״**קשר חם**״ – המרכז הארצי
לקידום, **ש**יפור **ו**ר**יענון ה**ח**ינוך המ**תמטי

הטכניון - מכון טכנולוגיה לישראל
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים
מוסד הטכניון למחקר ופיתוח

מל״מ
המרכז הישראלי להוראת
המדעים ע״ש עמוס דה שליט

הנושא: **תמורות ללא שבת**

הוכן ע״י: יונתן אחיטוב.

תקציר: במאמר מוצגת פתרון לבעיה הסתברותית באמצעות שימוש בתמורות.

מילות מפתח: הסתברות, סדרה, תמורה, תמורות, נקודת שבת, טור, עצרת, מספר אפשרויות, נוסחת נסיגה, נוסחה לפי מקום, רקורסיה, השערה, הכללה, הוכחה, שקילות, אינדוקציה, פיתוח, גבול, שיטת חקר.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 24, אדר תשנ״ט, מרץ 1993, עמודים 48-53.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 6 עמודים.

תמורות ללא שבת

יונתן אחיטוב

בית ספר דנציגר קרית שמונה, מרכז מורים תל חי

א. הקדמה

נפתח ב״חידה״ ידועה

מזכירה מפוזרת מכניסה 4 מכתבים לתוך 4 מעטפות ממוענות מבלי לשים לב איזו מעטפה מתאימה לאיזה מכתב מהי ההסתברות שבדיוק 3 מכתבים יגיעו ליעד הנכון?

התשובה לחידה זאת פשוטה (מה״?),.אך הבה נהפוך אותה

שאלה[1]: מהי ההסתברות לכך שאף מכתב לא יגיע ליעד הנכון?

כדי לענות על שאלה זאת, יש לברר בכמה אופנים אפשר להכניס באקראי 4 מכתבים לתוך 4 מעטפות, ולספור את המקרים אשר בהם שום מכתב אינו נכנס למעטפה המתאימה לו

המודל המתמטי המתאים לטיפול בשאלה זאת הוא תמורות כאן אנו דנים בתמורה מסדר 4

לשם הפשטות נזהה את המכתב ואת המעטפה עם המען שלהם, ונעניק מספרים מ- 1 עד 4 לכל אחד מהמכתבים, ואותם מספרים למעטפות המתאימות

התמורה המתארת את המצב הרצוי, כלומר - כל מכתב במעטפה שלו, מתוארת על־ידי הטבלה הבאה

1	2	3	4
1	2	3	4

או, כפי שמקובל לסמן

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 2\ 3\ 4 \end{pmatrix}$$

1 תודתי לד״ר אלה שמוקלר על הערותיה החשובות מאוד וללאה לטר ולאה דולב שקראו והציגו שאלות אחדות שלושתן תרמו לעיצובו הנוכחי של המאמר

לעומתה, יש מספר תמורות המתאימות למצב המתואר בשאלה שלנו, כלומר - אף מכתב אינו נכנס למעטפה הנכונה אחת מהן היא, למשל, התמורה

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 2\ 4\ 1\ 4 \end{pmatrix}$$

תמורה היא, למעשה, פונקציה המתאימה למספרים בשורה העליונה (מקורות) את המספרים בשורה התחתונה (תמונות) אם שום מקור איננו זהה לתמונה של עצמו אז אומרים שאין לפונקציה נקודת שבת לפיכך אפשר לומר שלתמורה הנ״ל אין נקודת שבת, ונוכל לנסח עתה את השאלה מחדש מהו היחס בין מספר התמורות מסדר 4 ללא שום נקודת שבת, לבין מספר כל התמורות מסדר זה? כידוע, יש $4!=24$ תמורות שונות מסדר 4 הן רשומות להלן, והתמורות חסרות נקודות השבת מודגשות

$\begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1234\\1243\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1234\\1324\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1234\\1342\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1234\\1423\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1234\\1432\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1234\\2134\end{pmatrix}$	$\boxed{\begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix}1234\\2314\end{pmatrix}$	$\boxed{\begin{pmatrix}1234\\2341\end{pmatrix}}$	$\boxed{\begin{pmatrix}1234\\2413\end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix}1234\\2431\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix}$	$\boxed{\begin{pmatrix}1234\\3142\end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix}1234\\3214\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1234\\3241\end{pmatrix}$	$\boxed{\begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix}}$	$\boxed{\begin{pmatrix}1234\\3421\end{pmatrix}}$
$\boxed{\begin{pmatrix}1234\\4123\end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix}1234\\4132\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1234\\4213\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1234\\4231\end{pmatrix}$	$\boxed{\begin{pmatrix}1234\\4312\end{pmatrix}}$	$\boxed{\begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix}}$

