הנושא: **חדו״את היצירה (חלק ב׳)**

הוכן ע״י: עופר ליבה.

תקציר: המאמר הוא מאמר המשך (חלק א׳ פורסם בעל״ה 23) לסקירה של הספר: A Tour Of Calculus מאת David Berlinski (1995). הטיול בארץ החדו״א לוקח את הקורא לעיון בהתפתחות ההיסטורית של מושג נגזרת, משפטי ערך הביניים של רול ושל לגרנז׳, הגדרת מושג האינטגרל, משפט ערך הביניים עבור אינטגרל והמשפט היסודי של החשבון האינטגרלי.

מילות מפתח: היסטוריה של המתמטיקה, חדו״א, אנליזה, נגזרת, גזירות, גבול, פונקציה, שיפוע, רציפות, קירוב, אינטגרל מסוים, אינטגרל לא מסוים, אינטגרציה, קיום, קצב שינוי רגעי, משפט רול, משפטי ערך הביניים, המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי, לייבניץ, רימן, לגרנז׳, ספרים.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 24, אדר תשנ״ט, מרץ 1993, עמודים 77-72.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 6 עמודים.

ספרים

חדו"את היצירה (חלק ב)

עופר ליבה
האוניברסיטה העברית בירושלים

David Berlinski *A Tour of the Calculus.* Pantheon Books. 1995

מהירות עכשיו

בחלקו הראשון של המאמר ראינו איך לייבניץ ניסה להגדיר את המהירות הרגעית של עצם בתנועה, באמצעות פעולת חילוק בין הדרך שעבר העצם במשך זמן אינפיניטסימלי לבין הזמן האינפיניטסימלי את פעולת החילוק הזו הוא רשם dy/dt, כאשר $y=f(t)$ אמנם אנו משתמשים עד היום (פה ושם) ברישום dy/dt, אך **איננו** מתייחסים אליו כאל פעולת חילוק כמו שעשה זאת לייבניץ, אלא כאל **סמל**

$$\lim_{h\to0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

אשר משמעותו

גבול זה נקרא **הנגזרת של f בנקודה t** וסימונו המקוצר הוא $f'(t)$

נוכל להתעלם מהמשמעות המקורית של המשתנה t (זמן) וכך לתאר תופעה כללית יותר והיא **קצב השינוי הרגעי.**
נתייחס, למשל, לפונקציה f המוגדרת על־ידי $f(t) = t^2$, כאשר t לאו־דווקא מייצג זמן ו־f(t) לאו־דווקא מייצגת

$$f'(t)=\lim_{h\to0}\frac{(t+h)^2-t^2}{h}=\lim_{h\to0}(2t+h)=2t$$

מקום הנגזרת של f בנקודה t היא
בדומה למושג 'רציפות', המושג 'גזירות', המוגדר תחילה באופן נקודתי, יכול לקבל משמעות גלובלית אם f גזירה **בכל נקודה** על אינטרוול נתון, היא תיקרא גזירה **על האינטרוול.**

לקראת הסעיף הבא, נזכיר את המשמעות הגרפית הידועה היטב **הנגזרת של f בנקודה t היא השיפוע של המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(t, f(t))$**

הגשרים התלויים של רול ולגרנז'

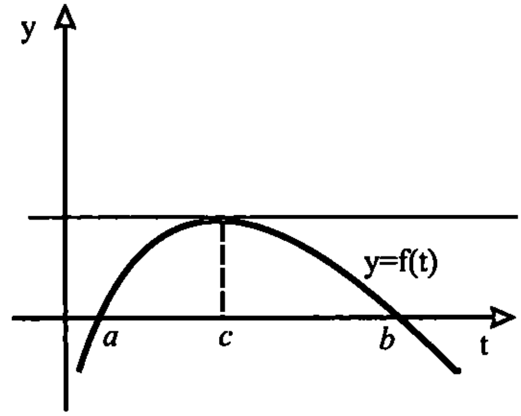
מישל רול (Michel Rolle), מתמטיקאי צרפתי מסוף המאה ה־17, היה אחד מאלה הרבים אשר תקפו את המושגים של החדו"א ואשר לא רצו, ובצדק, לקבל את המושג 'גבול' כפי שהוגדר או, יותר נכון, לא הוגדר כהלכה באותה עת יחד עם זאת, הוא תרם את אחד המשפטים הבסיסיים והמרכזיים של החדו"א, אשר נושא את שמו עד היום

שלוש דרישות מדויקות למשפט, והן

— הפונקציה רציפה על האינטרוול $[a, b]$
— הפונקציה גזירה על האינטרוול (a, b)
— $f(a) = f(b) = 0$.

