז יש $L(n-1)$ אפשרויות. ואם הוא נמצא בכלוב שהוספנו, אז את האריה השני אפשר לשים ב- $(n-2)$ כלובים אחרים,

כשהכלוב הקרוב לכלוב שהוספנו חייב להישאר ריק.

נמצא תבנית ל $L(n)$

$$L(n) - L(n-1) = n-2$$

$$L(n-1) - L(n-2) = n-3$$

$$\vdots$$

$$L(4) - L(3) = 2$$

נחבר את האגפים:

$$L(n) - L(3) = (n-2) + (n-3) + \ldots + 3 + 2$$

$$L(n) = L(3) + \frac{n(n-3)}{2} = 1 + \frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

ד. נתונים n ישרים במישור. לכמה אזורים יחלקו הישרים את המישור, אם כל שני ישרים נחתכים, אבל אף שלושה ישרים אינם נפגשים בנקודה אחת?

התרה: נסמן ב- a_n את מספר האזורים אשר נוצרים על-ידי n ישרים. כמובן ש- $a_1 = 2$.

נניח ש- a_{n-1} ידוע. הישר ה- n חותך את כל $n-1$ הישרים, וכיוון שאף שלושה לא נחתכים בנקודה אחת הישר ה- n מתחלק על ידי נקודות החיתוך עם $n-1$ הישרים ל-n קטעים (ליתר דיוק $n-2$ קטעים ושתי קרנים). כל אחד מהקטעים (או מהקרנים) מחלק אזור קודם לשני אזורים. ולכן

$$a_n = a_{n-1} + n$$

בדיון דומה לתרגיל ג' אפשר למצוא תבנית ל- a_n.

ה. מהו מספר האזורים הנוצרים במישור על ידי n מעגלים, שכל אחד מהם נחתך עם כל אחד אחר, ואף שלושה מעגלים אינם נחתכים בנקודה אחת?

הוכיחו כי נוסחת הנסיגה היא: $a_{n+1} = a_n + 2n$

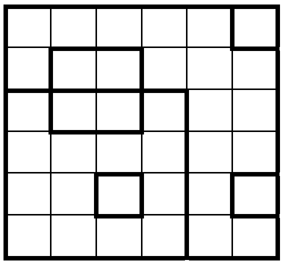
ו. אדם צריך לעלות n מדרגות. הוא עושה זאת בשלבים. בכל שלב הוא רשאי לעלות למדרגה הבאה, או לדלג על מספר מדרגות כרצונו. מסמנים ב- a_n את מספר האופנים שבהם הוא יכול לבצע את המשימה.

(1) מיצאו נוסחת נסיגה ל- a_n.

(2) מיצאו תבנית ל- a_n.

ז. בדף חשבון ריבועי הבנוי $n \times n$ משבצות, משרטטים את כל הריבועים האפשריים שצלעותיהם מונחות על הקווים המסומנים שבדף. הציור שלפנינו מדגים חלק קטן מריבועים אלה כאשר $n = 6$. נסמן ב- a_n את מספר הריבועים האלה.

מיצאו נוסחת נסיגה ל- a_n.



2. **פולינום טיילור**

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה n פעמים בנקודה x_0.

פולינום טיילור ממעלה n של פונקציה $f(x)$ מפותח סביב הנקודה x_0 הוא הפולינום:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + ... + a_n(x - x_0)^n$$

המקיים:

$$Pn(x_0) = f(x_0)$$

$$P_n^{(1)}(x_0) = f^{(1)}(x_0)$$

$$P_n^{(2)}(x_0) = f^{(2)}(x_0)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

כלומר הפולינום, נגזרתו הראשונה השניה וכו' עד הנגזרת ה- n מתלכדים בנקודה x_0 עם הפונקציה, נגזרתה הראשונה השניה וכו'. עד הנגזרת ה- n בהתאמה.