טבלה 1

עיון בטבלה מראה, שיש 9 תמורות מסדר 4 ללא נקודת שבת, כלומר, ההסתברות לכך ששום מכתב לא יגיע ליעדו היא $\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

ב. הצגת הבעיה הכללית

אפשר, כמובן, לשאול, מה יהיה המצב אם נעסוק בפחות מ- 4 מכתבים או ביותר מספר התמורות מסדר N הוא, כידוע, $N!$, ולכן תחילה יש למצוא כמה תמורות מכל סדר הן ללא נ״ש (נקודת שבת), ואחר כך יהיה אפשר לחשב מהי

ההסתברות שתמורה מסדר N הנבחרת באקראי מבין התמורות מאותו סדר תהא ללא נקודת שבת נסמן הסתברות זאת ב- p_N כאשר $N<4$ קל מאוד למצוא את כל התמורות המבוקשות וכך גם לחשב את ההסתברות המבוקשת

עבור $N=1$ יש תמורה אחת בלבד, והיא כמובן עם נ״ש, לכן $p_1=0$

עבור $N=2$ יש 2 תמורות $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ו־ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ אחת מהן עם נ״ש, אחת מהן ללא נ״ש, לכן $p_2=1/2$

עבור $N=3$ יש $3!=6$ תמורות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

מתוכן 2 ללא נ״ש, לכן $p_3=1/3$

מאידך גיסא, עבור $N=5$ מספר התמורות השונות הוא $5!=120$, וברור שזאת מלאכה מייגעת למדי לפרט את כולן ואחר כך למנות את אלה שחסרות נ״ש למרבה המזל נעשתה מלאכה זאת בידי אחרים[2], והתוצאות מסוכמות בטבלה הבאה

סדר התמורה N	מספר התמורות ללא נקודות שבת	ההסתברות לתמורה ללא נקודות שבת p_N
1	0	0
2	1	0.5
3	2	0.333333
4	9	0 375000
5	44	0 366666
6	265	0 368055
7	1854	0 367857
8	14833	0 367881
9	133496	0 367879
10	1334961	0 367879
11	14684570	0 367879
12	???	???

טבלה 2

סימני השאלה מופנים אל הקורא מה צריך לכתוב במקומם?

נתייחס אל הטבלה כאל ממצאים ניסיוניים, וננסה למצוא את החוקיות המסתתרת מאחורי המספרים עבור N כלשהו הדיון יתחלק לשניים - תחילה נתאר את הסדרה שבעמודה השנייה (מספר התמורות ללא נ״ש) בעזרת 3 נוסחאות שונות (שתי נוסחות נסיגה ואחת לפי מקום), ואחר כך נמצא מהו הגבול הנרמז בעמודת ההסתברות

ג. שתי נוסחאות נסיגה ואחת לפי מקום

I. העלאת השערה בדבר נוסחת נסיגה ראשונה

נסמן ב- a_N את מספר התמורות מסדר N ללא נ״ש התבוננות בטבלה[3] מאפשרת לנו לגלות קצה חוט המוליך לפתרון, וזהו הדמיון המספרי בין a_9 לבין a_{10}

$$a_{10}=10 \quad a_9+1$$

תבנית זאת ״מפתח״ להכללה הבאה

$$a_N = N \quad a_{N-1}+1$$

ניסיונות לאימות ההכללה מצליחים לכל N זוגי בטבלה, אבל מתברר שעבור N אי-זוגי יש להחליף את ה-"+" שבתבנית ב-"—"

כך מתקבלת נוסחת הנסיגה הראשונה, לפי איבר קודם יחיד

$$a_N = N \cdot a_{N-1}+(-1)^N \qquad \text{(I)}$$
$$a_1=0$$

הקשר הענייני בין נוסחה זאת לבעיה המקורית איננו מוכח בינתיים, ואין כל ערובה לכך שנוסחה זאת מתאימה לבעיה גם עבור $N>11$, ולכן היא תישאר בינתיים בגדר השערה

