

בעיית חמשת המישורים (ג'ורג' פוליה) צפייה ודיון בשיעור מצולם

אהובה גוטמן וצילה ירחי

כנס "להיות מורה למתמטיקה"
31.3.15 בשפיים



הבעיה המוצגת בשיעור:

חמישה מישורים חותכים
את המרחב.
כמה חלקים נוצרים?

צמצום הבעיה

- כמה חלקי מרחב חותך מישור אחד?
- כמה חלקי מרחב חותכים שני מישורים?
- כמה חלקי מרחב חותכים שלושה מישורים?

מספר מישורים	מספר חלקי מרחב
1	2
2	4
3	8

שרטוט שני ישרים (שמייצגים מישורים במרחב)
על הלוח וספירת החלקים שנוצרים.
הצגת הלוח כמישור שלישי שמחלק את המרחב.



צמצום הבעיה והרחבה

- מקרה קצה: אפס מישורים חותכים מרחב
- ניחוש: כמה חלקי מרחב חותכים ארבעה מישורים?

מספר מישורים	מספר חלקי מרחב
0	1
1	2
2	4
3	8
4	?16

בניית בעיה אנלוגית דו-ממדית

חלוקת המישור על ידי ישרים

● על ידי ישר אחד

● שני ישרים

● שלושה ישרים

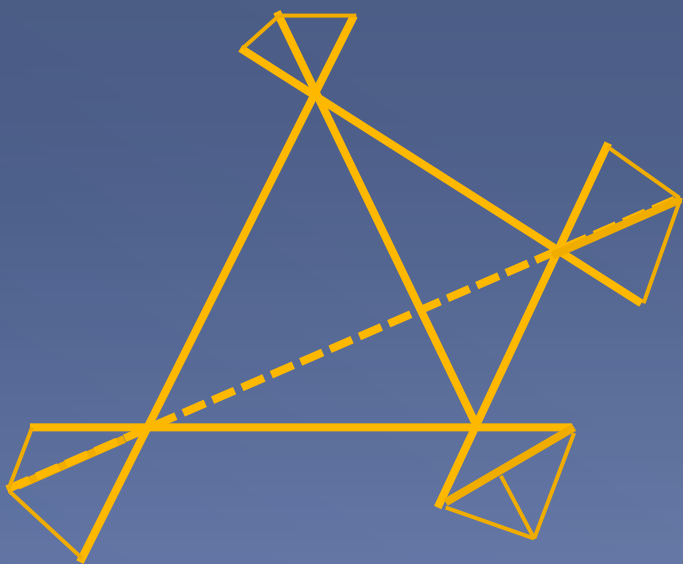
שימוש בשני הישרים שעל הלוח וספירת החלקים שנוצרים.
הוספת ישר שלישי וגילוי התחום הסופי.



מספר מחלקים	מספר חלקי מרחב	מספר חלקי מישור
0	1	
1	2	2
2	4	4
3	8	
4	16?	

הצגת ייצוג לבעיה התלת-ממדית

- ארבעה מישורים שחותכים מרחב מיוצגים על ידי טטראדר אינסופי
- כמה חלקי מרחב נוצרים?



ספירת חלקי המרחב בטטראדר על ידי מיון בין סוגים שונים:

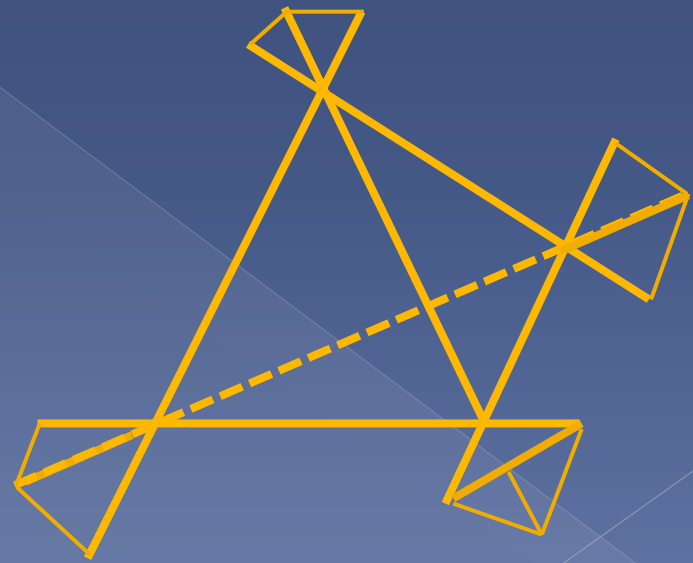
- חלק סופי (הטטראדר) – 1
- חלקים בעלי קדקוד משותף עם הטטראדר – 4
- חלקים בעלי מקצוע משותף עם הטטראדר – 6
- חלקים בעלי פאה משותפת עם הטטראדר – 4

