

חקירת מקומות גאומטריים בסביבת גאומטריה דינמית - מה אפשר ללמוד מזה?

משה סטופל
מכללת שאנן, מכללת גורדון

רותי סגל
מכללת שאנן, מכללת אורנים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

- המקום הגיאומטרי כהגדרתו כאוסף כל הנקודות בעלות תכונה משותפת ובתכונה זו ניתן להשתמש לפתרון של מגוון רחב של בעיות

- מקובל לתאר את המקומות הגיאומטריים היסודיים כ: הקו הישר, קווים מקבילים, אנך אמצעי לקטע, חוצה הזווית, המעגל, הפרבולה, האליפסה וההיפרבולה.

- לפעמים הפעולה שבוצעה מובילה ליצירת מקום גיאומטרי כצורתו של המקום המקורי ולפעמים נוצר מקום גיאומטרי מסוג אחר. כאן נתמקד בקבלת מקומות גיאומטריים הדומים בצורתם למקום הגיאומטרי המקורי.

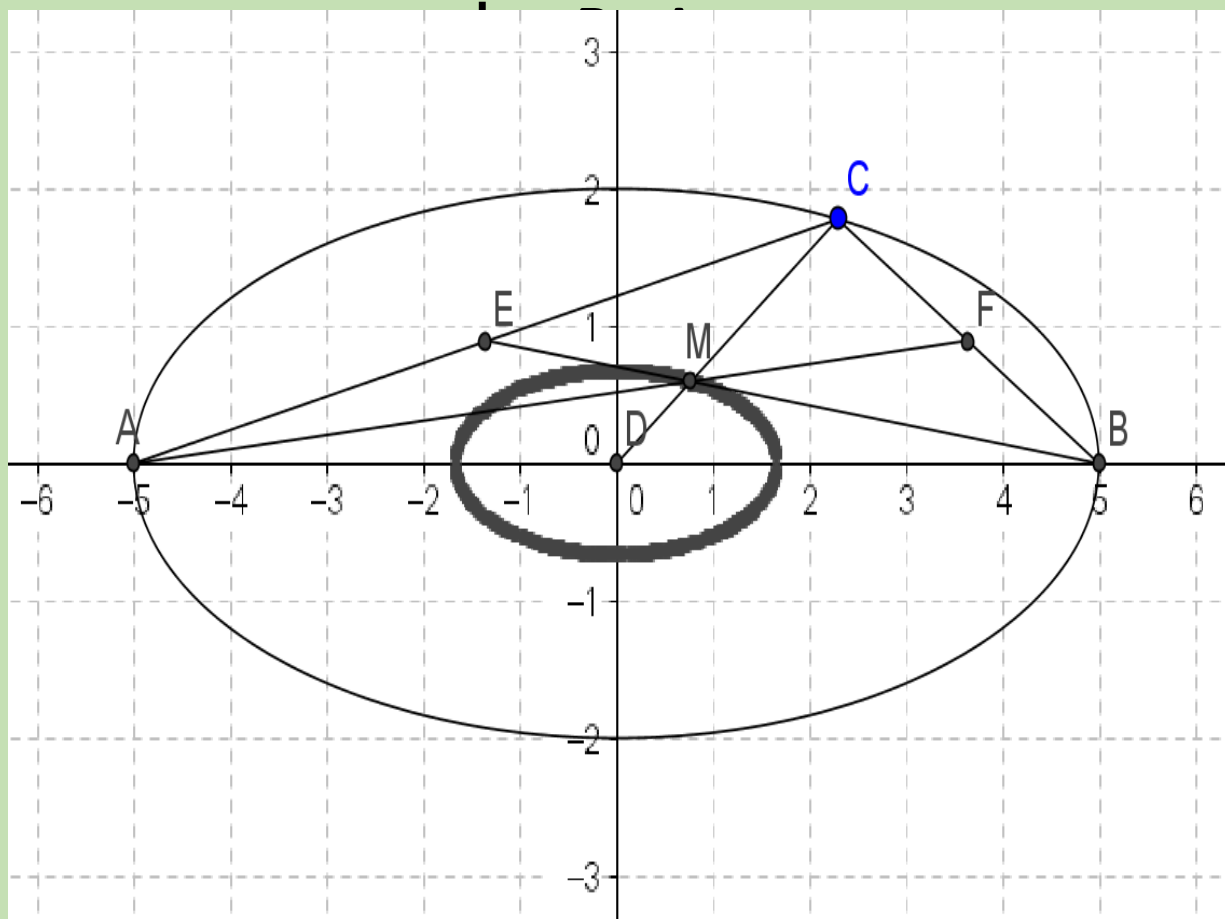
שילוב תוכנה גיאומטרית דינמית (D.G.S) בתהליך ההוראה והלמידה

- מחקרים בחינוך מחפשים אחר דרכים לשפר את איכות ההוראה והלמידה ומתוך כך הם מתמקדים גם בשילוב הטכנולוגיה בהוראה. הכלי הטכנולוגי מאפשר לבנות ולהציג אובייקטים מתמטיים באופן דינמי תוך כדי מתן משוב למשתמש במהלך פתרון בעיות (Alakoc, 2003; Martinovic & Manizade, 2013).

- בלמידה באמצעות כלי טכנולוגי תלמידים יכולים לתאר טוב יותר מושגים וקשרים מתמטיים בהשוואה להוראה שאינה משלבת כלי טכנולוגי. הלומדים משיגים הבנה טובה יותר של מושגים אלה והם מונגשים עם רעיונות מתמטיים ברמה גבוהה (Hohenwarter, Hohenwarter & Lavicza, 2008).

