

הגרף - סיפור על חקירה
מתמטית

לאה דולב, מנהלת הוראת
המתמטיקה, אורט ישראל

חט"ע
מרכז אילנות -
אולם אורן

הלוגו של הכנס היום הזכיר לי סיפור מהעבר



סיפור שמאיר סוגיה עדכנית:
חלופות בלמידה ובהערכה מנקודת מבטו של המורה.

הכנס מיועד להצגת רעיונות ודוגמאות מתמטיות, דידקטיות ופדגוגיות.

רקע תאורתי ומחקרי שתומכים ברעיונות ובדוגמאות, בהזדמנות אחרת.....



אני אתחיל את ההרצאה מהשקף האחרון של המצגת.....

הסיפור בא להאיר



הטמעת חלופות בלמידה ובהערכה מצריכה ומזמנת העמקה והרחבה של הידע המתמטי של המורים.

יעד

הסילבוס לא ידוע מראש – התכנים בהתאם לסוגיות המתמטיות המתעוררות תוך כדי עבודת התלמידים.

אתגר

מסגרת של קהילת "מורים מנחים" בתמיכה גם של מומחה מתמטיקה.

פתרון

הגרף – ספור על חקירה מתמטית



הרשת הטכנולוגית-מדעית המובילה בישראל
מכללות ובתי ספר לטכנולוגיה מתקדמת ולמדעים
המנהל למחקר ופיתוח ולהכשרה



מסמנים על שני ישרים, החל מנקודת המפגש, תשעה קטעים, באורך שווה. מחברים את נקודות החלוקה ע"י ישרים: מקרן אחת נקודה ראשונה עם נקודה אחרונה בקרן השנייה. מקרן אחת נקודה שניה עם נקודה לפני אחרונה בקרן השנייה, וכך הלאה.