סך הכל: 15 חלקים

סיכום ביניים

● תיקון הטבלה והוספת תגליות נוספות

מספר מחלקים	מספר חלקי מרחב	מספר חלקי מישור
0	1	1
1	2	2
2	4	4
3	8	7
4	15	



בניית בעיה אנלוגית חד-ממדית

● חלוקת ישר על ידי נקודות

מספר מחלקים	מספר חלקי מרחב	מספר חלקי מישור	מספר חלקי ישר
0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	4	3
3	8	7	4
4	15		
n			n+1



גילוי תבניות

כל משבצת בטבלה
היא הסכום של
המשבצת שמעליה וזו
שמשמאלה.

מספר מחלקים	מספר חלקי מרחב	מספר חלקי מישור	מספר חלקי ישר
0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	4	3
3	8	7	4
4	15	11?	5
5	26?		
n			n+1

האם נוכל להכליל את הפתרון?

דרך ראשונה לספירת החלקים

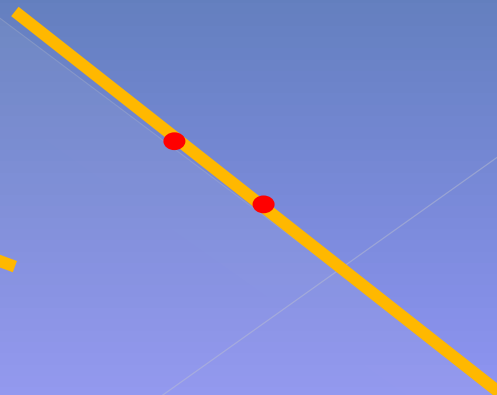
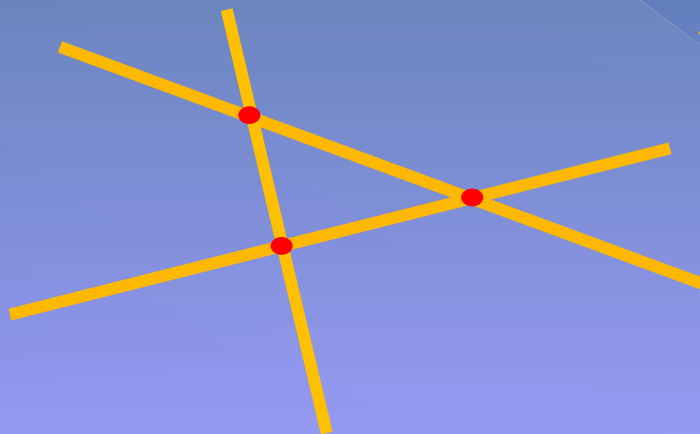
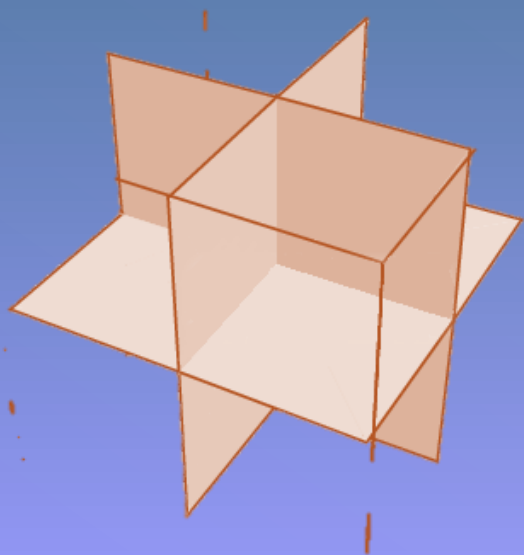
סופרים כמה תחומים (קטעים, חלקי מישור, חלקי מרחב)
מוסיף כל חותך (נקודה, ישר, מישור) שעובר.



דרך א'

ספירת התחומים שמוסיף כל אחד מהחותכים

- בישר: כמה תחומים מוסיפה כל נקודה?
- במישור: כמה תחומים מוסיף כל ישר חותך?
- במרחב: כמה תחומים מוסיף כל מישור חותך?



