קריאת טקסטים מתמטיים

אביטל אלבום – כהן

כנס מורים למתמטיקה – שפיים

31.3.2015

סדר ההרצאה

סיפור מסגרת – למה קריאת טקסטים?

התנסות בקריאת טקסט

דיון בהשלכות חינוכיות

שאלות

למה קריאת טקסטים מתמטיים?

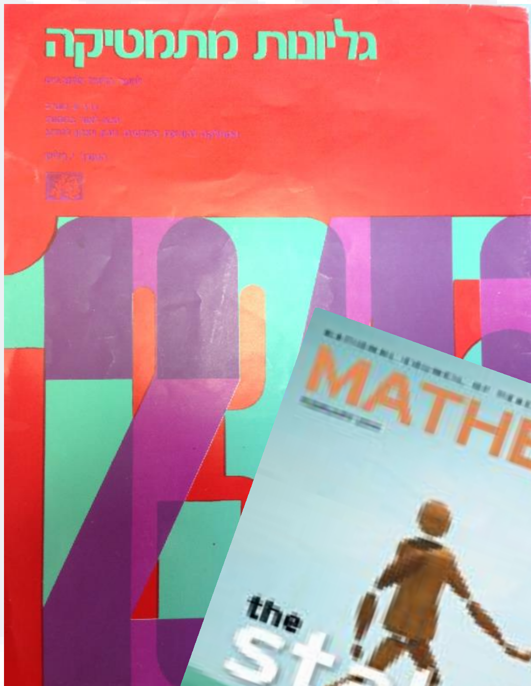
עשייה מקובלת בכיתת מתמטיקה בבית הספר

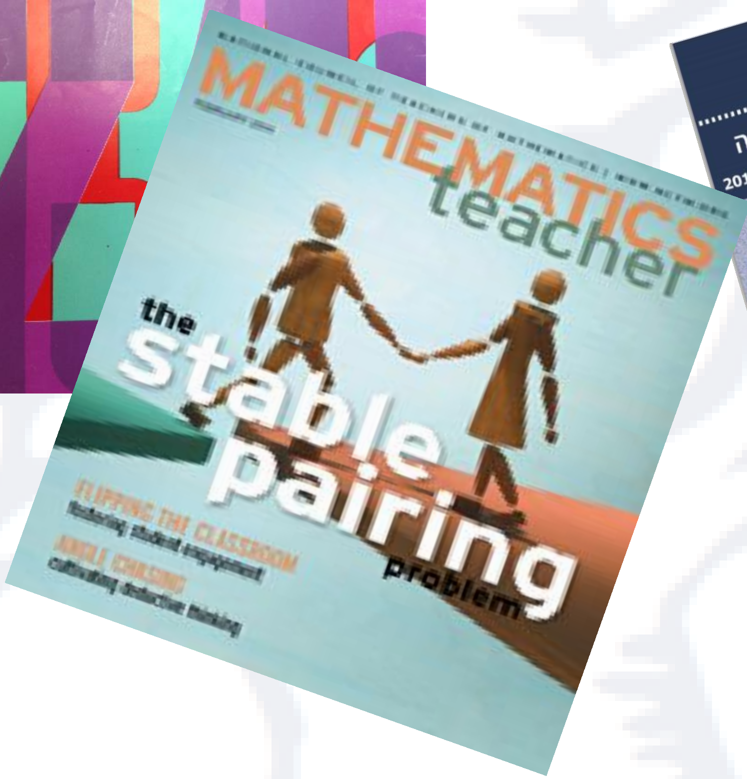
פרוצדורות

בניית כלים לפתרון בעיות

הוראת קריאת טקסטים מתמטיים היא מועמדת מבטיחה על מנת להרחיב ולהעשיר בו זמנית הן את הפרקטיקות השגורות בכיתה והן את דמותה של המתמטיקה כפי שהיא משתקפת בכיתה.

מקורות של טקסטים מתמטיים





לדוגמא

פתרון גרפי לשאלות הרקה[1]

י. בר-הלל ז"ל

"למוזג שלושה כדים המכילים 8, 5 ו 3 ליטרים. הכד הגדול מלא יין . ברצון המוזג לחלק את היין לשתי כמויות שוות בעזרת הכדים הללו בלבד . כיצד יעשה זאת?"