כאשר מסתכלים על גרף של פונקציה אשר מקיימת את התנאים, 'ברור לעין' שחייבת להיות נקודת ביניים שבה המשיק הוא בעל שיפוע אפס, כלומר

$$\exists c,\quad c\in(a, b),\quad f'(c) = 0$$

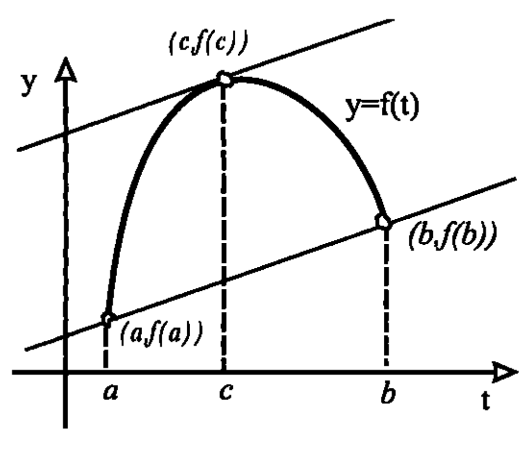


איור 1

נשים לב להשתמעויות של המשפט הוא מצביע על קשר הדוק בין תכונת הרציפות לתכונת הגזירות של פונקציה. הרציפות מבטיחה קיום של נקודת מקסימום או מינימום c, והגזירות מספקת לנו את המספר

אם למישהו נגרמה אי־נחת מסוימת מהתנאי השלישי והנוקשה של משפט רול, **משפט ערך הביניים הכללי** של ג׳וזף לואי לגרנז׳ (Joseph Louis Lagrange) מביא אותנו רחוק יותר, שכן הוא מרשה לפונקציה לקבל ערכים שרירותיים (ולאו דווקא שווים) בקצות האינטרוול גם במקרה זה, העיניים והאינטואיציה מאפשרים לראות בבירור שעל קשת הגרף המחברת את שני הקצוות, יש נקודה שבה המשיק מקביל למיתר המחבר את אותן קצוות (איור 2) בלשון מתמטית

$$\exists c,\quad c\in(a, b),\quad f\,'(c) = [f(b) - f(a)]\,/\,(b - a)$$

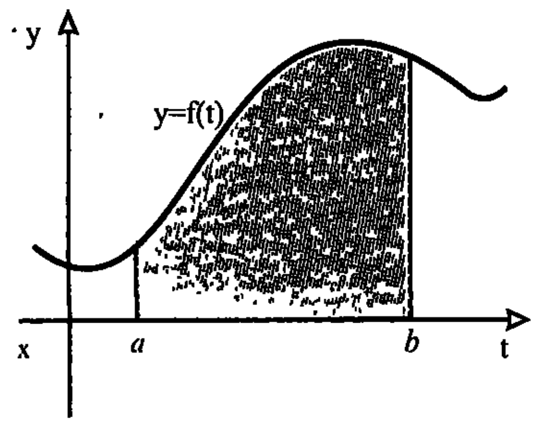


איור 2

אם נחזור לרגע לפרשנות הפיסיקלית שליוותה אותנו בתחילת הדרך, המשפט אומר שאם, לדוגמה, מכונית נסעה ממקום א למקום ב במהירות ממוצעת של 80 קמ״ש, אז במקום אחד (לפחות) שבין א לבין ב, המהירות הרגעית (זו הרשומה על לוח השעונים) הייתה 80 קמ״ש