דרך א'

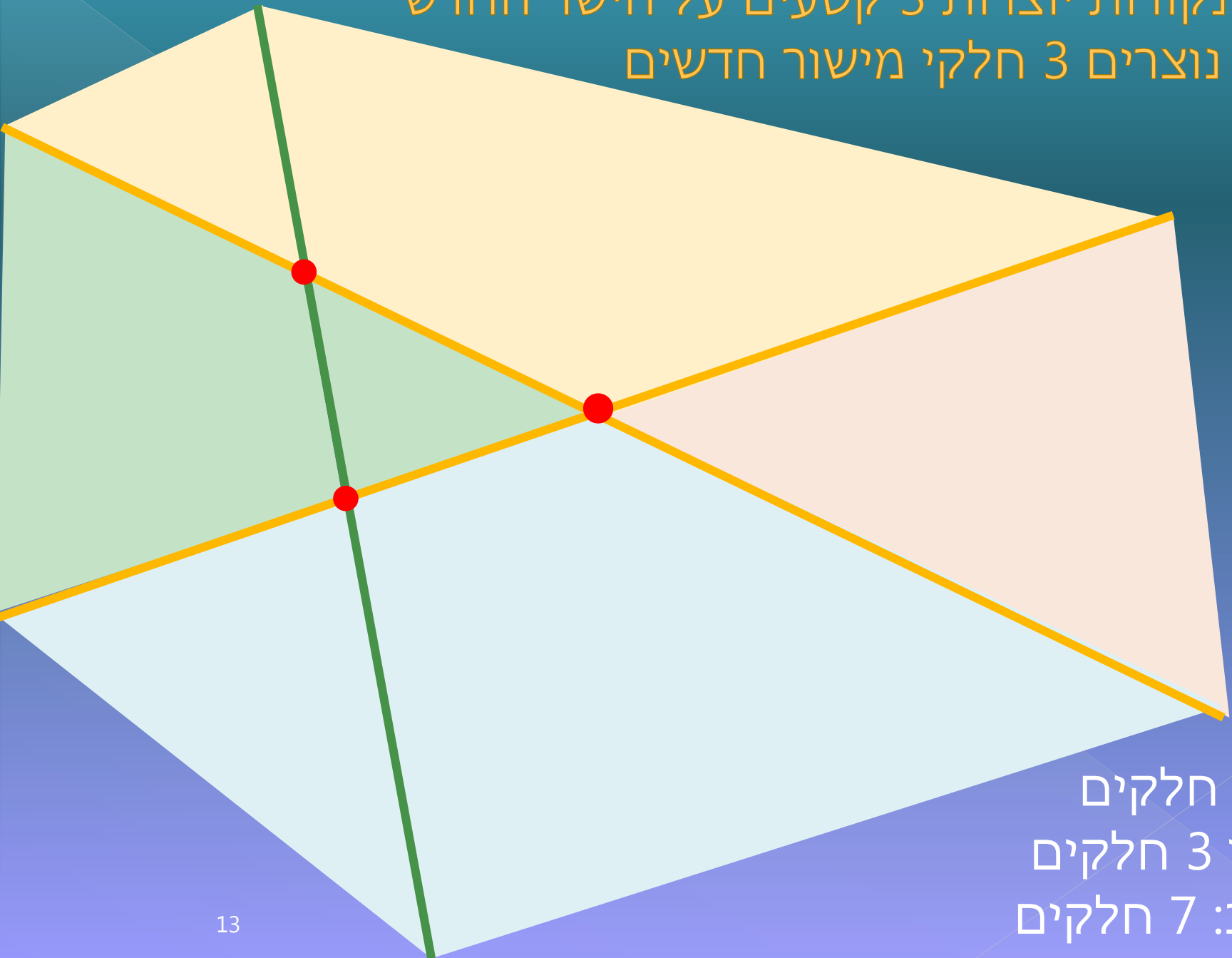
במישור: כמה תחומים מוסיף כל ישר חותך?

מה קורה כאשר מוסיפים ישר שלישי
לשני ישרים קיימים במישור?



הישר החדש חותך את 2 הישרים הקיימים ב-2 נקודות.