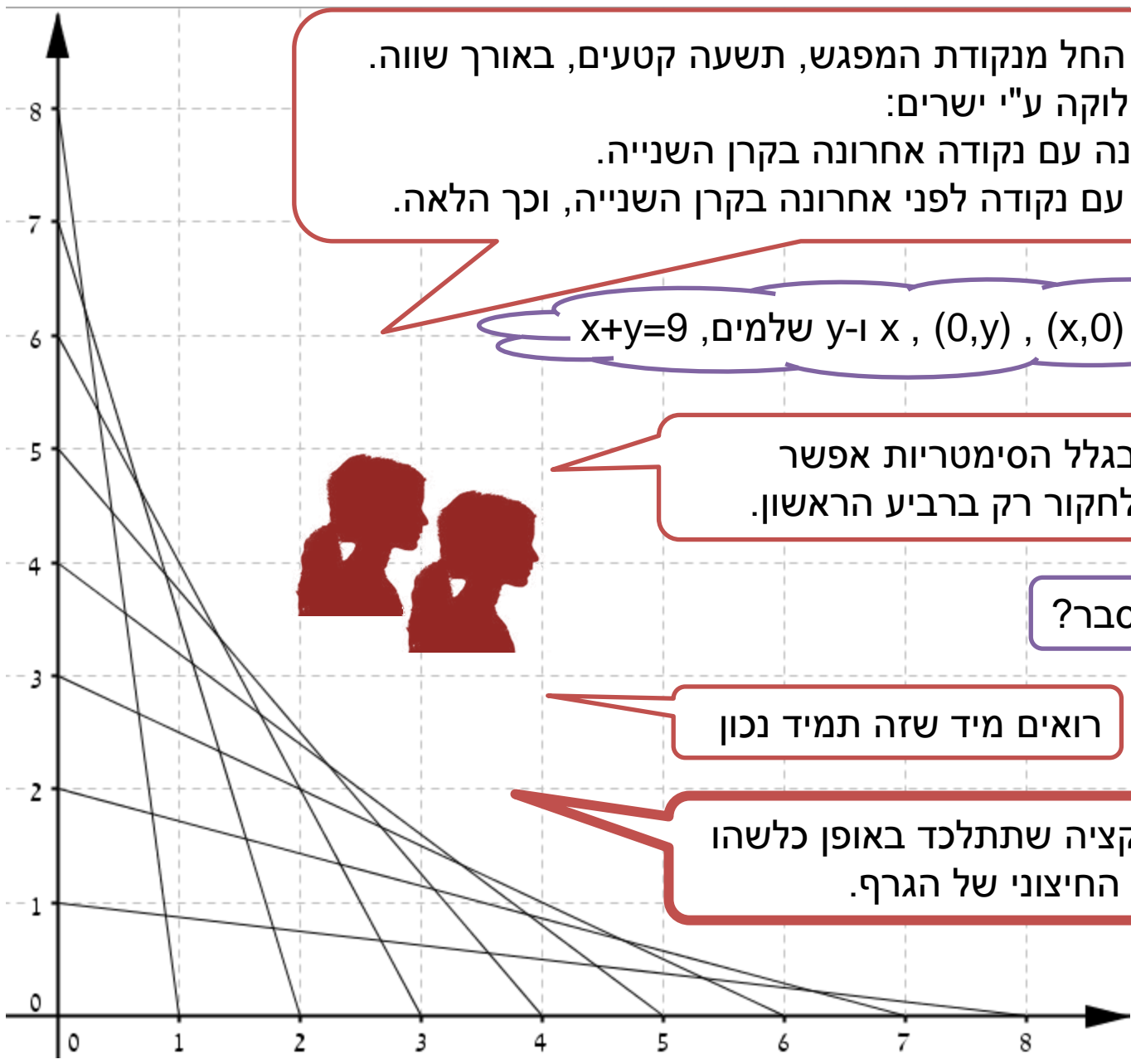
$x+y=9$, x ו- y שלמים, $(0,y)$, $(x,0)$

בגלל הסימטריות אפשר לחקור רק ברביע הראשון.

נימוק? הסבר?

רואים מיד שזה תמיד נכון

אנחנו מחפשות פונקציה שתתלכד באופן כלשהו עם החלק החיצוני של הגרף.