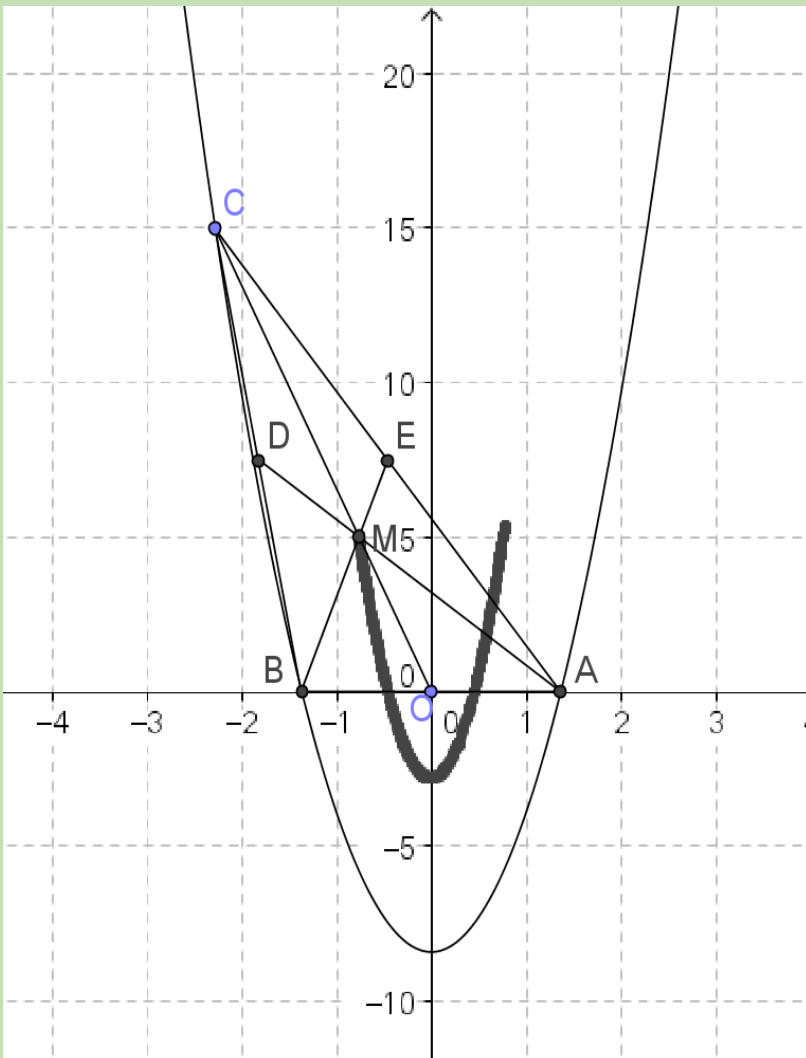
שלב א' הצגת משימות חקר ראשוניות

1. לבנות אליפסה קנונית החותכת את נקודה כלשהי C על האליפסה, כך ש- $\angle CAB$ מתקבל משולש CAB . מחברים את הצירים. הקטע OC הוא תיכון במשולש ABC . הנקודה M – נקודת מפגש התיכונים של המשולש ABC . הנקודה C תנוע בהתאמה הנקודה M הגיאומטרי עליו נעה M ?



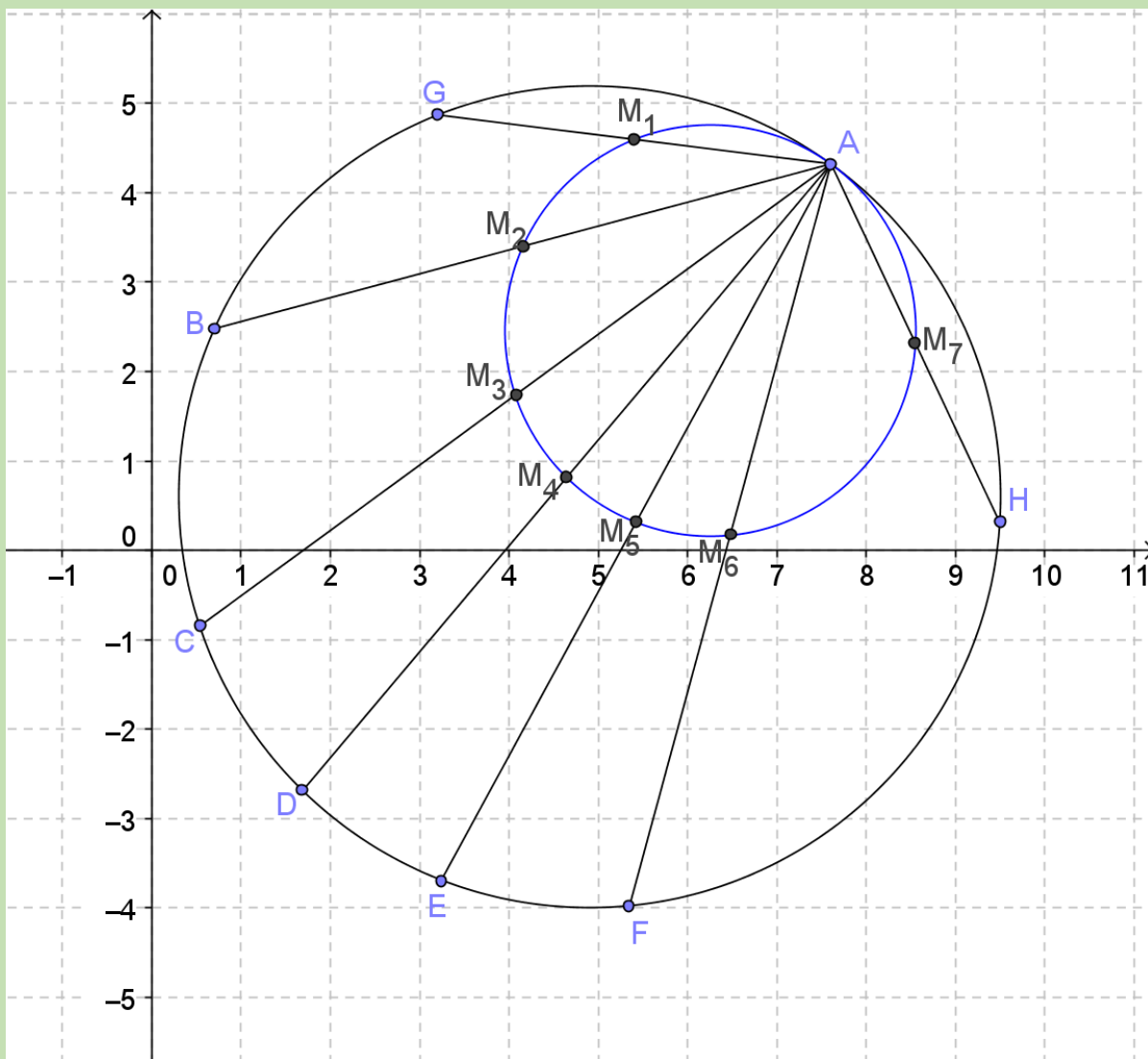
שלב א' הצגת משימות חקר ראשוניות

2. לבנות פרבולה שקודקודה על ציר ה- y , החותכת את ציר ה- x ב- A ו- B . לבחור נקודה כלשהי C על הפרבולה, כך שניתן ישר AC ו- BC יחלקו את המשולש CAB למשולשים CAM ו- CBM ש- M היא נקודת מפגש התיכונים במשולש CAB . ראשית הצירים, והקטע OC הוא תיכון במשולש CAB . על הישר OC בנייה את הנקודה M – נקודת מפגש התיכונים במשולש CAB . שים לב שהנקודה M היא נקודת מפגש התיכונים במשולש CAB . השווה את המיקום של הנקודה M עם הנקודה M שנינו ב- M . מה המיקום של הנקודה M ?