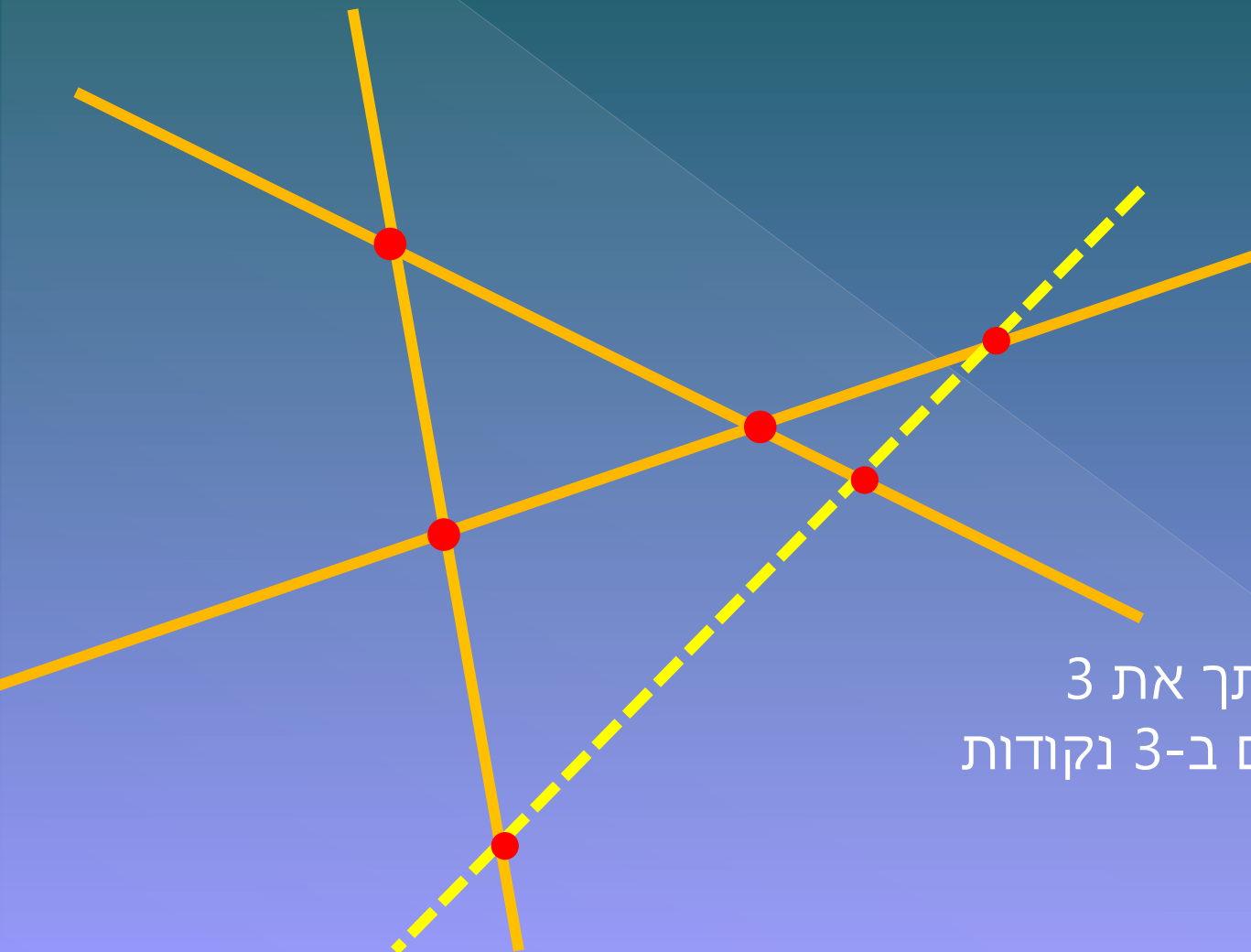
2 הנקודות יוצרות 3 קטעים על הישר החדש
וכך נוצרים 3 חלקי מישור חדשים



היו 4 חלקים
נוספו 3 חלקים
סה"כ: 7 חלקים

דרך א'

מה קורה כאשר מוסיפים ישר רביעי
לשלושה ישרים קיימים במישור?