"דוגמית" מתוך
החקירה של
התלמידות



אנחנו מחפשות פונקציה שתתלכד באופן כלשהו
עם החלק החיצוני של הגרף.

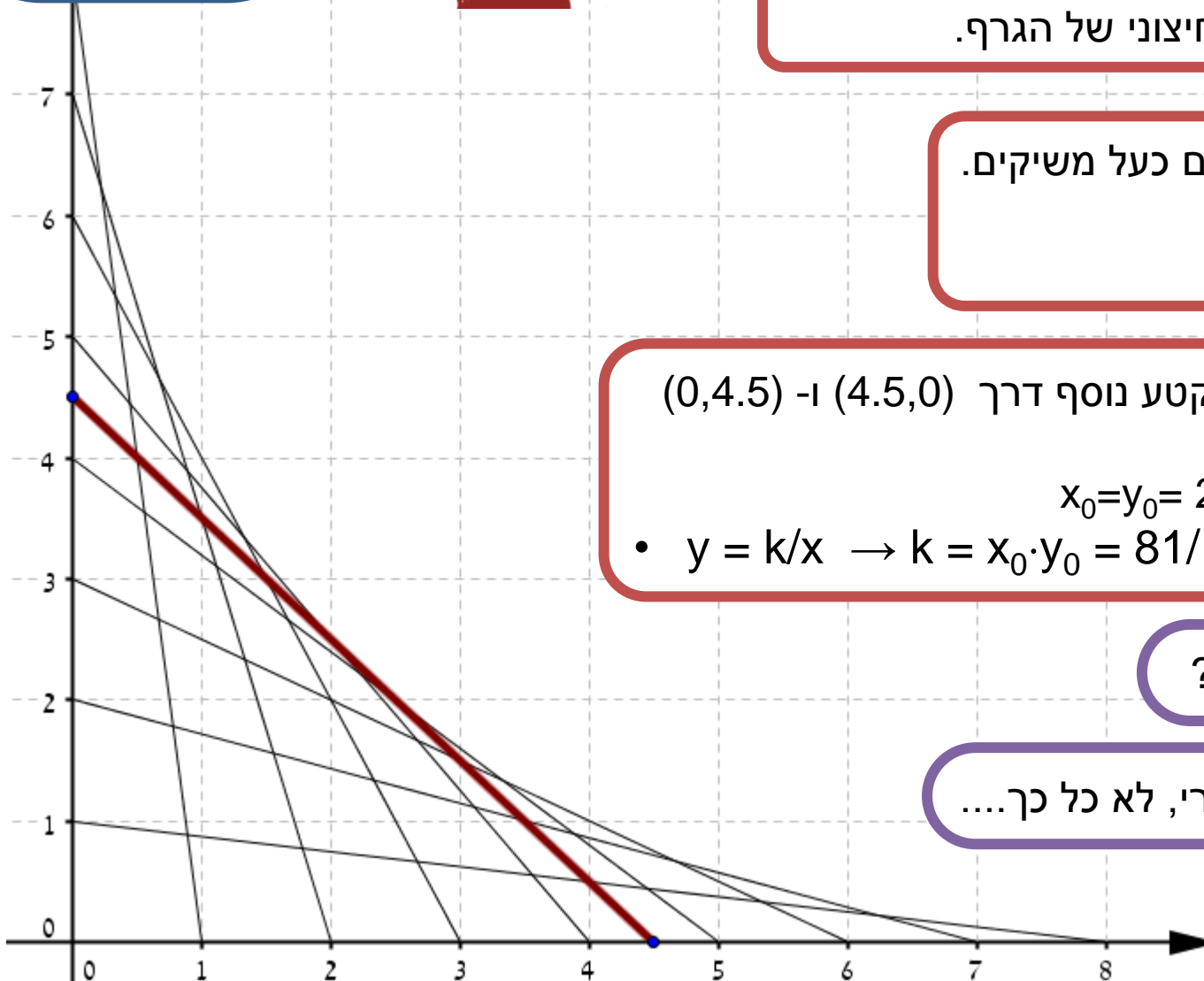
- להסתכל על הקטעים כעל משיקים.
- חשבנו על $y=k/x$.
- למצוא k שיתאים.