שלב א' הצגת משימות חקר ראשוניות

3. לבנות מעגל על-פי שיעורי מרכז ורדיוס. A וממנה לבנות לפחות 6-8 מיתרים כל נקודות האמצע של כל אחד מהמיתרים: היכן נמצאות כל הנקודות M הנוצרות ב?



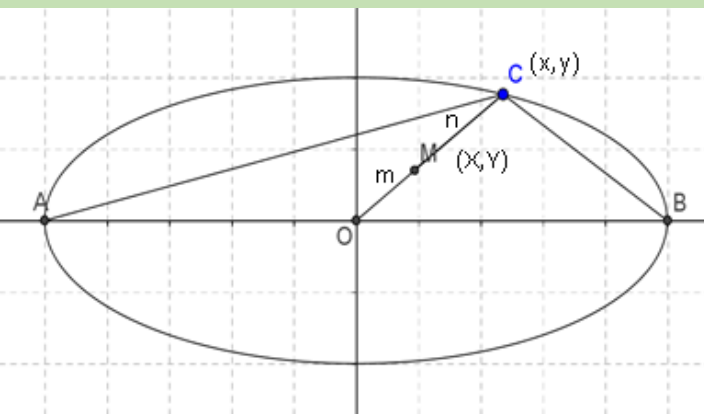
שלב ב' העמקה של משימת החקר

- נחקור את משימות 1-2 למקרה שהנקודה M מחלקת את הקטע OC ביחס השונה מ- $1:2$ (מפגש תיכונים) ואת משימה 3 כאשר הנקודה M מחלקת את המיתרים ביחס השונה מ- $1:1$ (אמצע המיתר).

- יישומון 1: מקום גיאומטרי באליפסה <https://www.geogebra.org/student/m149059>
- יישומון 2: מקום גיאומטרי בפרבולה <http://tube.geogebra.org/student/m149060>
- יישומון 3: מקום גיאומטרי בעיגול <http://tube.geogebra.org/student/m149061>

הוכחה מתמטית להיווצרות אליפסה בתוך אליפסה:

נתונה האליפסה הקנונית $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. הנקודה $C(X_c, Y_c)$ היא נקודה כללית על האליפסה.



איור 4

הנקודה M נמצאת על הקטע OC, כך שמתקיים: $\frac{MC}{OM} = \frac{n}{m} = k$.

כאשר הנקודה C נעה על האליפסה, הנקודה M נעה על המקום הגאומטרי המבוקש.

נסמן את שיעורי הנקודה M ב- (X_M, Y_M) .

משוואת המקום המבוקש צריכה לבטא קשר בין X_M ו- Y_M .

אם נצליח להציג את שיעורי הנקודה C באמצעות X_M ו- Y_M , נוכל להציב במשוואת האליפסה

ולקבל קשר בין X_M ו- Y_M .

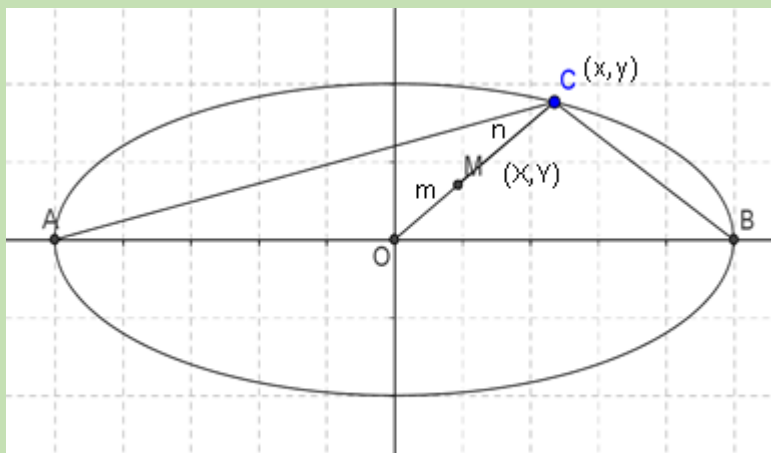
הוכחה מתמטית להיווצרות אליפסה:

לפי הנוסחה לחלוקת קטע ביחס נתון נוכל לרשום את שיעורי הנקודה M:

$$X_M = \frac{mx_C}{m+n}, Y_M = \frac{my_C}{m+n}$$

מכאן נקבל:

$$Y_C = \frac{m+n}{m} Y_M = \left(\frac{n}{m} + 1\right) Y_M = (k+1) Y_M, \quad x_C = \frac{m+n}{m} X_M = \left(\frac{n}{m} + 1\right) X_M = (k+1) X_M$$



איור 4

שיעורי הנקודה $C(X_C, Y_C)$ מקיימים את משוואת האליפסה.

נציב במשוואת האליפסה $x_C = (k+1)X_M$ ו- $Y_C = (k+1)Y_M$ ונקבל:

$$\frac{((k+1)X_M)^2}{a^2} + \frac{((k+1)Y_M)^2}{b^2} = 1$$

הוכחה מתמטית להיווצרות אליפסה:

שיעורי הנקודה $C(X_C, Y_C)$ מקיימים את משוואת האליפסה.

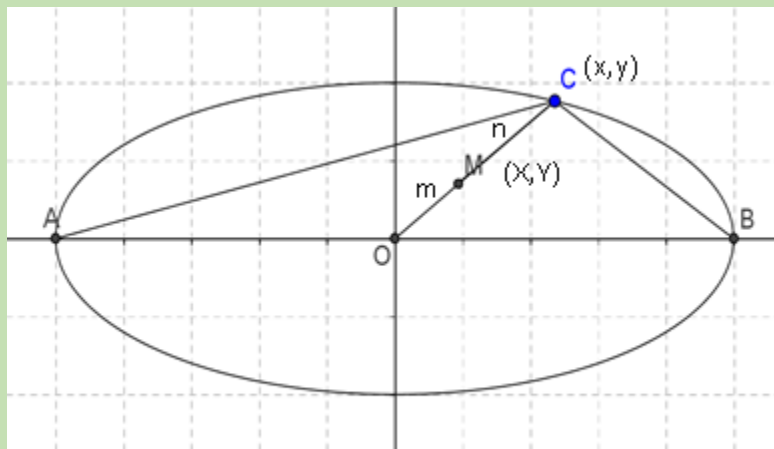
נציב במשוואת האליפסה $x_C = (k+1)x_M$ ו- $y_C = (k+1)y_M$ ונקבל:

$$\frac{((k+1)x_M)^2}{a^2} + \frac{((k+1)y_M)^2}{b^2} = 1$$

ולאחר פישוט

$$\frac{x_M^2}{\left(\frac{a}{k+1}\right)^2} + \frac{y_M^2}{\left(\frac{b}{k+1}\right)^2} = 1$$