הישר החדש חותך את 3
הישרים הקיימים ב-3 נקודות

3 הנקודות יוצרות 4 קטעים על הישר החדש וכך
נוצרים 4 חלקי מישור חדשים

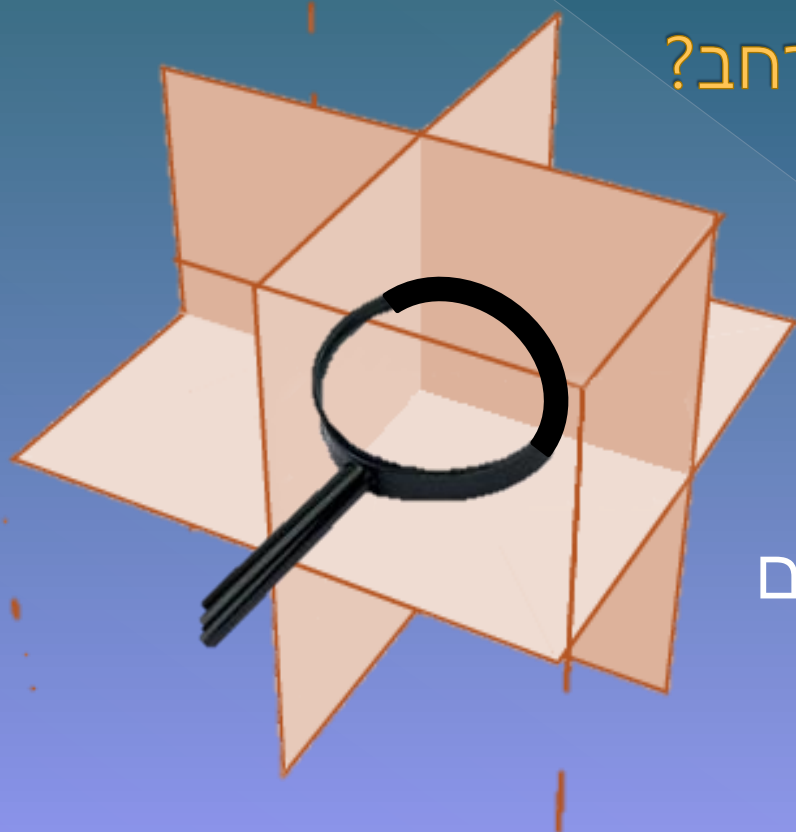


היו 7 חלקים
נוספו 4 חלקים
סה"כ: 11 חלקים

דרך א'

במרחב: כמה תחומים מוסיף כל מישור חותך

מה קורה כאשר מוסיפים מישור
שלישי לשני מישורים קיימים במרחב?



- בסך הכל, שלושה מישורים
מחלקים את המרחב ל-8 חלקים

דרך א'

מה קורה כאשר מוסיפים מישור רביעי
לשלושה מישורים קיימים במרחב?

המישור החדש חותך את 3 המישורים
הקיימים ב-3 ישרי חיתוך.

3 הישרים הללו
יוצרים 7 תחומים על
המישור החדש וכך נוצרים
7 חלקי מרחב חדשים.

הכללת הפתרון הראשון

$$\odot a_{n+1} = a_n + 1 = n + 1$$

$$\odot b_{n+1} = b_n + a_n = b_n + n + 1$$

$$\bullet b_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

$$\odot c_{n+1} = c_n + b_n = c_n + \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

$$\bullet c_n = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}$$

דרך שנייה לספירת החלקים

לכאורה, כל חותך מוסיף למערכת את אותו מספר חלקים שהיו בה לפני שהוא נוסף.
אך זה לא נכון!

החסרת התחומים
שאינם מוכפלים

דרך ב'

ישר נוסף מכפיל את
מספר החלקים במישור

החסרת התחומים
שאינם מוכפלים

דרך ב'

האם גם הישר השלישי מכפיל
את מספר החלקים?

$$4 \times 2 = 8$$

פחות חלק אחד!
סה"כ: 7 חלקים

החסרת התחומים
שאינם מוכפלים

דרך ב'

2

3

1

מה יקרה כשנוסיף ישר
רביעי?

$$14 = 2 \times 7$$

פחות 3 חלקים שלא הוכפלו
סה"כ: 11 חלקים

דרך ב'



נעביר את הישר במקום אחר

$$14 = 2 \times 7$$

פחות 3 חלקים שלא הוכפלו

סה"כ: 11 חלקים

דרך ב'

2

1

3

ובעוד מקום...