- שוב סימטריה ולכן קטע נוסף דרך $(0,4.5)$ ו- $(4.5,0)$
- הישר: $y=-x+4.5$
- נקודת השקה: $x_0=y_0=2.25$

- $y = k/x \rightarrow k = x_0 \cdot y_0 = 81/16$

יפה?

לצערי, לא כל כך....



"דוגמית" מתוך
החקירה של
התלמידות



אנחנו מחפשות פונקציה שתתלכד באופן כלשהו
עם החלק החיצוני של הגרף.

$$y=k/x \rightarrow k=81/16$$

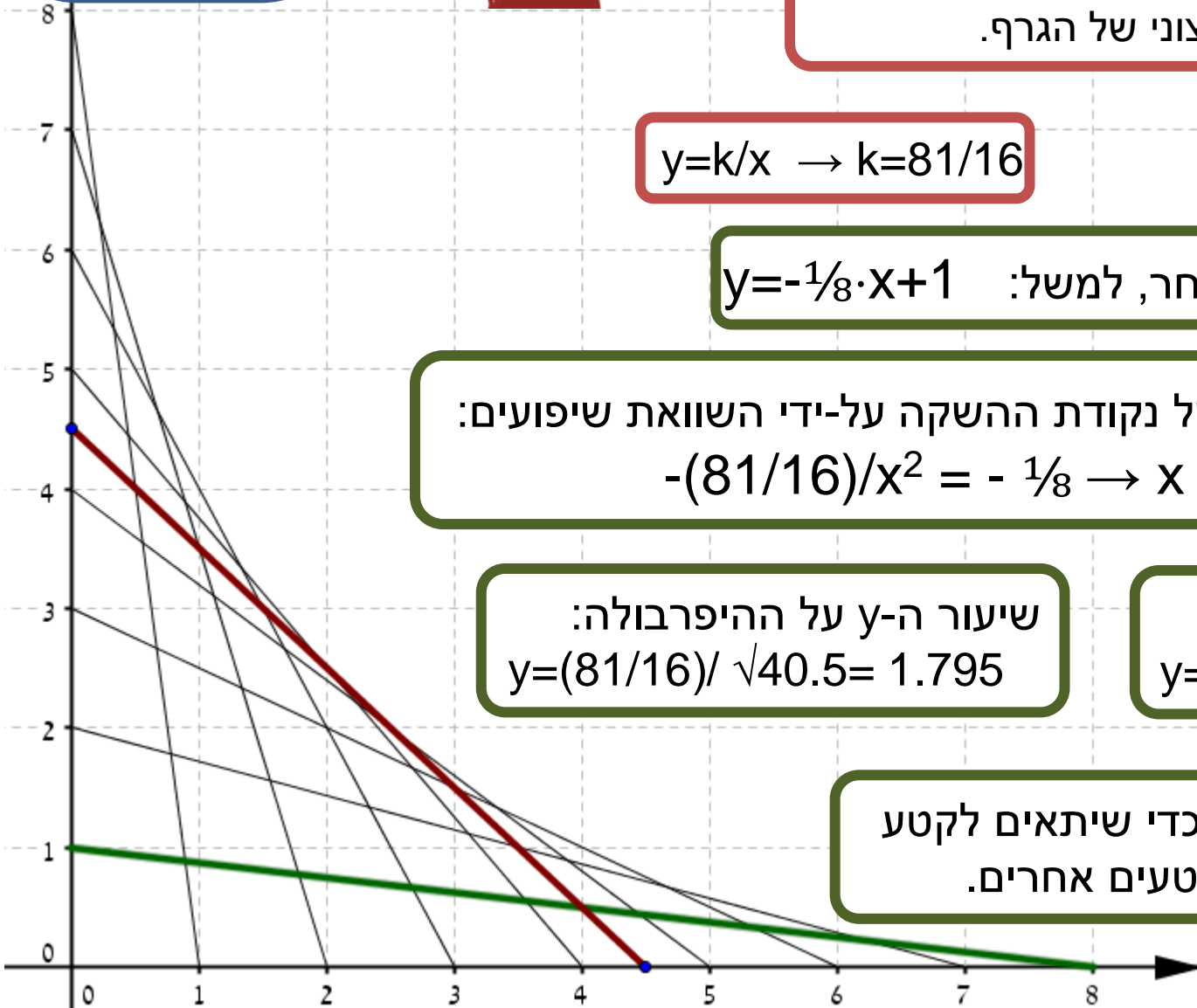
נבדוק התאמה לקטע אחר, למשל: $y=-1/8 \cdot x+1$