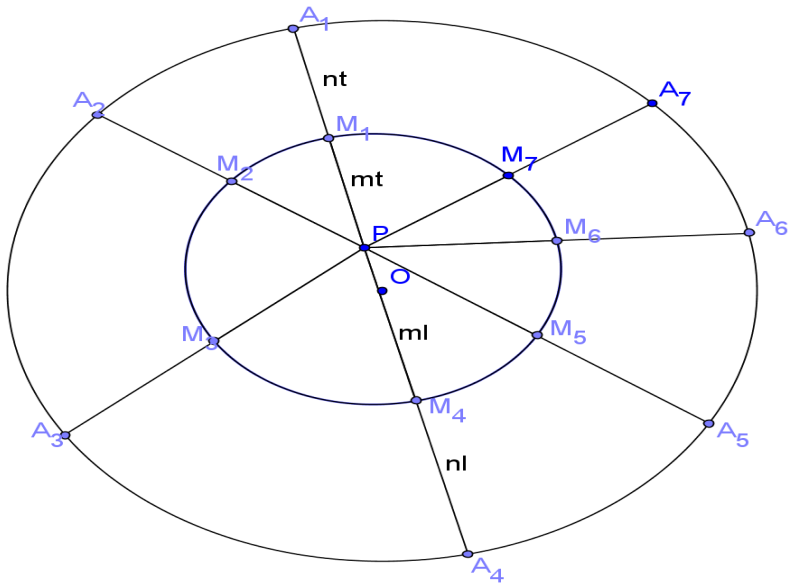
כלומר, הנקודה M נעה על אליפסה קנונית שאורכי הצירים שלה קטנים פי $(k+1)$ מאורכי הצירים של האליפסה המקורית.



איור 4

שלב ג' של משימת החקר

האם הנקודה שממנה יוצאים קטעים המתחברים עם נקודות שעל המקום
הגיאומטרי המקורי יכולה להיות בכל במקום בתוכו ועדיין הנקודה M תנוע על
מקום גיאומטרי דומה?



איור 6

שלב ג' של משימת החקר

קיים קשר מתמטי בין רדיוס המעגל המקורי לבין רדיוס המעגל שהתקבל

כתלות ביחס החלוקה k : $\left(\frac{n}{m} = k\right)$

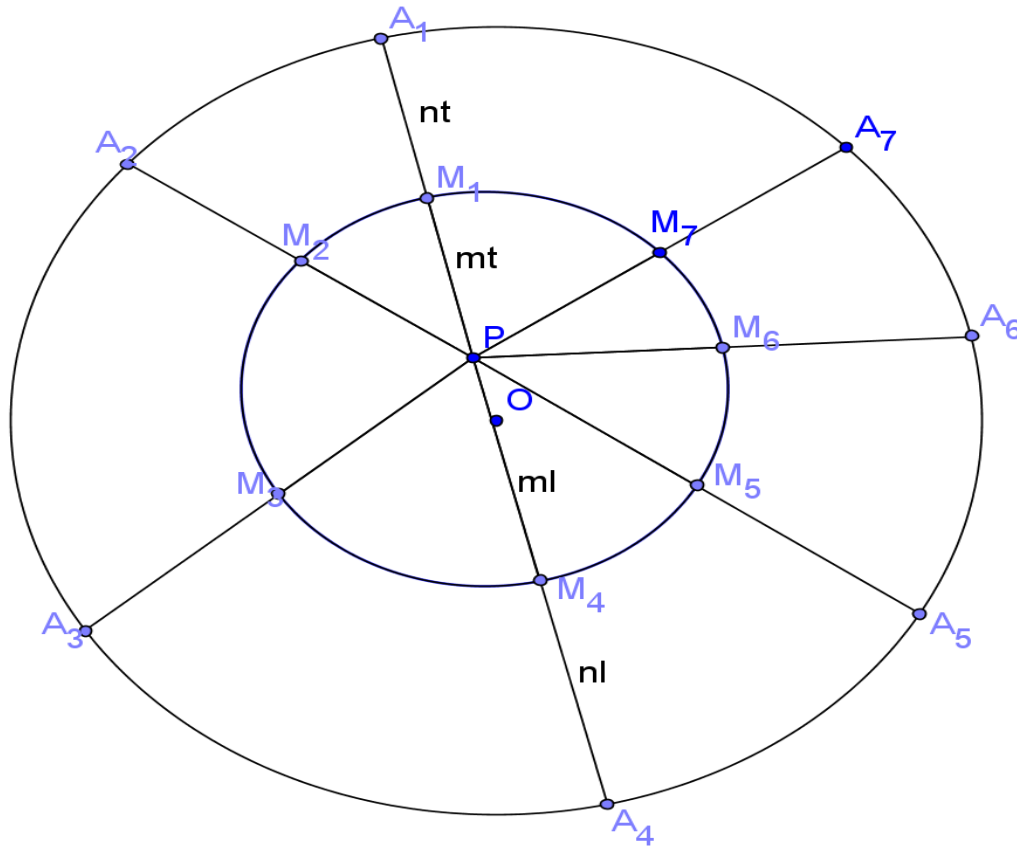
הנקודה O מרכז המעגל.