$$14 = 2 \times 7$$

פחות 3 חלקים שלא הוכפלו
סה"כ: 11 חלקים

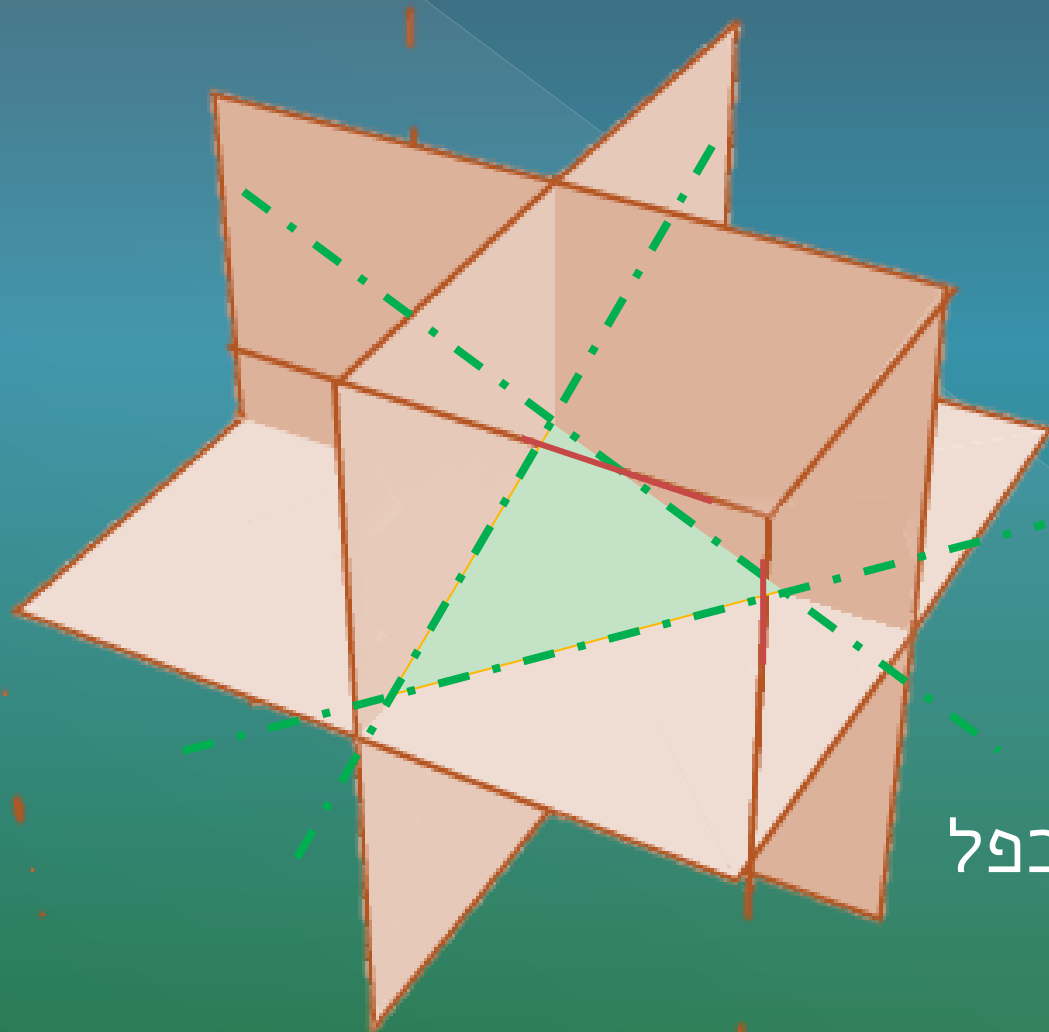
דרך ב'

מה יקרה כשנוסיף
ישר חמישי?

דרך ב'

החסרת התחומים
שאינם מוכפלים

במרחב –
נקודת חיתוך נוצרת על ידי
שלושה מישורים



היו 8 חלקי מרחב
 $16 = 2 \times 8$
פחות חלק אחד שלא הוכפל
סה"כ: 15 חלקים

דרך שנייה לספירת החלקים - סיכום

- במישור n -ממדי, החותך ה- $n+1$ לא מכפיל את מספר החלקים.
- חותך חדש "בוחר" באיזה צד של כל אחת מנקודות החיתוך הוא עובר ו"מוותר" בכך על הכפלת חלקים מסוימים.
- נחסר את מספר החלקים שאינם מוכפלים מסך כל החלקים.

מספר החלקים שצריך לחסר שווה למספר נקודות החיתוך

- כמה נקודות חיתוך יש בהעברת n ישרים במישור?
- כמה נקודות חיתוך יש בהעברת n מישורים במרחב?