נחשב את שיעור ה-x של נקודת ההשקה על-ידי השוואת שיפועים:
 $-(81/16)/x^2 = -1/8 \rightarrow x = \sqrt{40.5}$

שיעור ה-y על ההיפרבולה:
 $y=(81/16)/\sqrt{40.5}=1.795$

שיעור ה-y על הישר:
 $y=-1/8 \cdot \sqrt{40.5}+1=0.795$

מסתבר כי ה-k שנבחר כדי שיתאים לקטע
הסימטרי לא מתאים לקטעים אחרים.



"דוגמית" מתוך
הפתרון של בלוך

מחפשים $y=f(x)$ כך שה"קטעים" יהיו משיקים שלה.
 (x_0, y_0) נקודה כלשהי על $f(x)$ ו- t_0 משיק בנקודה.

$$\text{משוואת } t_0: y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

שעורי נקודות החיתוך של t_0 עם הצירים:

$$y = 0 \rightarrow 0 - y_0 = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \quad x_1 = x_0 - \frac{y_0}{f'(x_0)}$$

$$x = 0 \rightarrow y_1 - y_0 = f'(x_0) \cdot (0 - x_0) \quad y_1 = y_0 - x_0 \cdot f'(x_0)$$

$$x_1 + y_1 = 9$$

$$x - \frac{y}{y'} + y - x \cdot y' = 9$$

"דוגמית" מתוך
הפתרון של בלוך

$$x - \frac{y}{y'} + y - x \cdot y' = 9$$



$$1 - \frac{y' \cdot y' - y \cdot y''}{(y')^2} + y' - 1 \cdot y' - x \cdot y'' = 0$$

$$\frac{y \cdot y''}{(y')^2} - x \cdot y'' = 0$$

$$y'' \cdot \left[\frac{y}{(y')^2} - x \right] = 0$$



"דוגמית" מתוך
הפתרון של בלוך

$$\left[\frac{y}{(y')^2} - x \right] = 0$$

$$\frac{(y')^2}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = \pm \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{y'}{2 \cdot \sqrt{y}} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{y})' = -(\sqrt{x})'$$