2 Martin Gardner, "The Transcendental Number e", The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions p 69

3 דרך טיפול מקובלת ושיטתית יותר היא לחשב את החפרש $a_n - a_{n-1}$ או את היחס $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ כדי למצוא קשר קבוע כלשהו בין איבר לקודמו הדרך המופיעה במאמר זה אמנם איננה שגרתית, אך בפועל הגיעו אנשים שונים לנוסחת הנסיגה (I) דווקא באמצעותה מומלץ לבדוק גם את שתי הדרכים האחרות

II. נוסחת נסיגה שנייה

לפני מציאת נוסחה נוספת, נתבונן בדוגמה פרטית. מוכרות לנו כבר התמורות ללא נ״ש מסדר 4 (טבלה 1) ננסה ליצור בעזרתן את התמורות ללא נ״ש מסדר 5 השיטה היא פשוטה

ניקח למשל את התמורה $\binom{1\,2\,3\,4}{3\,1\,4\,2}$ ונוסיף לשתי השורות א 5 $\binom{1\,2\,3\,4\,5}{3\,1\,4\,2\,5}$ עתה צריך לסלק את נקודת השבת 5

דבר זה אפשר לעשות בקלות על־ידי החלפה של ה- 5 שבשורה התחתונה עם אחד מארבעת המספרים האחרים למשל עם ה־1 $\binom{1\,2\,3\,4\,5}{3\,5\,4\,2\,1}$.

שלושת המספרים הנותרים לא זזים ממקומם, ולכן קל להיווכח שהתמורה החדשה היא ללא נ״ש ברור שיכולנו להחליף באותה דרך את 5 עם כל אחד משלושת המספרים האחרים, לכן, מכל תמורה ללא נ״ש מסדר 4 אפשר לקבל 4 תמורות ללא נ״ש מסדר 5 בסך הכול 36 תמורות ראה טבלה 3

התמורה המקורית מסדר 4	התמורות המתקבלות מסדר 5
$\binom{1234}{2143}$	$\binom{12345}{25431}$ $\binom{12345}{51432}$ $\binom{12345}{21453}$ $\binom{12345}{21534}$
$\binom{1234}{2341}$	$\binom{12345}{23451}$ $\binom{12345}{53412}$ $\binom{12345}{25413}$ $\binom{12345}{23514}$
$\binom{1234}{2413}$	$\binom{12345}{24531}$ $\binom{12345}{54132}$ $\binom{12345}{24153}$ $\binom{12345}{25134}$
$\binom{1234}{3142}$	$\binom{12345}{35421}$ $\binom{12345}{31452}$ $\binom{12345}{51423}$ $\binom{12345}{31524}$
$\binom{1234}{3412}$	$\binom{12345}{34521}$ $\binom{12345}{34152}$ $\binom{12345}{54123}$ $\binom{12345}{35124}$
$\binom{1234}{3421}$	$\binom{12345}{34251}$ $\binom{12345}{34512}$ $\binom{12345}{54213}$ $\binom{12345}{35214}$
$\binom{1234}{4123}$	$\binom{12345}{45231}$ $\binom{12345}{41532}$ $\binom{12345}{41253}$ $\binom{12345}{51234}$
$\binom{1234}{4321}$	$\binom{12345}{43251}$ $\binom{12345}{43512}$ $\binom{12345}{45213}$ $\binom{12345}{53214}$
$\binom{1234}{2143}$	$\binom{12345}{25431}$ $\binom{12345}{51432}$ $\binom{12345}{21453}$ $\binom{12345}{21534}$

טבלה 3

לפי טבלה 2 יש בסך הכול 44 תמורות מסדר 5 ללא נ״ש, כלומר, חסרות עוד 8 תמורות ללא נ״ש שאינן מופיעות בטבלה 3 עיון מעמיק יותר מראה, שמה שמאפיין את כל התמורות שבטבלה הוא, שאין חילוף בין 5 לבין אף אחד מהמספרים האחרים בשורה התחתונה, כלומר, בדרך הקודמת לא יכולה להתקבל , למשל, תמורה כזאת $\binom{1\,2\,3\,4\,5}{4\,1\,5\,2\,3}$ אחרת, בתמורה המקורית מסדר 4 היה המספר 3 נקודת שבתי