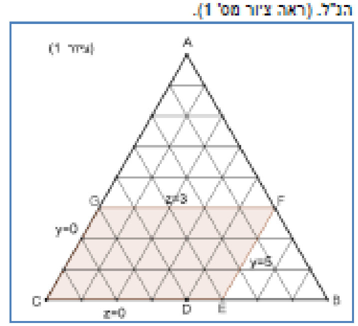
מי מכם לא נשאל בילדותו שאלה זו ע"י חבר שרצה להראות את חכמתו ? ומי לא בילה רבעי שעות בהתרתה ובהתרת שאלות דומות לה ? ובכל זאת מסופקני אם עלה בדעתכם לחפש אחרי דרך שיטתית להתרת סוג שאלות זה , שהיו אהובות ביותר על אבות-אבותינו לפני 200 שנה. במאמר זה נציג דרך שיטתית כזאת, בעזרת תיאור גרפי.

ברור כי המוזג יכול לעשות רק שתי פעולות, להריק אחד הכדים עד תומו או למלא אחד הכדים עד תומו; יתכן כמובן שבפעולה אחת גם יריק וגם ימלא. מכיוון שהכדים מכילים מספר שלם של ליטרים וכל פעולה מוסיפה או גורעת מספר שלם של ליטרים, מסתבר שבכל כד נמצא תמיד מספר שלם של ליטרים , אם יש בו בכלל משהו . כמו כן נניח שהמוזג לא יאבד בהעברות הללו אף טיפה מן המשקה , כך שתמיד ימצאו בכל הכדים ביחד 8 ליטרים.

נניח איפוא , כי בכד הגדול ימצאו אחרי פעולה מסויימת x ל', בכד הבינוני y ל', ובקטן z ל' (x, y, z מספרים טבעיים ; $0\le x\le 8$; $0\le y\le 5$; $0\le z\le 3$; $x+y+z=8$).

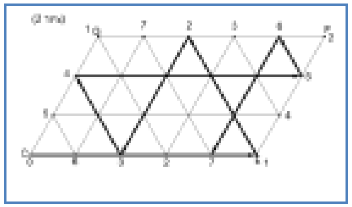
ידוע כי סכום המרחקים של כל נקודה הנמצאים בפנים משולש שווה צלעות או על שפתו מצלעותיו הוא קבוע ושווה לאחד מגבהיו . (נשאיר לקורא להוכיח עובדה זו). ניקח כעת משולש שווה צלעות בעל גובה של 8 יחידות, ונסמן את קודקודיו ב- A, B, C. את המרחקים של נקודה , הנמצאת במשולש , מצלעותיו נקרא בשם "השעורים" שלה, וביתר דיוק נקרא למרחקה מ- AB בשם "שעור ראשון" למרחקה מ- AC בשם "שעור שני" ולמרחקה מ- BC "שעור שלישי".

וכעת עיקר החכמה : כל מצב אפשרי של שלושת הכדים יוצג ע"י נקודה בפנים המשולש או על שפתו, המצב ההתחלתי (x=8, y=0, z=0) ע"י הקודקוד C, המצב המבוקש (x=4, y=4, z=0) ע"י נקודה ששעורה הראשון הוא 4, שעורה השני 4 ושעורה השלישי 0, ובדרך כלל המצב x, y, z ע"י נקודה ששעוריה הם x, y, z, ובסדר זה . מובן ששני שיעורים בלבד קובעים את הנקודה . כשם שמצבם של שני כדים הוא קבוע מבחינה פיסיקלית, כך קבוע סכום המרחקים מבחינה הנדסית , לפי המשפט הנ"ל. (ראה ציור מס' 1).



בהתאם לאי השוויונות המובעים מן הנתונים, מוכרחה כל נקודה מיצגת להמצא בפנים המקבילית CEFG או על שפתה (ברור ?). כל פעולה של המוזג משאירה את המצב באחד הכדים ללא שינוי , בו בזמן שהיא מביאה אחד הכדים האחרים למצב גבולי, כלומר ריק לגמרי או מלא לגמרי . פעולה כזו תיוצג איפה ע"י תנועת הנקודה המיצגת לאורך ישר מסוים , מקביל לאחת מצלעות המשולש (למה?) עד שפת המקבילית או לאורך אחת מצלעותיה עד אחד מקודקודיה.