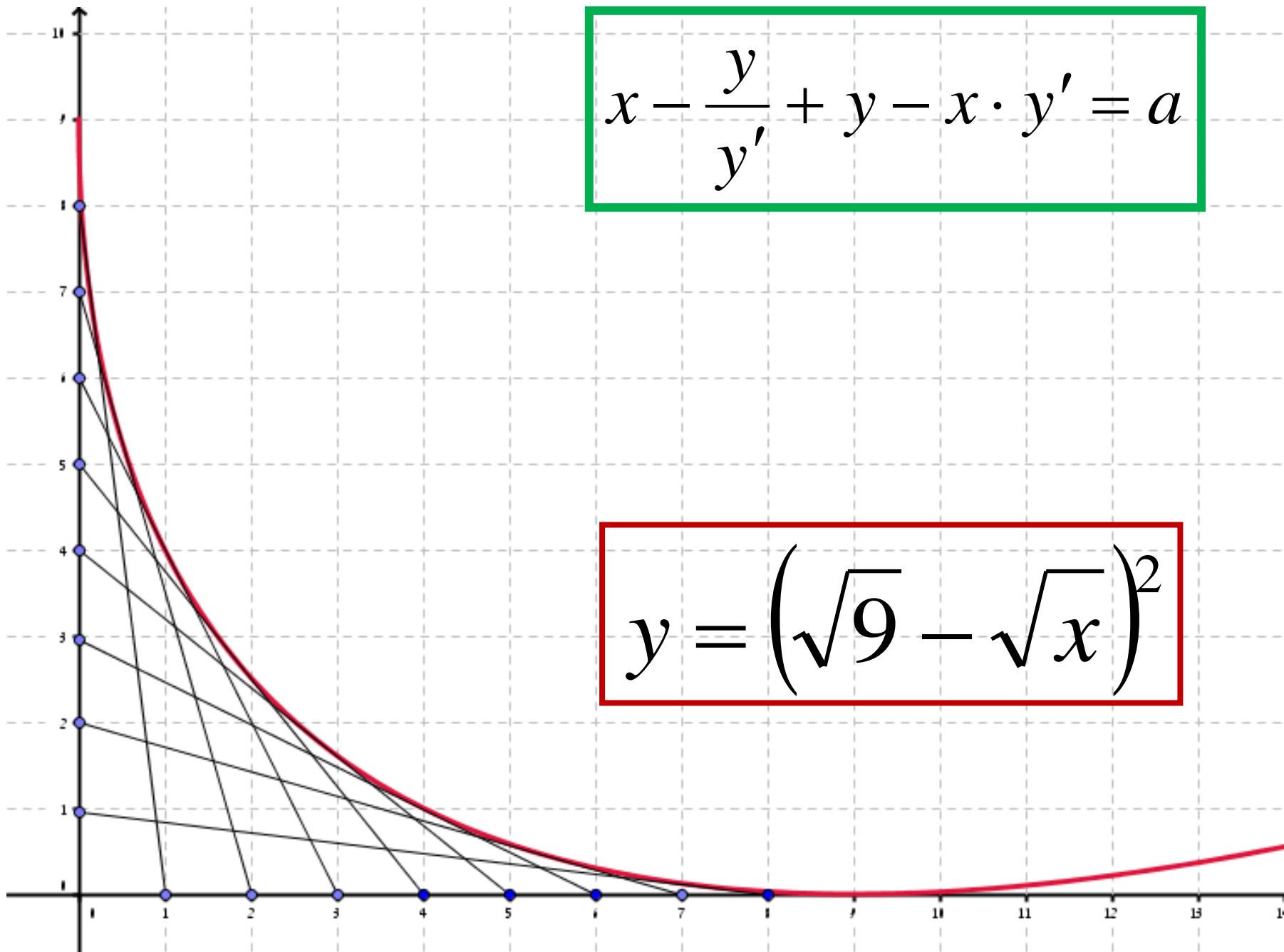
$$\sqrt{y} = -\sqrt{x} + k$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{9}$$

$$y = (\sqrt{9} - \sqrt{x})^2$$

$$x - \frac{y}{y'} + y - x \cdot y' = a$$

$$y = (\sqrt{9} - \sqrt{x})^2$$



"דוגמית" מתוך
החקירה שלי

$$x - \frac{y}{y'} + y - x \cdot y' = 9$$

$$y'' \cdot \left[\frac{y}{(y')^2} - x \right] = 0$$



$$y = \left(\sqrt{9} - \sqrt{x} \right)^2$$

"דוגמית" מתוך
החקירה שלי

$$x - \frac{y}{y'} + y - x \cdot y' = 9$$

$$y'' \cdot \left[\frac{y}{(y')^2} - x \right] = 0$$

$$y'' = 0 \quad y' = c$$

$$y = cx + d$$

"דוגמית" מתוך
החקירה שלי

$$x - \frac{y}{y'} + y - x \cdot y' = 9$$

$$y = cx + d$$

הצבה במשוואה הדיפרנציאלית

$$x - \frac{cx + d}{c} + cx + d - x \cdot c = 9$$

$$c = \frac{d}{d - 9}$$

$$y = \frac{d}{d - 9} \cdot x + d$$

משוואה זו שייכת למשפחה של משוואות דיפרנציאליות ע"ש [Alexis Clairaut](#), שהציג אותן ואת דרך פתרון בשנת 1734

$$x - \frac{y}{y'} + y - x \cdot y' = 9$$

$$y'' \cdot \left[\frac{y}{(y')^2} - x \right] = 0$$

$$y'' = 0$$

$$\left[\frac{y}{(y')^2} - x \right] = 0$$

$$y = \frac{d}{d-9} \cdot x + d$$

פתרון פרמטרי

$$y = \left(\sqrt{9} - \sqrt{x} \right)^2$$

פתרון סינגולרי

חיפשונו $y = f(x)$ כך ש ה"קטעים" יהיו משיקים.....