לפיכך, צריך עוד לספור את התמורות ללא נ״ש מסדר 5 שבהן יש חילוף בין 5 לבין אחד המספרים האחרים, כמו המספר 3 בדוגמה האחרונה שלושת המספרים האחרים יצרו תמורה ללא נ״ש מסדר 3, ולכן לכל חילוף יש בדיוק 2 תמורות אפשריות, ובסך הכול 8 תמורות, כמסוכם בטבלה 4

החילוף	התמורות ללא נ״ש
$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&&&&1\end{pmatrix}$	$\binom{12345}{54231}$ $\binom{12345}{53421}$
$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\&5&&&2\end{pmatrix}$	$\binom{12345}{45132}$ $\binom{12345}{35412}$
$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\&&5&&3\end{pmatrix}$	$\binom{12345}{41523}$ $\binom{12345}{24513}$
$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\&&&5&4\end{pmatrix}$	$\binom{12345}{31254}$ $\binom{12345}{23154}$

טבלה 4

סיכום מספר התמורות ללא שבת מסדר 5 הוא, לפי הסימון של סעיף I

$$a_5 = 4 \quad a_4 + 4 \quad a_3 = 4 \quad (a_4 + a_3)$$

ואם נכליל את התוצאה נקבל נוסחת נסיגה שנייה, לפי שני איברים קודמים

$$a_N = (N-1) \quad (a_N-1 + a_{N-2}) \qquad \text{(II)}$$
$$a_1 = 0 \ , \ a_2 = 1$$

אפשר לוודא כי עבור $3 \leqslant N \leqslant 11$ נוסחת נסיגה (II) מתאימה לטבלה 1, ואפשר להשלים את החישוב של השורה האחרונה

$a_{12}=11(a_{11}+a_{10})=11(14684570+1334961)=176214841$

הוכחה כללית לנכונות נוסחה (II) מופיעה בנספח [4]

טענה 1: נוסחת הנסיגה (II) שקולה לנוסחת הנסיגה (I).

הוכחה

לצורך בהירות ההוכחה נסמן זמנית את איברי הסדרה של נוסחת הנסיגה (II) ב-b_N

ההוכחה היא באינדוקציה על N

עבור $N=1$. $a_1=b_1=0$ לפי תנאי ההתחלה

עבור $N=2$. $a_2=1\ 0+(-1)^2=1$ לפי הנוסחה ו-$b_2=1$ לפי תנאי ההתחלה

נניח שהוכחנו שוויון בין האיברים המתאימים עד $a_N=b_N$, נראה כי $a_{N+1}=b_{N+1}$

ואמנם

$$\begin{aligned}
a_{N+1} &= (N+1)a_N+(-1)^{N+1}\\
&= (N+1)b_N+(-1)^{N+1}\\
&= N\ b_N+b_N+(-1)^{N+1}\\
&= N\cdot b_N+a_N-(-1)^N\\
&= N\ b_N+N\cdot a_{N-1}+(-1)^N-(-1)^N\\
&= N\ b_N+N\cdot a_{N-1}\\
&= N\ b_N+N\ b_{N-1}\\
&= N(b_N+b_{N-1})\\
&= b_{N+1}
\end{aligned}$$

III. הנוסחה המפורשת של הסדרה a_N

נתבונן שוב בנוסחת הנסיגה לפי איבר קודם יחיד

$a_N=N\ \ a_N+(-1)^n$

$a_1=0$

המחובר $N\,a_{N-1}$ 'מבטיח' פיתוח דומה ל-$N!$ נחשב איברים אחדים, אך כדי שלא יטושטשו ביטויים הדומים לעצרת, לא נחשב תוצאה סופית אלא רק תבניות חשבוניות העשויות לרמוז על התבנית הכללית המבוקשת

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0\\
a_2 &= 2a_1+1=2\cdot 0+1=1\\
a_3 &= 3a_2-1=3-1\\
a_4 &= 4a_3+1=4\ 3-4+1\\
a_5 &= 5a_4-1=5\cdot 4\cdot 3-5\cdot 4+5-1\\
a_6 &= 6a_5+1=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3-6\cdot 5\cdot 4+6\cdot 5-6+1
\end{aligned}$$