כל נקודה (בעלת שעורים שלמים, כי רק נקודות אלה מעניינות אותנו) על שפת המקבילית תקבל מספר בהתאם למספר הצעדים הקטן ביותר אשר בהם אפשר להגיע אליה מ- C. כדי לראות זאת יפה , נשרטט לנו את המקבילית CEFG מחדש: הנקודה C תקבל את המספר 0, E ו G את המספר 1, F את המספר 2, אך עוד שתי נקודות על שפת המקבילית תקבלנה אותו מספר, וכך נמשיך, עד אשר כל נקודה על שפת המקבילית תקבל את מספרה . (ראה ציור מס' 2).



מתברר כי מצב אפשרי ניתן להשגה אחרי 7 פעולות לכל היותר , ובין המצבים הד ורשים את המספר המקסימלי של פעולות נמצא דוקא המצב המבוקש שלנו. מתברר כמו כן שישנה רק דרך אחת קצרה ביותר להשגתו . הקו העבה בעל החצים מתאר אותה. את הפתרון המתקבל נוכל לסכם בטבלה הבאה:

x	y	z
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

וכעת נסו את כוחכם בהתרת הבעיה הבאה:

למוזג שלושה כדים המכילים 10, 6 ו 5 ליטר. בכל אחד משני הכדים הגדולים נמצאים 6 ל' יין והקטן הוא ריק. המוזג רוצה לחלק את היין כך שבאחד הכדים ימצאו 5 ל', בשני 4 ל', ובשלישי 3 ל'. האם אפשרי הדבר? ואם כן, האם הוא יכול לבחור באיזה מהכדים יהיו 5 ל', ובאיזה 4, ובאיזה 3 ? או האם קיימת רק אפשרות אחת?

1) מתוך "גליונות מתמטיקה" כרך 6 מס' 2 עורך יוסף גילים בהוצאת המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

השערות – מה סוג כזה של עשיה עשוי לאפשר?

חשיפה לעשיה מתמטית בהקשרים שונים ומגוונים.

התעמקות באופן בו מומחים פותרים בעיה או מוכיחים משפט.

למידה מתוך חיקוי – ויגוצקי

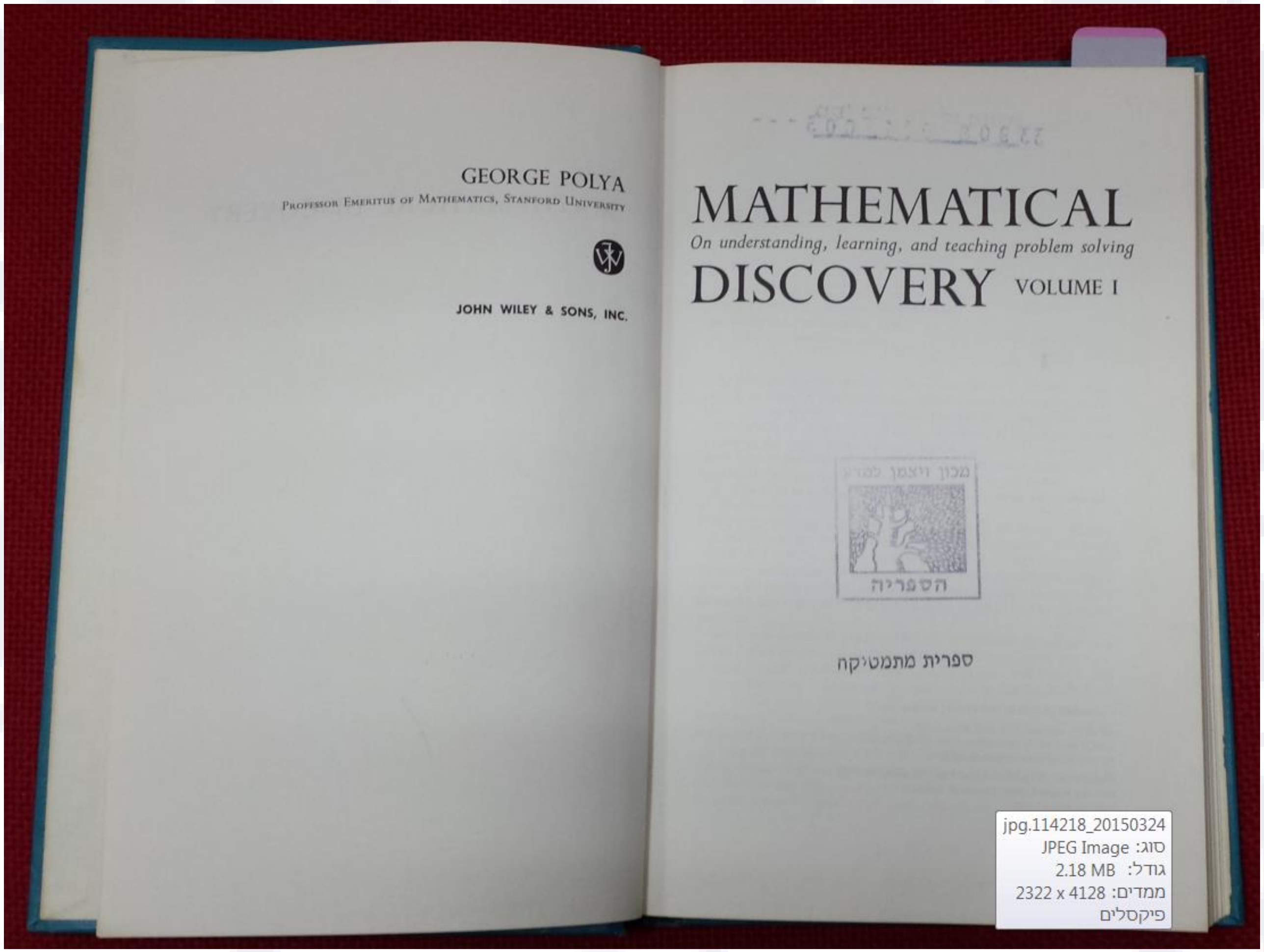
טיפוח של ממד עצמאי בלמידה – בקרה של הקורא על תהליך הקריאה בכלל ועל "הבנתו" את הטקסט הנקרא בפרט