ומצאנו:

$$y = \frac{d}{d-9} \cdot x + d$$

משפחה של ישרים

נבחר:

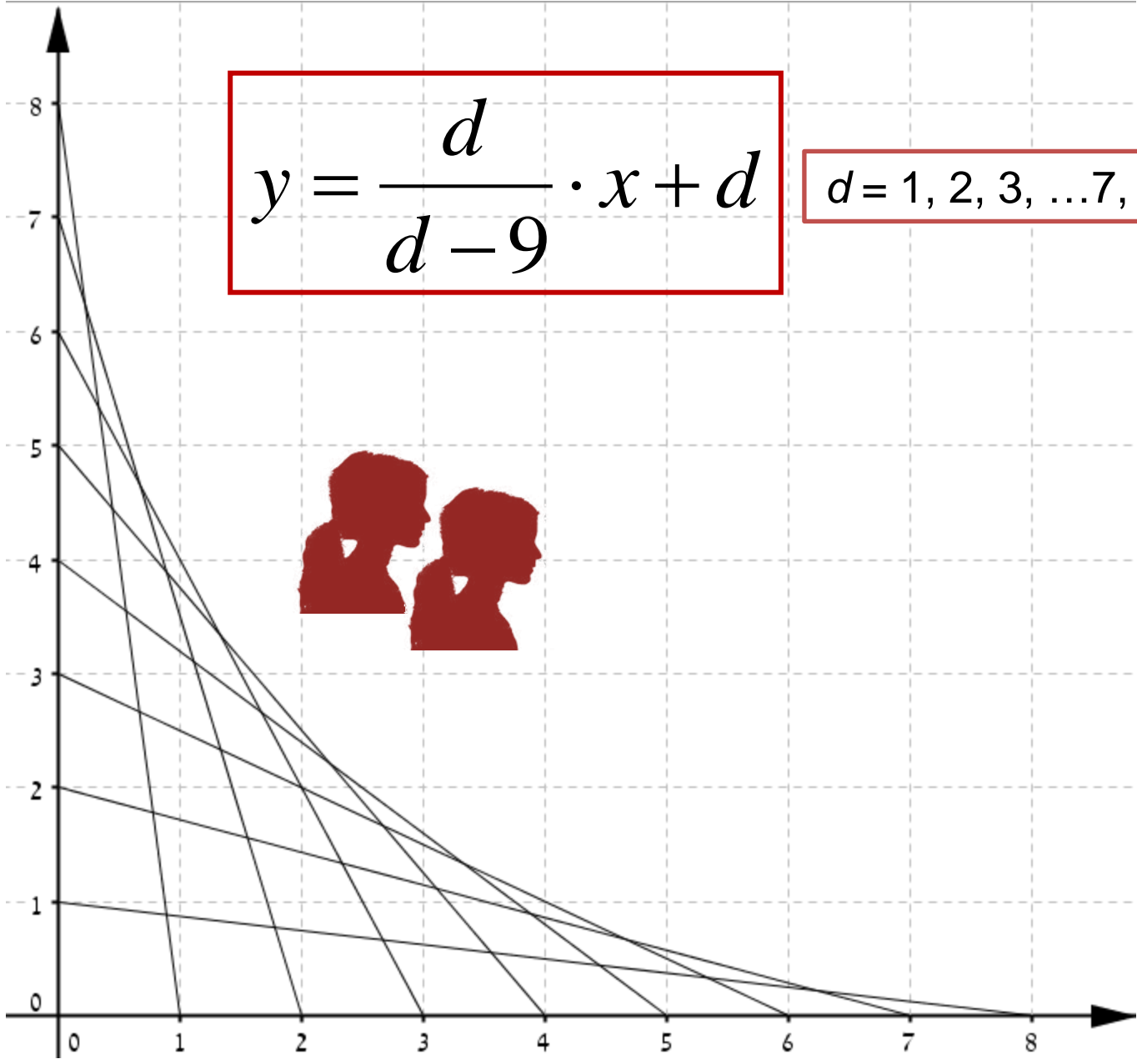
$$d = 1, 2, 3, \dots, 7, 8$$

$$y = \left(\sqrt{9} - \sqrt{x} \right)^2$$

פרבולה

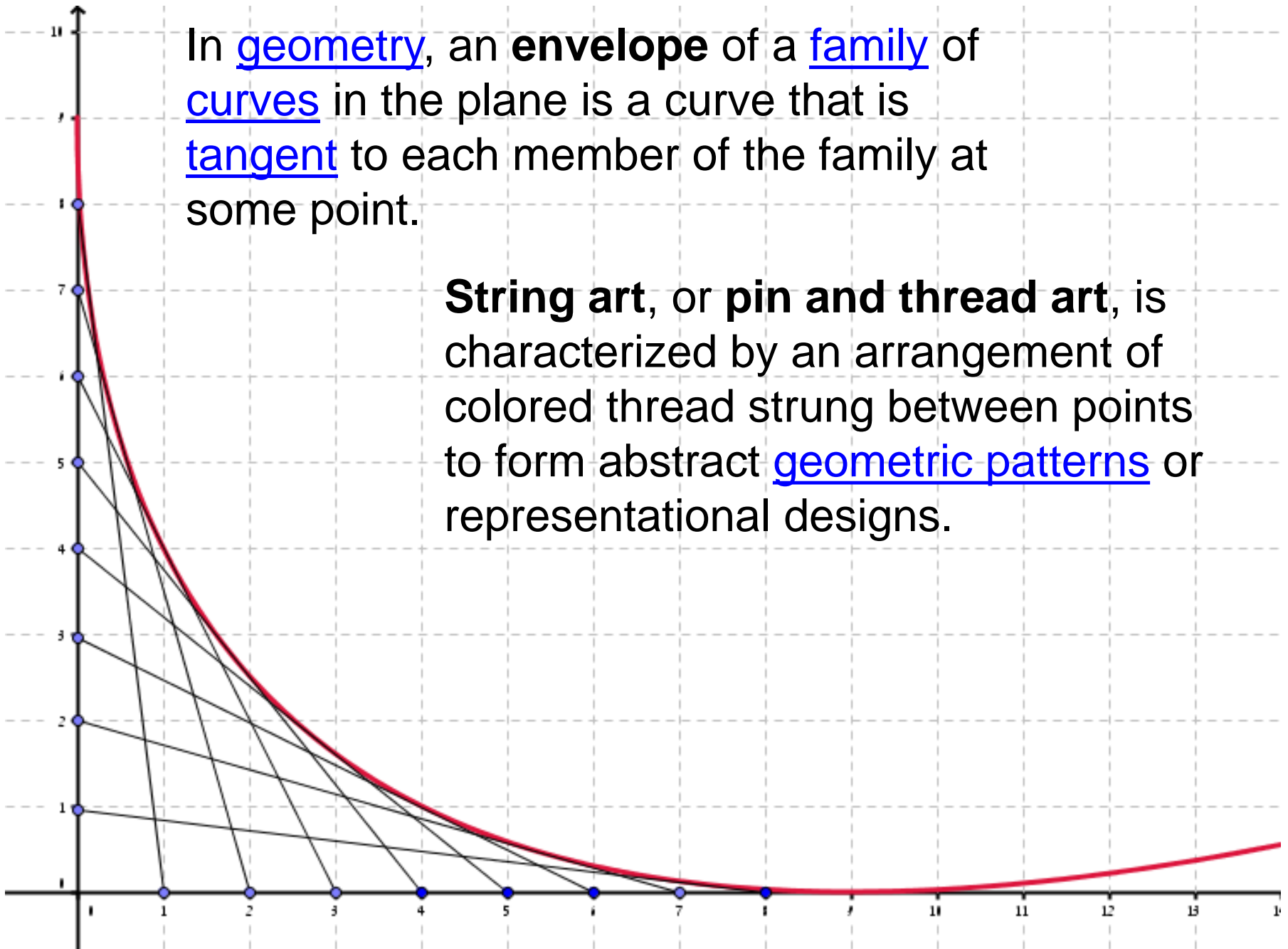
$$y = \frac{d}{d-9} \cdot x + d$$

$d = 1, 2, 3, \dots, 7, 8$



In [geometry](#), an **envelope** of a [family](#) of [curves](#) in the plane is a curve that is [tangent](#) to each member of the family at some point.