נמצא את $P_1(x)$:

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$P_1^{(1)}(x) = a_1$$

על סמך ההגדרה:

$$f(x_0)=P_1(x_0)=a_0$$

$$f^{(1)}(x_0)=P_1^{(1)}(x_0)=a_1$$

ולכן
$$P_1(x)=f(x_0)+f^{(1)}(x_0)(x-x_0)$$

קיבלנו כי הפיתוח של פולינום טיילור ממעלה ראשונה של $f(x)$ סביב הנקודה x_0 הוא למעשה הקרוב הליניארי (המשיק) של f ב- x_0.

המטרה להוכיח:

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

נניח כי יודעים כבר למצוא את $(n>1)$ $P_{n-1}(x)$ כלומר פולינום טיילור ממעלה $n-1$ של $f(x)$ מפותח סביב x_0.

נסתכל בפולינום

$$P(x)=P_{n-1}(x)+a_n(x-x_0)^n$$

$(x-x_0)^n$ מתאפס בנקודה x_0 וכך גם נגזרתו מסדר k, $1\le k\le n-1$ ולכן

$$P(x_0)=P_{n-1}(x_0)+0=f(x_0)$$

וכמו כן

$$1\le k\le n-1 \quad P^{(k)}(x_0)=P_{n-1}^{(k)}(x_0)+0=f^{(k)}(x_0)$$

$P_{n-1}(x)$ הוא פולינום ממעלה $n-1$ ולכן נגזרתו מסדר n מתאפסת ומתקיים:

$$P^{(n)}(x)=P_{n-1}^{(n)}(x)+\left[a_n(x-x_0)^n\right]^{(n)}=0+a_n n!$$

ולכן

$$P^{(n)}(x_0)=a_n n!=f^{(n)}(x_0)$$

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

ומכאן
$$P_n(x)=P(x)=P_{n-1}(x)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

3. **גיאומטריה**

בעיית בניה: נתון קטע שאורכו a. יש לבנות קטע שאורכו $\sqrt{n\cdot a}$.

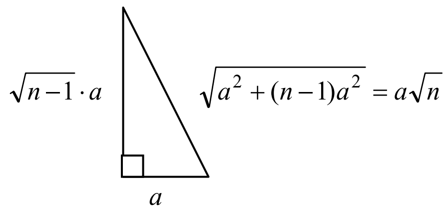
<u>התרה</u>:

אם $n=2$ נבנה משולש ישר זווית בו אורכו כל ניצב הוא a. אורך היתר הוא $\sqrt{2}\cdot a$.

נניח כי בנינו את $\sqrt{n-1}\cdot a$ $n\ge 3$

כדי לבנות את $\sqrt{n}\cdot a$ נבנה משולש ישר זווית שאורך ניצביו a , $\sqrt{n-1}\cdot a$.

היתר יהיה:



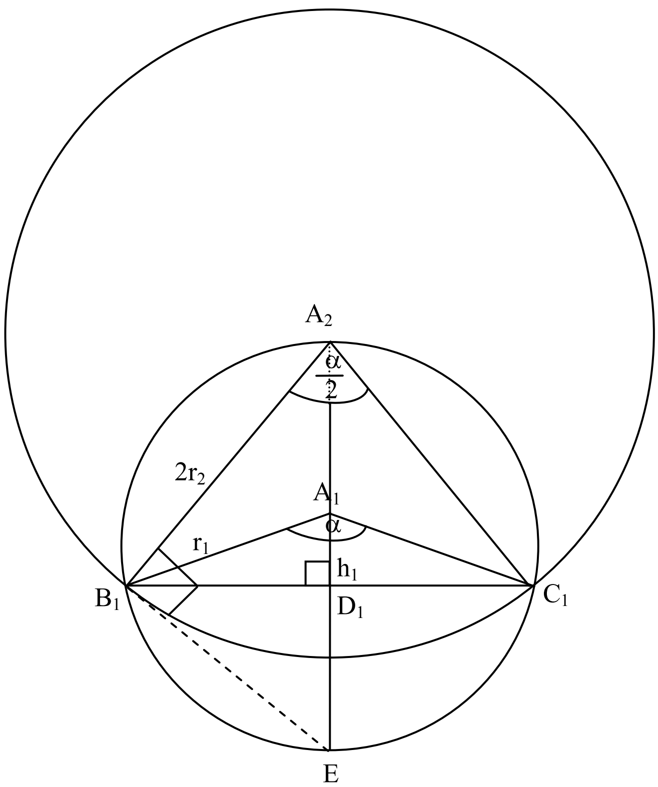
4. חישוב π על ידי ניקולאוס קוזאנוס

כבר ארכימדס מצא שיטת קירוב ל- π באמצעות מצולעים משוכללים החסומים במעגל בעל רדיוס נתון R. ככל שמספר צלעות המצולע החסום גדל כך קרוב יותר היקף המצולע P להיקף $2\pi R$ של המעגל והיחס $\frac{P}{2R}$ קרוב יותר לערך של π.

התיאולוג ואיש הכמורה הנוצרי ניקולאוס קוזאנוס (1401-1464) פיתח שיטת קרוב נוספת ל- π. לעומת ארכימדס, אצל קוזאנוס היקף המצולע קבוע, והמטרה למצוא את "הגבול r" של הרדיוסים r_n של סדרת מעגלים החוסמים מצולעים משוכללים בעלי היקף נתון p. במקרה זה $\pi=\frac{p}{2r}$.

גם שיטת ארכימדס וגם שיטת קוזאנוס מבוססות על רקורסיה. נביא להלן את שיטת קוזאנוס בגלל מקוריותה. כמו כן נוסחאות הרקורסיה בשיטה זו פשוטות יותר לחישוב.

נתבונן במצולעים משוכללים שווי היקף p.
נחקור כיצד משתנים רדיוסי המעגלים החוסמים אותם כאשר מספר הצלעות גדל פי שנים.



נתון מצולע משוכלל בעל m צלעות שהיקפו p. יהי A_1 מרכז המעגל החוסם את המצולע. r_1 רדיוס המעגל.

בציור: $r_1 = A_1B_1 = A_1C_1$

B_1C_1 היא אחת הצלעות במצולע. מתקיים:

$$\alpha = \measuredangle\ B_1A_1C_1 = \frac{360°}{m}\ ,\ \ B_1C_1 = \frac{p}{m}$$

כמו כן: $A_1D_1 = h_1 = \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{p}{2m}\right)^2}$.

h_1 הוא גובה במשולש $A_1B_1C_1$ וזהו גם רדיוס המעגל החסום במצולע המשוכלל.

המשך D_1A_1 חותך את המעגל בנקודה A_2 (ראה ציור) ומתקיים:

$$\measuredangle\ B_1A_2C_1 = \frac{1}{2}\ \measuredangle\ B_1A_1C_1 = \frac{1}{2}\alpha = \frac{360°}{2m}$$

אם נבנה מעגל שמרכזו A_2 ורדיוסו A_2B_1 ונחסום בתוכו מצולע משוכלל שצלעו B_1C_1 יהיה המצולע בעל $2m$ צלעות והיקפו לכן $2p$. כדי לשמור על דרישת ההיקף הקבוע נכווץ את המעגל באופן שהרדיוס r_2 של המעגל המכווץ יהיה מחצית הרדיוס A_2B_1 כלומר $r_2 = \frac{A_2B_1}{2}$.

מתכונת הדמיון היקף המצולע המשוכלל בעל $2m$ צלעות שחסום במעגל המכווץ יהיה $\frac{1}{2}\cdot 2p = p$ כנדרש.