$$t(m+n) + l(m+n) = 2R \quad (1)$$

$$(t+l)(m+n) = 2R \quad (2)$$

$$m(t+l) = 2r \quad (3)$$

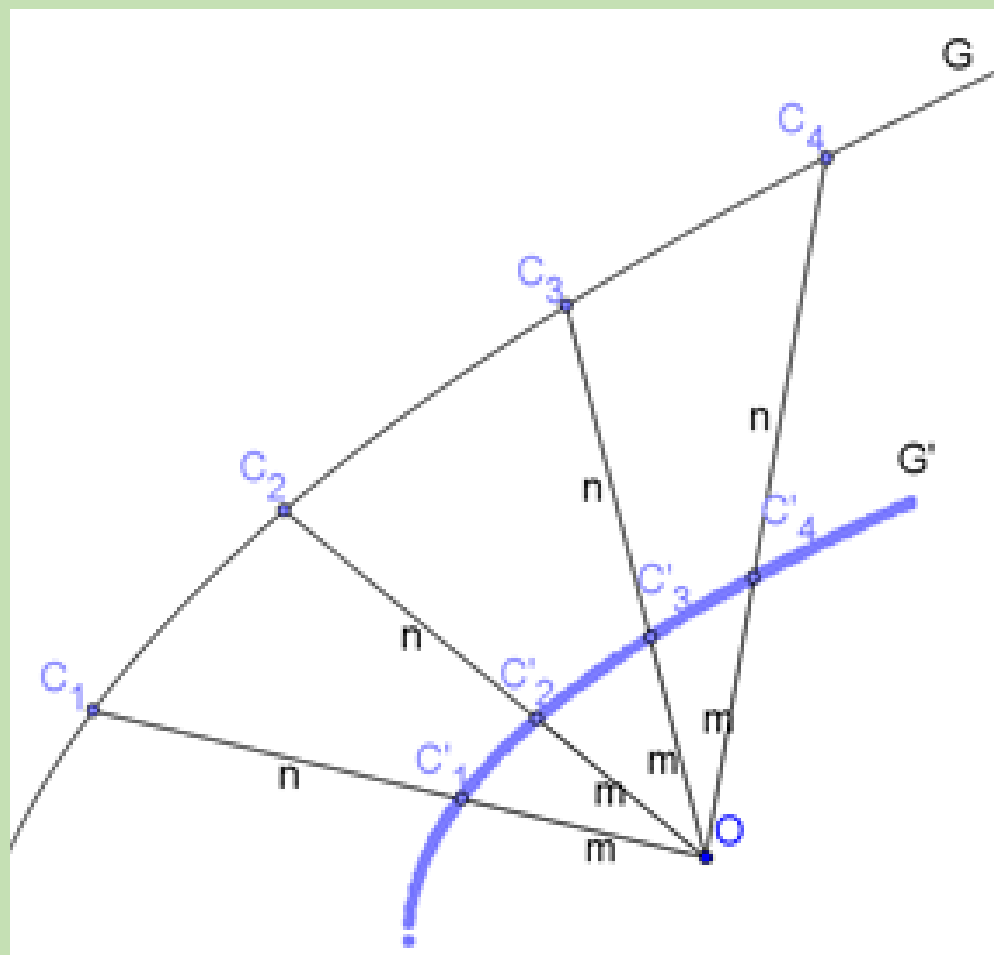
על ידי חלוקה של ביטוי (3) בביטוי (2) נקבל: $r = \frac{1}{k+1}R$ או $r = \frac{m}{n+m}R$



איור 6

יישומון 4: היוצרות מעגל בתוך מעגל. ביישומון ניתן להזיז את הנקודה P וכן בעזרת סרגל לשנות את יחס החלוקה k .

המקרה הכללי



איור 7

נקודה C נעה על עקום נתון. בוחרים נקודה O כלשהי מחוץ לעקום עם הנקודות $C_1, C_2, C_3, \dots$ שעל העקום.

על הקטעים $OC_1, OC_2, OC_3, \dots$ מסמנים נקודות $M_1, M_2, M_3, \dots$

מהקטעים באותו היחס $\frac{m}{n}$, כלומר, $\frac{OM_3}{M_3C_3} = \dots = \frac{m}{n}$

על איזה עקום נעות הנקודות $M_1, M_2, M_3, \dots$?

טרנספורמציות - הומוטתיה

- השימוש בטרנספורמציות שונות, בין יסודיות ובין מורכבות-מאפשר, במקרים רבים, פתרון פשוט יותר של בעיות בהנדסת מישור או בהנדסה אנליטית.
- ביצוע הטרנספורמציה מחזק את התפיסה, שצורה גיאומטרית איננה משהו "קפוא", אלא דבר שאפשר להניע.
- ההומוטתיה היא טרנספורמציה המתייחסת למרכז O ומתאימה לכל נקודה X נקודה X' על הישר OX כך ש $OX' = k \cdot OX$, כאשר k נקרא מקדם הדמיון.

הומוטתיה

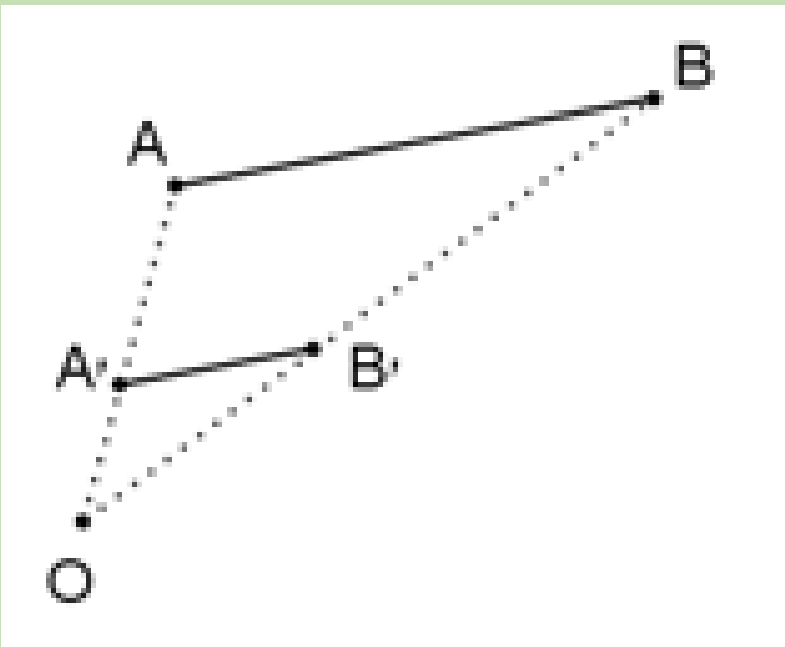
• התמונה של כל נקודה A על המקום הגאומטרי היא נקודה A' המקיימת $OA' = k \cdot OA$ כאשר O נקודה נתונה במישור ו- k מספר ממשי חיובי. נראה שלטרנספורמציה זו, הנקראת הומוטתיה, שתי תכונות המסבירות את התופעות שהתגלו בחקירה