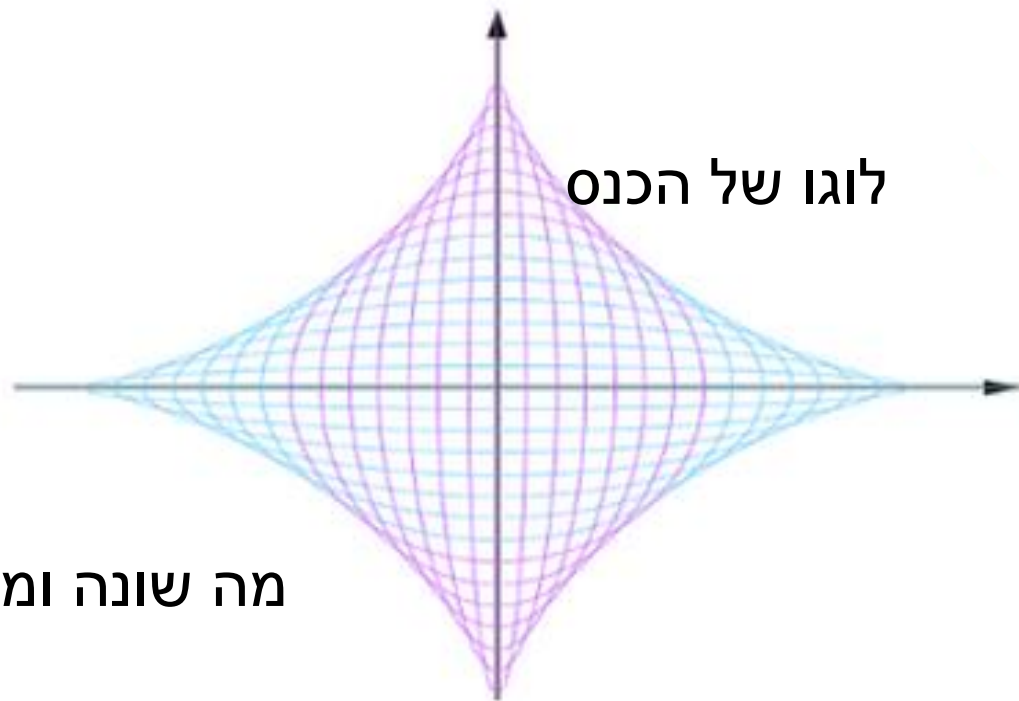
String art, or **pin and thread art**, is characterized by an arrangement of colored thread strung between points to form abstract [geometric patterns](#) or representational designs.



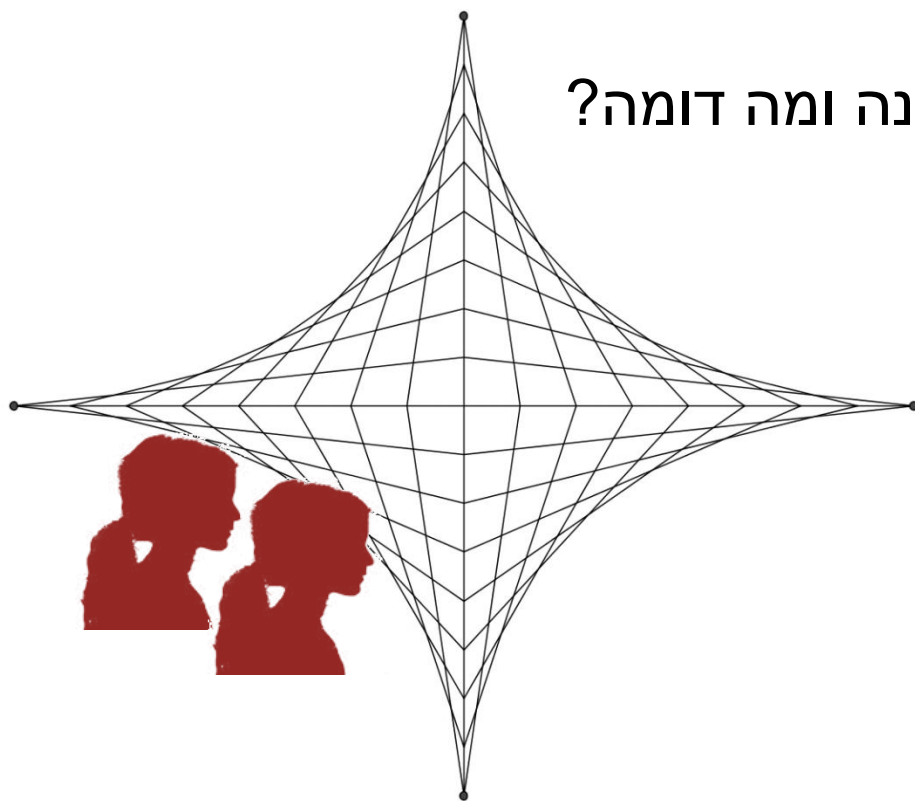
Gaudí used [hyperboloid structures](#) in later designs of the Sagrada Família



לוגו של הכנס



מה שונה ומה דומה?



הסיפור בא להאיר



הטמעת חלופות בלמידה ובהערכה מצריכה ומזמנת
העמקה והרחבה של הידע המתמטי של המורים.

יעד

אין סילבוס מוכן מראש – התכנים בהתאם
לסוגיות המתמטיות המתעוררות תוך כדי עבודת
התלמידים.

אתגר

מסגרת של קהילת "מורים מנחים" בתמיכה גם
של מומחה מתמטיקה.

פתרון

שאלות, הארות, הערות