בשורות האחרונות מתגלה כבר דגם ברור סכום בעל סימנים מתחלפים של עצרות חסרות 'זנבי' את התבנית האחרונה, של a_6, אפשר לכתוב מחדש כך

$$a_6=\frac{6!}{2!}-\frac{6!}{3!}+\frac{6!}{4!}-\frac{6!}{5!}+\frac{6!}{6!}$$

ואפשר להכליל $a_N=\frac{N!}{2!}-\frac{N!}{3!}+\quad\pm\frac{N!}{N!}$,

כאשר הסימן של המחובר הימני נקבע לפי הזוגיות של N

קל לוודא שגם הסכומים הקודמים מתאימים לתבנית זאת, פרט ל- $N=1$

נשים לב לשוויון $\frac{1!}{0!}-\frac{1!}{1!}=0$

כדי לכלול את $N=1$ בנוסחה משותפת אחת, נוסיף שני איברים אלה בראש הסכום הקודם

$$a_N=\frac{N!}{0!}-\frac{N!}{1!}+\frac{N!}{2!}-\frac{N!}{3!}+\ .\quad\pm\frac{N!}{N!},$$

או בצורת כתיבה חסכונית יותר

$$a_N=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{N!}{k!}\qquad\text{(III)}$$

טענה 2: הנוסחה לפי מקום, (III), שקולה לנוסחת הנסיגה (I).

הוכחת טענה זאת (בעזרת אינדוקציה מתמטית) נשארת לקורא כתרגיל לא קשה

---

4 דרך אחרת לחלוטין להגיע לנוסחה (II) מבוססת על התבוננות מחודשת בטבלה 2 אפשר להבחין בכך שהחל בשורה השנייה, a_N תמיד מתחלק ב-$N-1$, ותוצאות החילוק היא $a_{N-1}+a_{N-2}$

ד. חישוב ההסתברות לתמורה ללא נקודות שבת

הנוסחה (III) של מספר התמורות ללא נקודת שבת מסדר N מאפשרת חישוב מיידי של ההסתברות לתמורה ללא נ"ש

$$p_N = \frac{a_N}{N!} = \frac{1}{N!}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{N!}{k!} = \tag{VI}$$

$$= \frac{N!}{N!}\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k!}$$

לדוגמה

$$p_4 = \sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^0}{0!}+\frac{(-1)^1}{1!}+\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{(-1)^4}{4!}$$

$$= \frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!} = 0+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24} = \frac{9}{24}$$

וזאת תוצאה המוכרת לנו היטב מתחילת הדיון
הנוסחה שהתקבלה לעיל ל-p_N מאפשרת לענות על השאלה שהוצגה לעיל אחרי טבלה 2

מהו הגבול הנרמז בעמודת ההסתברות של הטבלה הנ"ל?

מלימודי החשבון הדיפרנציאלי מוכר הפיתוח הבא·

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

בפרט, עבור $x=-1$, מתקיים

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$$

מכאן נקבל את הגבול המפתיע הבא·

$$\lim_{N\to\infty} p_N = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} = \frac{1}{e} \tag{V}$$

ערכו של שבר זה מתאים היטב לשבר 0 367879 המופיע בטבלה

ה. נספח

טענה 3: מספר התמורות מסדר N ללא נקודות שבת ניתן לחישוב על-ידי נוסחת הנסיגה (II) .

הוכחה:

ההוכחה הבאה היא הכללה של חישוב a_5 לעיל

עבור $N=1$ ועבור $N=2$ הטענה ברורה (ראה לעיל פרק ב)

נניח שעבור $N>2$ מסוים ידועים מספרי התמורות ללא נ"ש a_{N-1} ו- a_{N-2}

ננסה לבנות את כל התמורות ללא נ"ש מסדר N

ייתכנו שני מקרים

א התמורה התקבלה מתמורה ללא נ"ש מסדר $N-1$ על-ידי תוספת המספר N באופן הבא

נניח ש-

$$\begin{pmatrix} 1 & . & i & . & N-1 \\ . & . & k & & j \end{pmatrix}$$

היא תמורה כלשהי ללא נ"ש

נרחיב תמורה זאת בשלב ראשון על-ידי תוספת N כנקודת שבת

$$\begin{pmatrix} 1 & & i & & N-1 & N \\ & . & k & \cdots & j & N \end{pmatrix}$$

עתה נתקן את המצב ע"י החלפת N שבשורה התחתונה עם אחד מהמספרים האחרים שבאותה שורה

$$\begin{pmatrix} 1 & . & i & & N-1 & N \\ & . & N & & j & k \end{pmatrix}$$

יש, כמובן, $N-1$ דרכים שונות לבצע תיקון כזה לפיכך מספר התמורות מסדר N ללא נ"ש המתקבל מכל תמורה ללא נ"ש מסדר $N-1$ הוא $N-1$, ולכן יתקבלו בסך הכול a_{N-1} $(N-1)$ תמורות מסוג זה