פנים הקנקן

בחיי היום־יום, כאשר אנו נתקלים בגדר סגורה (של גינה, של וילה, של מפעל, של מחנה צבאי וכיו״ב, והגדר יכולה אף להיות ׳דמיונית׳ כמו גבול של מדינה), אנו יודעים שהגדר תוחמת משטח מסוים, ואנו עשויים להתעניין במספר אשר מודד את גודלו של המשטח, מספר אשר נקרא **שטח** וכך, כשאנו מתבוננים על גרף של פונקציה חיובית בקטע מסוים [a, b], אנו עשויים לראות לא רק את הגרף ואת צירי השיעורים, אלא גם את המשטח הנוצר מתחת לגרף באינטרוול זה וכך להתעניין בשטחו (איור 3) השטח הוא איפיון גיאומטרי **גלובלי** של הפונקציה על האינטרוול, שלא כמו הגזירות והרציפות, שמוגדרות בראש ובראשונה כתכונות **נקודתיות** ורק אחר כך כגלובליות

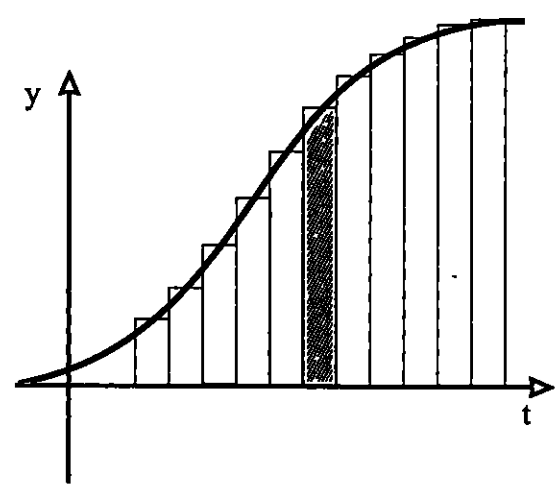


איור 3

השאלה הכפולה ׳**מהו השטח וכיצד אפשר לחשב אותו?**׳ מביאה אותנו למחוז חדש בארץ החדו״א ׳שטח׳ הוא אחד משני המושגים הראשיים (יחד עם ׳נגזרת׳) של החדו״א השאלה המתעוררת באופן טבעי היא אם יש ׳בכל זאת׳

קשר בין שני המושגים העובדה המפתיעה והמעט מיסטית היא שאכן יש קשר ביניהם

מעשה טבעי בהתחלה הוא לנסות למדוד את השטח **באופן מקורב** על־ידי סדרה של מלבנים, כפי שמראה איור 4 המלבנים הם הרי צורות מוכרות מהגיאומטריה האוקלידית יש רק לארגן אותם היטב ולעדן בצורה הדרגתית את גודלם וחלוקתם, כך שסכום שטחיהם יהיה קרוב ככל האפשר לשטח האמתי כיוון שלייבניץ לא השתמש בחישובי גבולות, את העידון הוא ביצע על־ידי סדרה של מלבנים בעלי שטח 'אינפיניטסימלי', כאשר המלבנים מנוונים עד־כדי היותם 'מקלות', וקבע שסכום שטחיהם הוא השטח המבוקש. גם בעניין הזה, גישתו של לייבניץ הייתה פגומה מאוד מבחינה לוגית



איור 4

אם כן, ננסה לארגן את החישוב בצורה יותר מסודרת 'נחתוך' את הקטע [a, b] באמצעות מספר סופי של נקודות t_i אשר מקיימות $a = t_0 < t_1 < t_2 < \quad < t_{n-1} < t_n = b$, כדי לקבל n קטעים בעלי אורכים שווים, כלומר האורך של קטע כלשהו $[t_{i-1}, t_i]$ הוא $(b-a)/n$ כעת נשאר לנו לבנות את המלבנים הבסיס של המלבן M_i יהיה הקטע $[t_{i-1}, t_i]$, וגובהו $f(\xi_i)$, כאשר ξ_i הוא מספר כלשהו בקטע $[t_{i-1}, t_i]$ למען הפשטות ניקח $\xi_i = t_i$ סכום השטחים של המלבנים הוא

$$f(t_1)\Delta_1 + f(t_2)\Delta_2 + \quad + f(t_n)\Delta_n = \Sigma_{1 \leqslant i \leqslant n} f(t_i)\Delta_i$$