סדר ההרצאה

- ✓ סיפור מסגרת – למה קריאת טקסטים?
- התנסות בקריאת טקסט
- דיון בהשלכות חינוכיות
- שאלות

התנסות בקריאת טקסט

טקסט של פוייה (G. Polya)



קריאה משותפת תוך מחשבה:

אילו מיומנויות נדרשות ממני כתלמיד?

באיזה אופן נלמדות המיומנויות?

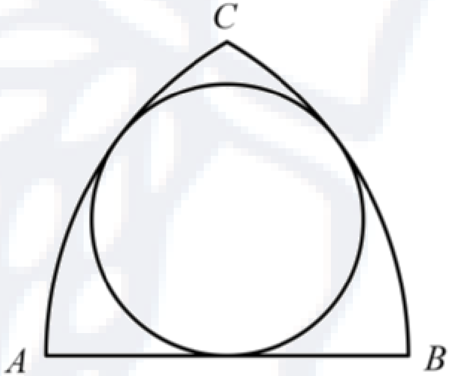
מה התפקיד של המורה בהנחיית הפעילות?

קטע קריאה מתוך הספר MATHEMATICAL DISCOVERY מאת George Polya[1] - חלק ראשון

תרגום לעברית – אביטל אלבוים-כהן

בעיית בנייה בגיאומטריה – אפשר להציג כל בעיית בנייה בגיאומטריה כבעיה באלגברה. אין בדעתנו לדון בתיאוריה כללית לטענה הנ״ל, אבל להלן דוגמא.

ABC הוא שטח דמוי משולש תחום על ידי קו ישר AB ושתי קשתות מעגליות, $\breve{AC}$ ו- $\breve{BC}$. A הוא מרכזו של מעגל אחד ו- B הוא מרכזו של השני כך שכל מעגל עובר דרך מרכזו של השני. חסום בתוך השטח המשולשי מעגל שמשיק לכל אחד מהקווים שתוחמים את השטח.



ציור 1

את הצורה שמתקבלת (ראה ציור 1) ניתן לראות לעיתים בעיטורים גותיים. ברור שאפשר לצמצם את הבעיה הנתונה לבנייה של נקודה אחת: מרכז המעגל המבוקש. בנוסף, מקום גיאומטרי עליו ברור שתמצא נקודה זו יהיה האנך האמצעי לקטע AB שהוא ציר סימטריה בצורה המשולשת הנתונה. לכן נותר למצוא מקום גיאומטרי נוסף עליו נמצא מרכז המעגל.