ראוי להדגיש שאם מראש לוקחים שתי תמורות שונות מסדר $N-1$, הן נבדלות לפחות בשני מקומות שונים בשורה התחתונה התהליך שתואר לעיל ליצירת תמורה

מסדר N מחליף רק מספר אחד מתוך המספרים שבמקומות אלה ב־ N, ולכן לא ייתכן שתתקבל משתי תמורות שונות מסדר $N-1$ אותה תמורה ללא נ"ש מסדר N

ב. נשים לב שלא כל תמורה חסרת נ"ש מסדר N יכולה להתקבל בתהליך הנ"ל למשל, לא יכולה להתקבל תמורה כזאת

$$\begin{pmatrix} 1 & i & N \\ \ldots N & & i \end{pmatrix}$$

אחרת, בתמורה המקורית מסדר $N-1$ הייתה נקודת שבת ב־i

לכן, צריך עוד לספור את התמורות ללא נ"ש מסדר N שבהן יש חילוף בין N לבין אחד המספרים האחרים, כמו בתמורה האחרונה [5] ש, כמובן, אפשרות חילוף עם $(N-1)$ מספרים שונים יתר המספרים השייכים לכל תמורה עם חילוף קבוע כזה יוצרים תת-תמורה מסדר $(N-2)$, חסרת נ"ש לכן, לכל מספר i נתון, $1<i<N$, יש a_{N-2} תמורות שונות ללא נ"ש אשר בהן i עצמו מתחלף עם N, ומכאן שיש סה"כ a_{N-2} $(N-1)$ תמורות מסדר N מסוג זה

נחבר את התוצאות שקיבלנו בניתוח שני המקרים ונקבל את התוצאה המבוקשת

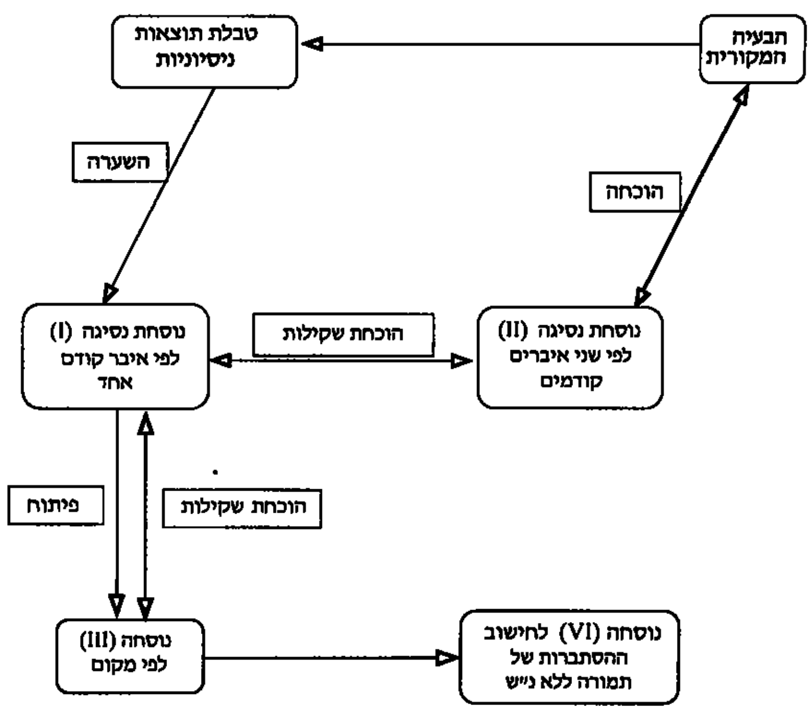
(II)

$$a_N=(N-1)\cdot(a_{N-1}+a_{N-2})$$

משל"

ו. תרשים

התרשים הבא מסכם את תפקידיהן של 3 הנוסחאות ביחס לפתרון הבעיה המקורית.



5 אפשר להסתכל על תמורה עם חילוף כזה כאילו התקבלה מתמורה מסדר N–1 בעלת נקודת שבת יחידה ב־i על־ידי הרחבה לתמורה מסדר N ותיקון שתי נקודות השבת על־ידי חילוף בין התמונות