אם נסמן ב- h_2 את רדיוס המעגל החסום של המצולע בעל $2m$ צלעות שהיקפו p מתקיים מתכונת הדמיון:

$$2h_2 = D_1A_2 = D_1A_1 + A_1A_2 = h_1 + r_1$$

ולכן
$$h_2 = \frac{h_1 + r_1}{2} \quad (1)$$

A_2B_1E הוא משולש ישר זווית. מתקיים $(B_1A_2)^2 = EA_2 \cdot D_1A_2$

כלומר
$$(2r_2)^2 = (2r_1)\cdot(2h_2)$$
$$(2) \quad r_2^2 = r_1 \cdot h_2$$

ולכן
$$r_2 = \sqrt{r_1h_2}$$

בעזרת הנוסחאות (1) ו (2) נוכל לבנות שתי סדרות $\{r_n\}$ ו- $\{h_n\}$.

r_1 ו- h_1 הוא רדיוס המעגל החוסם והחסום בהתאמה של המצולע הראשון שהקפו p בעל m צלעות.

נסמן עתה ב- r_n ו- h_n את רדיוס המעגל החוסם והחסום בהתאמה של מצולע משוכלל בעל $2^{n-1}\cdot m$ צלעות. לכל המצולעים אותו היקף p. בהתאם לדיון שראינו לעיל מתקיים:

$$h_{n+1} = \frac{h_n + r_n}{2}$$

$$r_{n+1} = \sqrt{r_n \cdot h_{n+1}}$$

בעזרת נוסחאות נסיגה אלו אפשר להוכיח כי :

$$h_n < h_{n+1} > r_{n+1} < r_n$$

וכמו כן $\lim\limits_{n \to \infty} (r_n - h_n) = 0$

(לקוזאנוס לא היו כמובן הכלים המתימטים להוכיח זאת) ולכן קיים מספר יחיד R שהוא הגבול המשותף לשתי הסדרות. הגבול R מקיים לכל מספר טבעי n :

$$h_n < R < r_n$$

מכאן $2\pi\, h_n < p = 2\pi R < R\pi\, r_n$

ובהתאם לכך, עבור כל n מקבלים

$$\frac{P}{2r_n} < \pi < \frac{P}{2h_n}$$

ו- π הוא הערך היחיד המקיים אי-שוויונים אלו עבור כל n וככל ש- n הולך וגדל, כך נעשים הערכים של $\frac{P}{2h_n}$ ו- $\frac{P}{2r_n}$ קרובים יותר לערך המבוקש π .

אם נבחר לפתוח במשושה משוכלל, ו- $p = 6$ מתקיים $r_1 = 1$, $h_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ והערכה הראשונה ל- π היא :

$$3 = \frac{6}{2.1} < \pi < 2\sqrt{3} = 3.4641$$

מנוסחאות הנסיגה נקבל עבור $n = 2$

$$3.1058 < \pi < 3.2151$$

נציין כי נוסחאות הנסיגה של ארכימדס הן : (ראה [3])

$$q_{n+1} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n}$$

$$p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}$$

כאשר q_n ו- p_n הם הקפי המצולעים המשוכללים בעלי $2^{n-1} \cdot m$ צלעות החוסמים והחסומים בהתאמה במעגל שרדיוסו R. אנו רואים אם כך כי נוסחאות הנסיגה בשיטת ארכימדס הן ממוצע הרמוני וממוצע הנדסי לעומת ממוצע חשבוני וממוצע הנדסי בשיטת קוזאנוס.

ביבליוגרפיה (הכוללת דוגמאות נוספות)

1. כץ, פ. (עורך) _טורי טיילור_, המרכז להוראת המדעים, ירושלים. (עמ' 12).
2. לוי, א. ואחרים (1979), _מטריצות ודטרמיננטות_, כרך שלישי, יחידות 4-6 האוניברסיטה הפתוחה, תל-אביב.
3. _המרחב האוקלידי_, כרך שמיני האוניברסיטה הפתוחה, תל-אביב.
4. Dorrie H. (1980). _100 Great Problems of Mathematics: their History and Solution_ (p. 184).