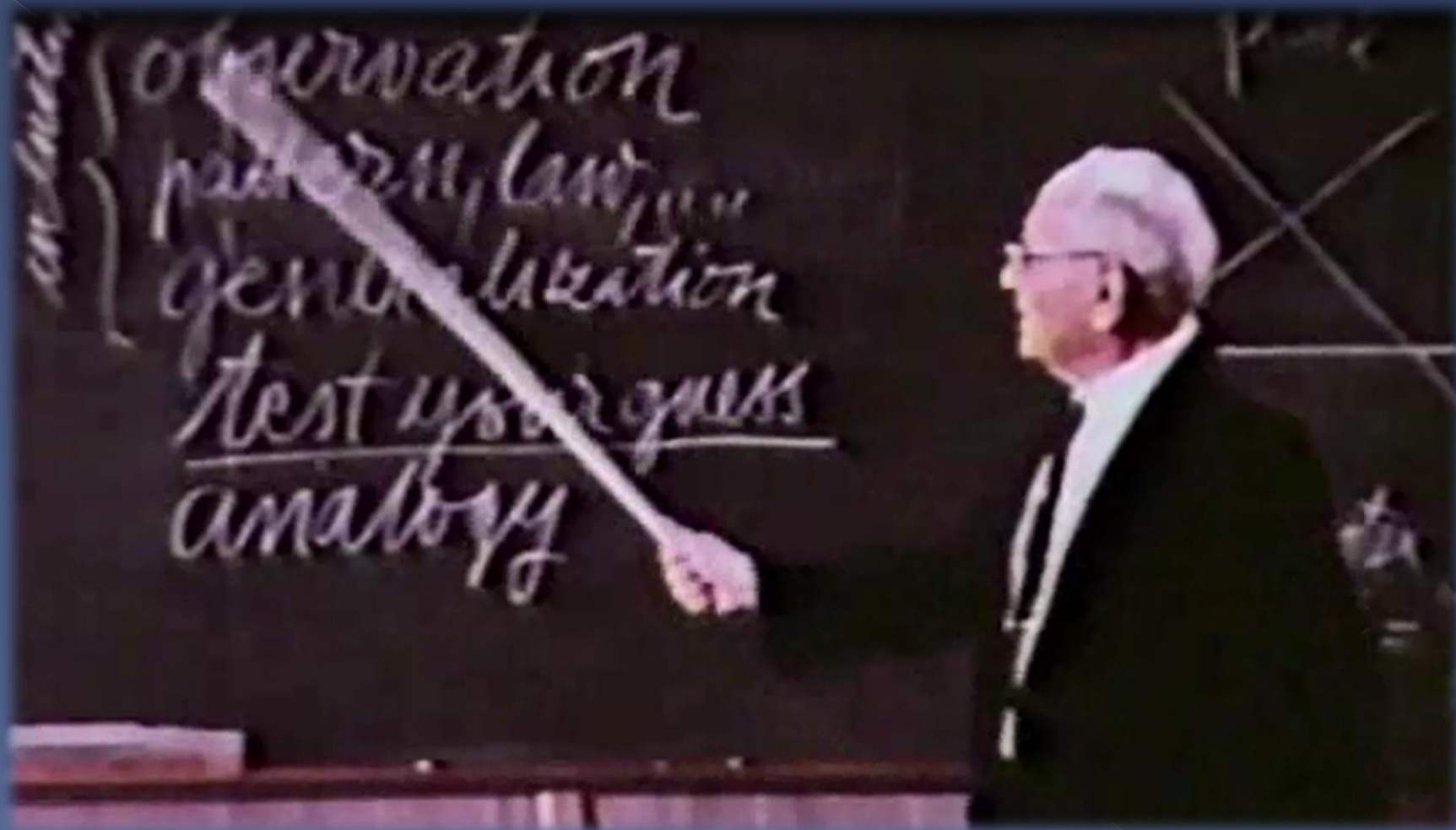
הכללת הפתרון השני

- ⊙ $R_{n+1}^2 = 2 \cdot R_n^2 - \binom{n}{2}$

- $R_{n+1}^2 = 2 \cdot R_n^2 - \frac{n(n-1)}{2}$

- ⊙ $R_{n+1}^3 = 2 \cdot R_n^3 - \binom{n}{3}$

- $R_{n+1}^3 = 2 \cdot R_n^3 - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$



סוף