1. אם A' ו- B' הן בהתאמה התמונות של הנקודות A ו- B אז מתקיים

$A'B' = k \cdot AB$. במילים אחרות: הקטע $A'B'$ הוא כיווץ (או הגדלה) של

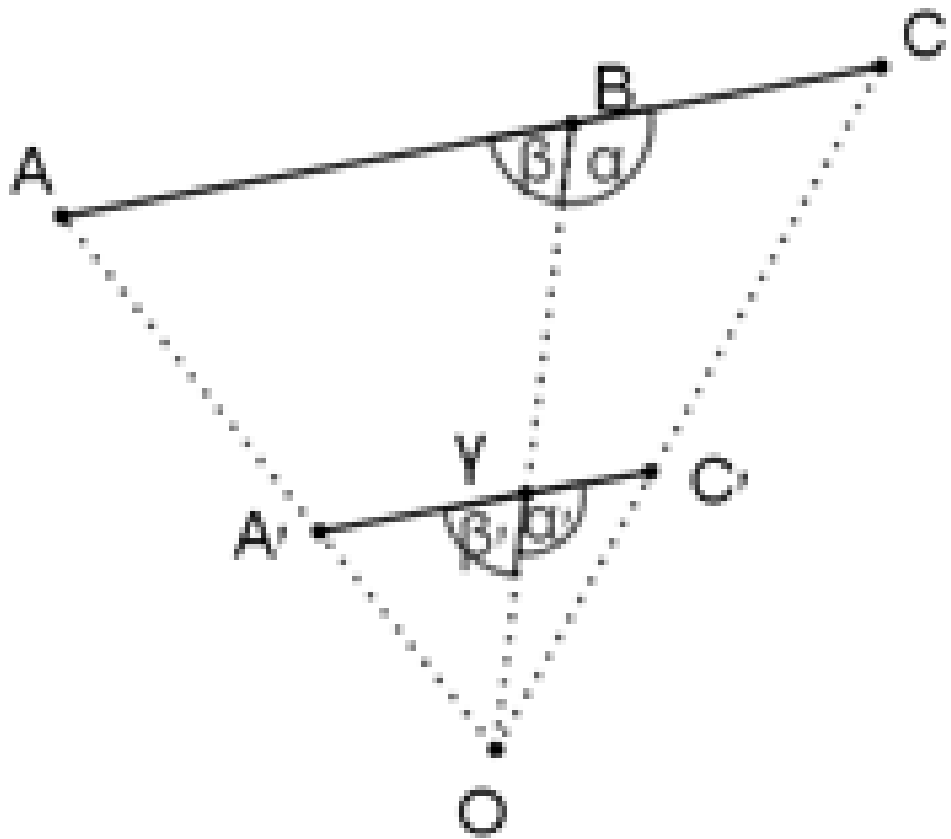
הקטע AB ביחס k .

תכונה זו נובעת מדמיון המשולשים $\triangle OA'B' \sim \triangle OAB$.



הומוטתיה

- התמונה של כל נקודה A על המקום הגאומטרי היא נקודה A' המקיימת $OA' = k \cdot OA$ כאשר O נקודה נתונה במישור ו- k מספר ממשי חיובי. נראה שלטרנספורמציה זו, הנקראת הומוטתיה, שתי תכונות המסבירות את התופעות שהתגלו בחקירה



2. אם A, B ו- C נמצאות על ישר אחד אז

תמונותיהן המתקבלות באמצעות

הטרנספורמציה נמצאות אף הן על ישר אחד. גם

תכונה זו נובעת מדמיון משולשים: כיוון ש- $\alpha =$

α' ו- $\beta = \beta'$, אם $\alpha + \beta = 180^\circ$ אז גם $\alpha' + \beta'$

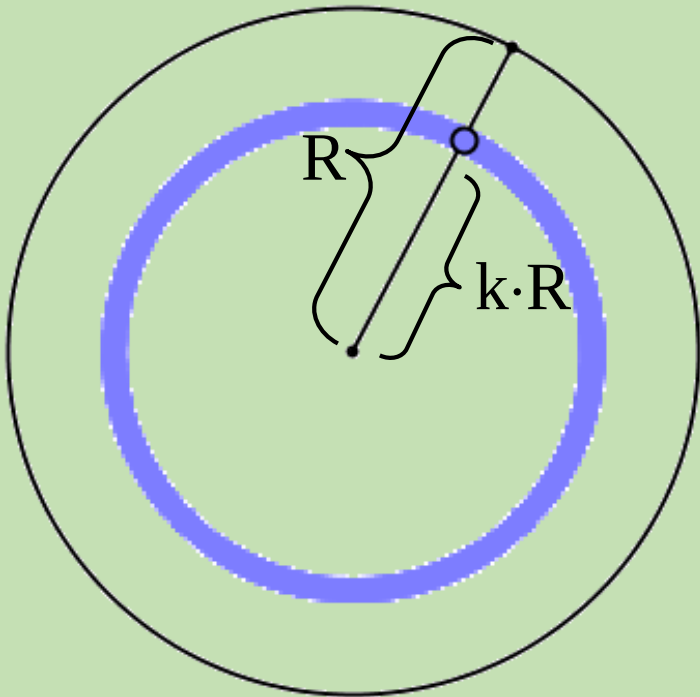
$= 180^\circ$.

הומוטתיה

- התמונה של כל נקודה A על המקום הגאומטרי היא נקודה A' המקיימת $OA' = k \cdot OA$ כאשר O נקודה נתונה במישור ו- k מספר ממשי חיובי.

רובד נוסף להסבר נקבל אם ניזכר בהגדרות של המקומות הגאומטריים:

מעגל הוא המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקיהן מנקודה נתונה, מרכז המעגל, הוא גודל נתון. נחשוב על מעגל שמרכזו P ומחוגו R . אם P התמונה של מרכז המעגל המתקבלת באמצעות הטרנספורמציה, אז העקומה שהתקבלה על ידי גרירה היא אוסף כל הנקודות שמרחקיהן מ- P' קבועים ושווים ל- $k \cdot R$, ולכן קיבלנו מעגל חדש שמחוגו $k \cdot R$.