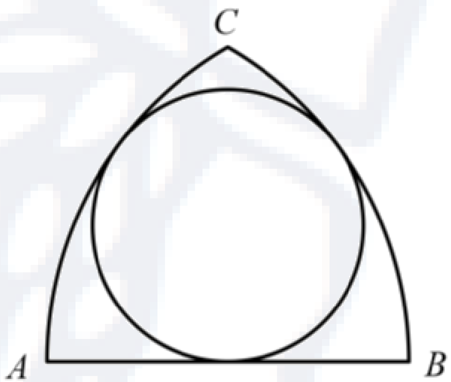
[1] Polya, G. (1981). *Mathematical discovery*. New York: John Wiley & Sons p. 32-34

קטע קריאה מתוך הספר MATHEMATICAL DISCOVERY מאת George Polya[1] - חלק ראשון

תרגום לעברית – אביטל אלבוים-כהן

בעיית בנייה בגיאומטריה – אפשר להציג כל בעיית בנייה בגיאומטריה כבעיה באלגברה. אין בדעתנו לדון בתיאוריה כללית לטענה הנ״ל, אבל להלן דוגמא.

ABC הוא שטח דמוי משולש תחום על ידי קו ישר AB ושתי קשתות מעגליות, $\breve{AC}$ ו- $\breve{BC}$. A הוא מרכזו של מעגל אחד ו- B הוא מרכזו של השני כך שכל מעגל עובר דרך מרכזו של השני. חסום בתוך השטח המשולשי מעגל שמשיק לכל אחד מהקווים שתוחמים את השטח.



ציור 1

את הצורה שמתקבלת (ראה ציור 1) ניתן לראות לעיתים בעיטורים גותיים. ברור שאפשר לצמצם את הבעיה הנתונה לבנייה של נקודה אחת: מרכז המעגל המבוקש. בנוסף, מקום גיאומטרי עליו ברור שתמצא נקודה זו יהיה האנך האמצעי לקטע AB שהוא ציר סימטריה בצורה המשולשת הנתונה. לכן נותר למצוא מקום גיאומטרי נוסף עליו נמצא מרכז המעגל.

[1] Polya, G. (1981). *Mathematical discovery*. New York: John Wiley & Sons p. 32-34

קטע קריאה מתוך הספר MATHEMATICAL DISCOVERY מאת George Polya[1] - חלק שני

תרגום לעברית – אביטל אלבוים-כהן

התייחס רק לחלק מהתנאי, וותר על החלק שנותר. נתייחס לְמעגל (משתנה) שנוגע לא בשלושה אלא רק בשניים מגבולות הצורה הנתונה: הקו הישר AB והקשת המעגלית $\overset{\frown}{BC}$; (ראה ציור 2). על מנת למצוא את מקומו של מרכז המעגל המשתנה נעשה שימוש בהנדסה אנליטית. נציב את ראשית הצירים בנקודה A כך שציר ה – x יעבור דרך הנקודה B (ראה ציור 2). יהיו x ו- y שיעורי מרכז המעגל. חבר את המרכז עם שתי נקודות המגע ההכרחיות, האחת עם הקו הישר AB והשנייה עם הקשת המעגלית $\overset{\frown}{BC}$. (ראה ציור 2). לשני הרדיוסים אותו האורך לכן אפשר לבטא את האורך בשתי דרכים שונות (נסמן $AB = a$):

$$y = a - \sqrt{x^2 + y^2}$$

ניפטר מהשורש הריבועי ונקבל:

$$x^2 = a^2 - 2ay$$

מכאן שמרכז המעגל נמצא על פרבולה- מקום שאין בו שימוש מידי בבנייה גיאומטרית.