כאשר $\Delta_i = (b-a)/n$

כך בונה רימן (Bernhard Riemann) את הסכום הקרוי על שמו (הסכום של רימן מורכב וכללי יותר ממה שמוצג כאן ואולם במאמר זה נסתפק בהגדרה הפשוטה)

כאשר מספר המלבנים הולך וגדל, בסיסיהם (Δ_i) הולכים וקטנים במקביל וסכום שטחיהם הולך ומתקרב לערך השטח המבוקש (איור 5) הצעד הבלתי נמנע הוא להתייחס לגבול

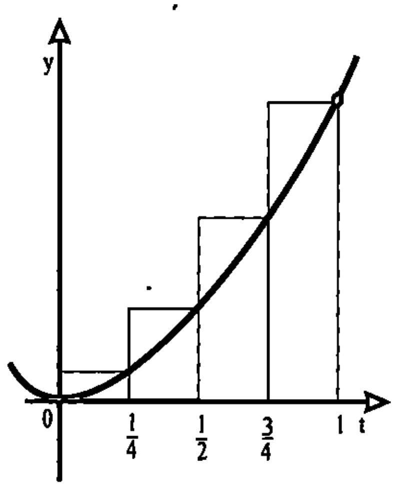
$$lim_{n\to\infty} \Sigma_{1 \leqslant i \leqslant n} f(t_i)\,\Delta_i$$

ואם גבול זה קיים (ובל נשכח שגבול הוא מספר לכל דבר ועניין), הוא יהיה 'המועמד הטבעי' למדידת גודלו של המשטח עובדה הניתנת להוכחה היא שאם הפונקציה רציפה וחיובית על הקטע [a, b], הגבול הזה אכן קיים השטח הוא, אם כן, גבול של סדרה כך נברא מושג מתמטי חדש אשר זוכה לסמל המפורסם בצורה של S (מלשון Sum) מוארך

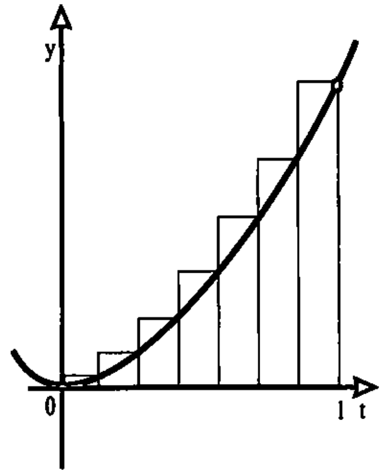
$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_i$$

ואשר נקרא

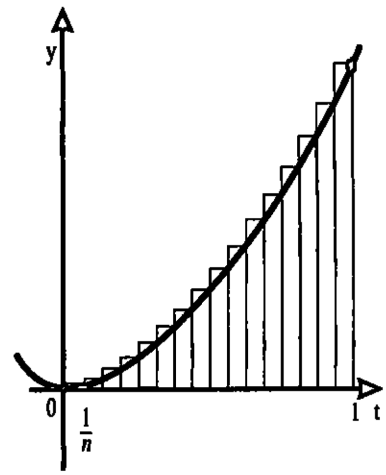
האינטגרל המסוים של הפונקציה f בקטע [a, b]



איור 5 1



איור 5.2



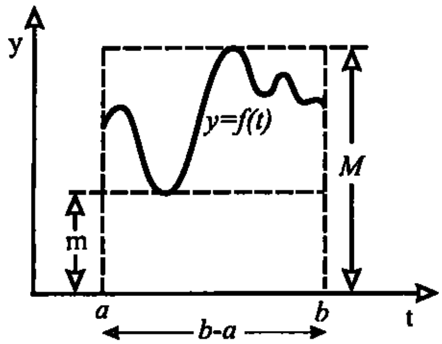
איור 5 3

האינטגרל רוצה משפט ערך ביניים

האינטגרל הוא שליט משותף של ארץ החדו"א, יחד עם הנגזרת, והוא מבקש משפט ערך ביניים גם לעצמו מבקש ומקבל