דוגמאות נוספות להומוטתיה בשילוב תוכנה דינמית

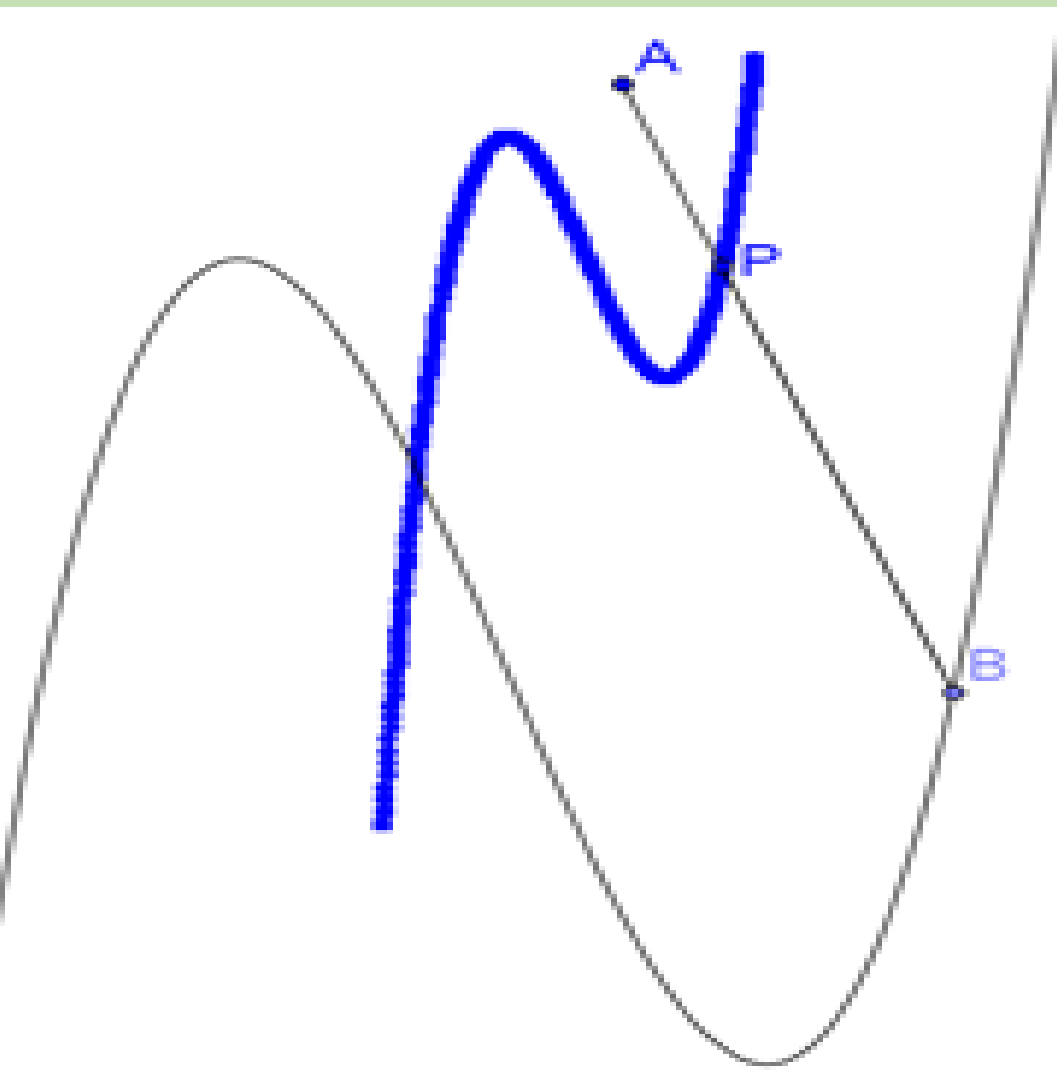
דוגמא א' – גרף של פונקציה אלגברית

לוקחים גרף של פונקציה אלגברית, לדוגמא $f(x)=x^3-9x^2$. בוחרים נקודה כלשהי A מחוץ לגרף, ומחברים אותה עם נקודה כלשהי B, על גרף

הפונקציה. מחלק את הקטע AB ביחס k כלומר $\frac{BP}{BA} = k$.

יישומון 5: הדגמת היווצרות מקום גיאומטרי דומה על גרף פונקציה אלגברית. ביישומון סרגלים המאפשרים לשנות את ערך הפרמטר של הפונקציה ואת גורם החלוקה.

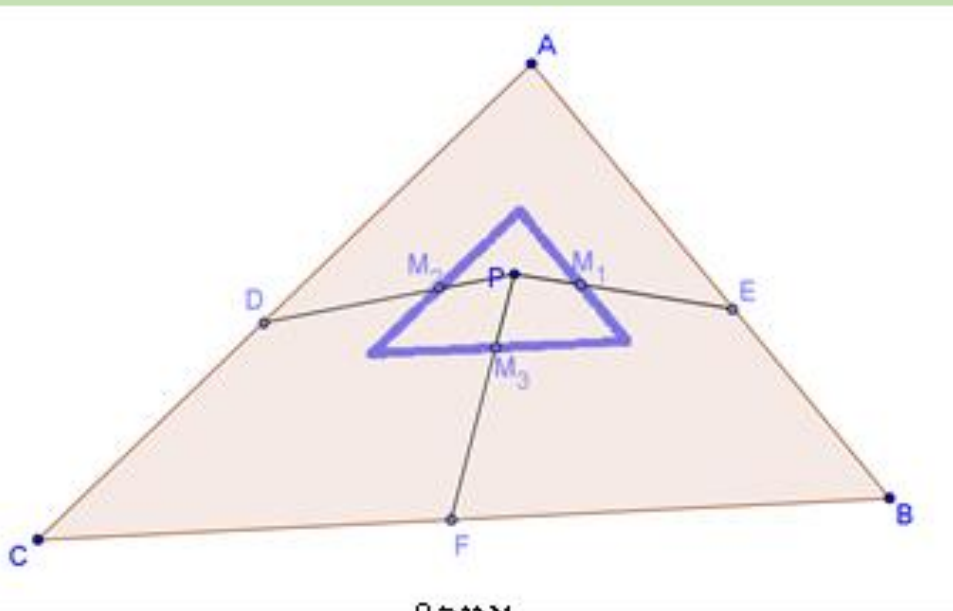
<http://tube.geogebra.org/student/m149066>



דוגמאות נוספות להומוטתיה בשילוב תוכנה דינמית

דוגמא ב' – הדגמת התכונה על משולש כשלהו

נתון משולש כלשהו ABC . בוחרים בתוכו נקודה כלשהי P . את נקודה זו מחברים בקווים ישרים עם נקודות שעל צלעות המשולש. על כל אחד מהקטעים שהתקבלו בונים את הנקודה M המתאימה המחלקת אותו ביחס k . הנקודות M המתקבלות בדרך זו נמצאות על צלעות משולש הדומה למשולש המקורי כפי שנראה באיור 9.