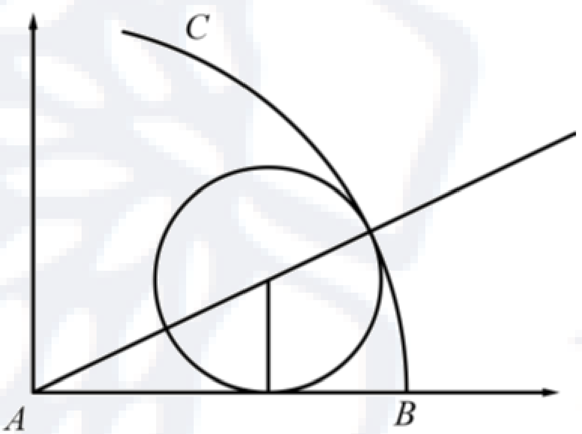
יחד עם זאת, המקום שהוזכר בהתחלה, האנך האמצעי של AB, משוואתו היא:

$$x = \frac{a}{2}$$

אשר יחד עם משוואת הפרבולה, נותן לנו את שיעור ה-y של מרכז המעגל המבוקש.

$$y = \frac{3a}{8}$$

את שיעור ה- y הזה קל לבנות בהינתן האורך $AB = a$.



ציור 2

[1] Polya, G. (1981). *Mathematical discovery*. New York: John Wiley & Sons p. 32-34

קטע קריאה מתוך הספר MATHEMATICAL DISCOVERY מאת George Polya[1] - חלק שני

תרגום לעברית – אביטל אלבוים-כהן

התייחס רק לחלק מהתנאי, וותר על החלק שנותר. נתייחס לְמעגל (משתנה) שנוגע לא בשלושה אלא רק בשניים מגבולות הצורה הנתונה: הקו הישר AB והקשת המעגלית $\overset{\frown}{BC}$; (ראה ציור 2). על מנת למצוא את מקומו של מרכז המעגל המשתנה נעשה שימוש בהנדסה אנליטית. נציב את ראשית הצירים בנקודה A כך שציר ה x – יעבור דרך הנקודה B (ראה ציור 2). יהיו x ו- y שיעורי מרכז המעגל. חבר את המרכז עם שתי נקודות המגע ההכרחיות, האחת עם הקו הישר AB והשנייה עם הקשת המעגלית $\overset{\frown}{BC}$. (ראה ציור 2). לשני הרדיוסים אותו האורך לכן אפשר לבטא את האורך בשתי דרכים שונות (נסמן $AB = a$):

$$y = a - \sqrt{x^2 + y^2}$$

ניפטר מהשורש הריבועי ונקבל:

$$x^2 = a^2 - 2ay$$

מכאן שמרכז המעגל נמצא על פרבולה- מקום שאין בו שימוש מידי בבנייה גיאומטרית.

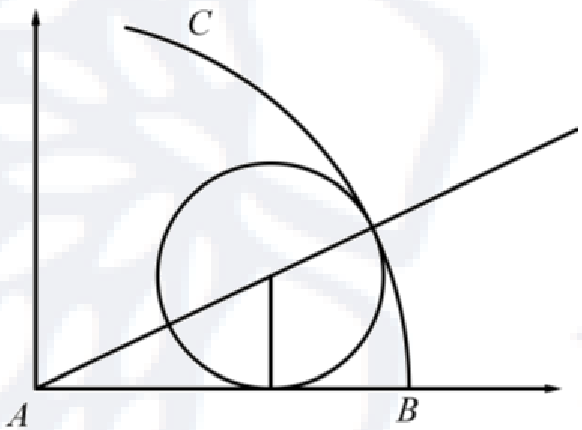
יחד עם זאת, המקום שהוזכר בהתחלה, האנך האמצעי של AB, משוואתו היא:

$$x = \frac{a}{2}$$

אשר יחד עם משוואת הפרבולה, נותן לנו את שיעור ה-y של מרכז המעגל המבוקש.

$$y = \frac{3a}{8}$$

את שיעור ה- y הזה קל לבנות בהינתן האורך $AB = a$.



ציור 2

[1] Polya, G. (1981). *Mathematical discovery*. New York: John Wiley & Sons p. 32-34

סדר ההרצאה

- סיפור מסגרת – למה קריאת טקסטים?
- התנסות בקריאת טקסט
- דיון בהשלכות חינוכיות
- שאלות

דיון בהשלכות חינוכיות

- האם יש בסיס להשערה:

הוראת קריאת טקסטים מתמטיים היא מועמדת מבטיחה על מנת להרחיב ולהעשיר בו זמנית הן את הפרקטיקות השגורות בכיתה והן את דמותה של המתמטיקה כפי שהיא משתקפת בכיתה.

תודה !

avitalec.ntear@gmail.com