תהי f פונקציה רציפה וחיובית על הקטע $[a, b]$, M ו־m הערכים המקסימלי והמינימלי (בהתאמה) של f על הקטע, כלומר $m \leqslant f(x) \leqslant M$ לכל x בקטע (כיוון שהפונקציה רציפה, היא **מקבלת** את הערכים האלו) נתייחס לשני מלבנים, האחד **מכיל** את המשטח שמתחת לגרף הפונקציה, ושטחו $M(b-a)$, והשני **מוכל** באותו משטח, ושטחו $m(b-a)$ (איור 6) ברור שמתקיים

$$m\ (b-a) \le \int_a^b f \le M\ (b-a)$$



איור 6

כעת נשאל אם יש נקודה c בקטע $[a, b]$ שעבורה מתקיים

$$\int_a^b f = f(c)\,(b-a)\ ,$$

האינטואיציה ומבט העיניים מספיקים כדי לשכנע אותנו שאכן יש נקודה כזו ההוכחה עצמה קלה מכיוון שמתקיים

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le M$$

הרי שקיים מספר c בקטע עבורו

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

קיומו של המספר מובטח לנו על־ידי משפט ערך הביניים הבסיסי (בגרסה כללית יותר מזו שהוצגה בחלקו הראשון של המאמר, והיא אם f רציפה על הקטע $[a, b]$ ואם $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ אז קיים מספר c בקטע עבורו $f(c)=y$) ומכאן התוצאה המבוקשת

הדשדוש בביצה והעלייה על האולימפוס

לצורך ההמחשה ננסה כעת ליישם את ההגדרה

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_i$$

עבור הפונקציה f המוגדרת על־ידי $f(t)=t^3$, בקטע $[0, 1]$, שם היא חיובית ורציפה נחלק את הקטע ל־n 'קטעונים' שווים באורכם, כלומר $\Delta_i=1/n$, וניקח $t_i=i/n$ השטח מתחת לגרף הוא

$$\int_0^1 f=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{1}{4}$$

התהליך הוא ארוך ומייגע (ועוד עם פונקציה פשוטה!), והוא דורש בין היתר שימוש בנוסחאות אלגבריות לא קלות לפיתוח, והדבר עלול לרפות את ידינו האם הגענו לביצה טובענית אשר מקלקלת לנו את הטיול?

המושג 'גבול', שכה הקסים אותנו עד עכשיו, אכזב אותנו הפעם, 'ובגדול' אנו נסוגים בלית ברירה למחוז בסיסי יותר, אולי בטוח יותר, והוא מחוז הפונקציה הרי פונקציה 'מייצרת' מספרים, והאינטגרל המסוים הוא מספר נוכל, אם כן, לנסות ולהגדיר פונקציה אשר מייצרת אינטגרל מסוים לכל ערך של המשתנה, על־ידי זה שנחליף את הקצה העליון b בקצה **משתנה** t, כאשר $a \leqslant t \leqslant b$ כלומר

$$G(t)=\int_a^t f$$

לפונקציה הזאת נקרא **אינטגרל בלתי מסוים** של הפונקציה f גם האינטגרל הבלתי מסוים מודד שטח, אך הפעם שטח משתנה ולא קבוע זהו צעד 'נועז' אשר יאפשר לנו ליצור קשר הדוק בין המושגים של החדו"א באופן בלתי צפוי לחלוטין הקשר הזה הוא גולת הכותרת של מסענו, והוא נקרא **המשפט היסודי של החדו"א.** יש בו שני חלקים ושניהם תורמים לאיחוד הבלתי נמנע

החלק הראשון קובע שהפונקציה G גזירה באינטרוול, **והנגזרת שלה היא לא אחרת מאשר הפונקציה f !** כלומר, אם הפונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, אז