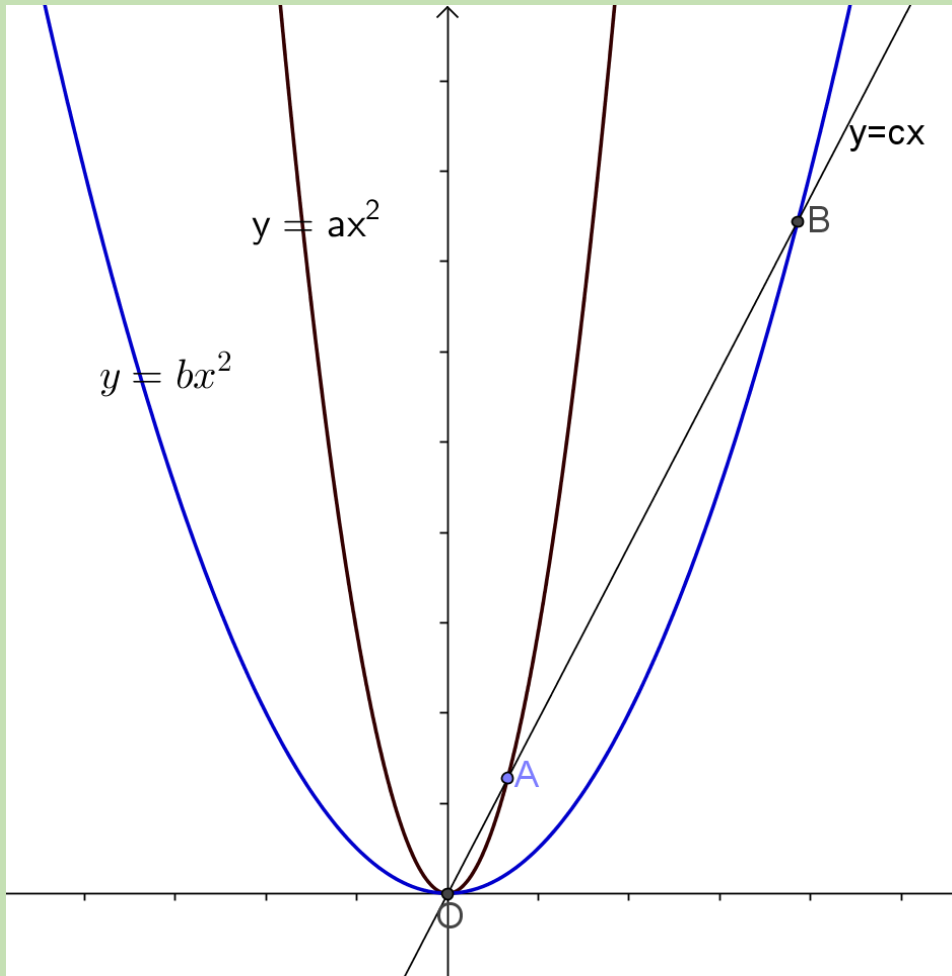
איור 9

יישומון 6 : <http://tube.geogebra.org/student/m149069>

האם כל הפרבולות דומות?

נתונות שני פרבולות בעלות קדקוד משותף בראשית הצירים.
 $y = ax^2$ ו- $y = bx^2$ כאשר $a, b > 0$ ו- $a > b$, כנראה באיור
10. ישר $y = cx$ היוצא מראשית הצירים חותך את הפרבולות
בנקודות A ו- B.

יש להוכיח שיחס הקטעים $\frac{BA}{AO}$ קבוע ואינו תלוי ב- c .



איור 10

פריטים מבחינות בגרות 5 יחל (807)

נקודה E נמצאת על אליפסה שמשוואתה $x^2 + 4y^2 = 36$.

האליפסה חותכת את ציר ה-x בנקודות A ו-B.

א. מצא את משוואת העקום שעליו נמצא המקום הגאומטרי של מפגשי התיכונים במשולש ABE.

ב. הנקודות $(\sqrt{2}, y)$ נמצאות על המקום הגאומטרי שאת משוואתו מצאת

בסעיף א. חיברו נקודות אלה עם הנקודות A ו-B, וטצר מצולע.

מצא את שטח המצולע.

ג. האליפסה הנתונה התקבלה ממעגל על ידי הכפלת שיעורי ה-y של כל אחת

מהנקודות על המעגל בקבוע, בלי לשנות את שיעורי ה-x שלהן.

(1) מהי משוואת המעגל?

(2) האם למעגל ולמקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א יש נקודות חיתוך? נמק.

פריטים מבחינות בגרות 5 יחל (807)

נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 887$.

בנקודה $A(20, 21)$ שעל המעגל העבירו

משיק למעגל.

נקודה C נמצאת על קוטר המעגל AB

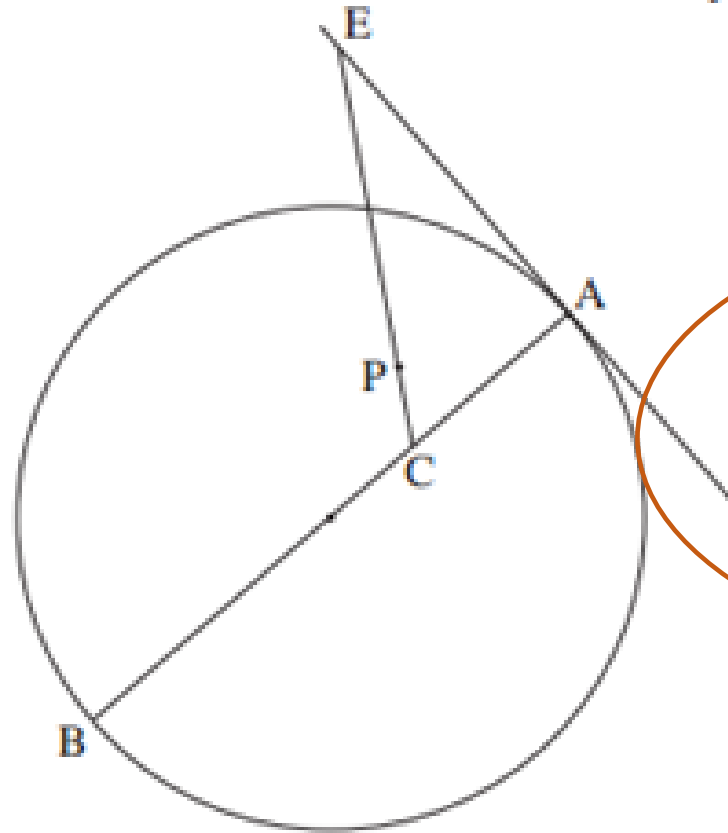
כך ש- $AC = \frac{1}{3}AB$.

נקודה E נמצאת על המשיק,

ונקודה P נמצאת על הקטע EC

כך ש- $CE = 5CP$

(ראה ציור).



א. מצא את שיעורי הנקודה C .

ב. הבע את השיעורים של הנקודה E באמצעות השיעורים של הנקודה P ,

ומצא את משוואת המקום הנאומטרי של כל הנקודות P הנוצרות באופן שתואר.

הערך המוסף המתמטי והדידקטי

הבנה משמעותית
יותר של המושג
"מקום גיאומטרי"

מבט מתמטי רחב
ומעמיק על תכונת
השימור של
אובייקטים מתמטיים

כלי מתמטי נוסף
ב"ארגז הכלים"
של המורה ושל
התלמיד

הכלי הטכנולוגי
כשותף להבנה של
תהליכים דינמיים
מופשטים

הכללה של תופעה
מתמטית והקשה
למשימות דומות

שילוב פעילות חקר
בתהליכי הלמידה

פיתוח ידע מתמטי
להוראת מתמטיקה
בהיקף של 5 יח"ל

קישוריות בין
הנושאים השונים
(דמיון, מקום
גיאומטרי,
פונקציות...)