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f=f(t)$$

במלים אחרות, נגזרת ואינטגרל הם הפכים זה לזה וקשורים זה לזה באופן אינטימי, על־אף היותם אוטונומיים מבחינת 'כניסתם לעולם' ומבחינת עצם טבעם (כפי שציינו קודם, הנגזרת היא קודם כל בעלת תכונה מקומית והאינטגרל הוא בעל תכונה גלובלית)

החלק השני של המשפט מאפשר לנו לעקוף את התהליך המייגע שהיינו עדים לו בתחילת סעיף זה מאחר שהגדרנו

$$G(t)=\int_a^t f$$

ברור מיד שמתקיים

$$\int_a^b f=G(b)$$

כעת, אם נתייחס לפונקציה **כלשהי** F שגם נגזרתה היא f, כי אז נקבל, כי, $G(t)=F(t)+c$ כאשר c מספר כלשהו (שהרי שתי פונקציות בעלות אותה נגזרת נבדלות בקבוע) יוצא, כי

$$G(b)=F(b)+c=\int_a^b f$$

כמו כן,

$$G(a)=F(a)+c=\int_a^a f=0$$

לכן $c=-F(a)$ מקבלים

$$\int_a^b f=F(b)-F(a)$$

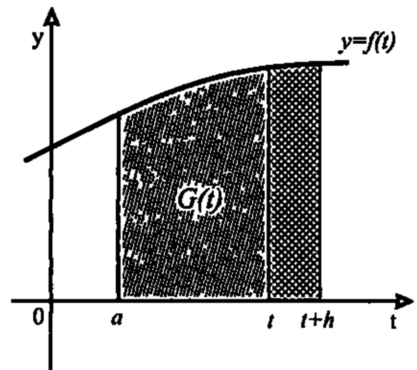
זוהי תוצאה מדהימה, שכן בהתחלה הגדרנו את האינטגרל באמצעות סכום מסובך למדי, אשר שיקף היטב את ההתייחסות הגלובלית למושג 'שטח', וכעת, בניגוד לכל הציפיות המוכתבות על־ידי השכל הישר, מסתבר לנו **שהשטח תלוי אך ורק בנקודות הקצה של הקטע!**

נחזור לפונקציה f של תחילת סעיף זה ($f(t)=t^3$), בקטע $[0, 1]$ מאמצינו לחשב את השטח אילצו אותנו לבנות סכומים, לבצע חישובים אלגבריים מסובכים ולמצוא את הגבול לפי המשפט, מאמצים אלו כלל לא היו נחוצים כל מה שנדרש הוא להכיר פונקציה קדומה, **'אנטי־נגזרת'** של f (פונקציה שהנגזרת שלה היא f), ולא חשוב איזו קל

מאודי $F(t) = t^4/4$ מספקת מייד את הסחורה החישוב נעשה במהירות הבזק

$$\int_0^1 f=F(1)-F(0)=1/4$$

אנו משפשפים את עינינו התעלמנו לכאורה מהמשטח עצמו וכל מה שעשינו הוא ביצוע שני חישובים פעוטים בקצותיו



איור 7

הגענו לפסגת ההר (ולסיום מסענו), ואנו ממקמים בו את דגל הניצחון בסיפוק הבא ניתן למשפט את 'הכבוד המגיע לו' ונציג את ההוכחה שלו, שהיא יחסית קלה (החלק הראשון, את החלק השני הוכחנו קודם) נבנה אותה בעזרתו של איור 7

מאחר שהגדרנו $.G(t)=\int_a^h f$

אנו מקבלים

$$\frac{G(t+h)-G(t)}{h}=\frac{1}{h}\left(\int_a^{t+h} f-\int_a^{t} f\right)=\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f$$

כעת, משפט ערך הביניים לאינטגרלים מבטיח את קיומו של מספר c בקטע $[t,\ t+h]$ אשר עבורו מתקיים

$$f(c)=\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f$$

נוכל אם כן, לרשום

$$\frac{G(t+h)-G(t)}{h}=f(c)$$

ומכיוון שהפונקציה f רציפה, $\lim_{h\to 0} f(c) = f(t)$, ומכאן

$$\lim_{h\to 0}\frac{G(t+h)-G(t)}{h}=f(t)$$

כלומר $G' = f$