

## הנושא: על פיתולי נהרות והמודל המתמטי של

### תופעה זו

הוכן ע"י: נצה מובשוביץ-הדר ואלה שמוקלר.

תקציר: במאמר מוצג מודל מתמטי לניבוי וחיזוי של מסלול ההתפתחות של נחלים ונהרות. המחברות מראות כיצד ניתן להגיע לאותו מודל בשתי גישות שונות: הגישה הדטרמיניסטית והגישה ההסתברותית.

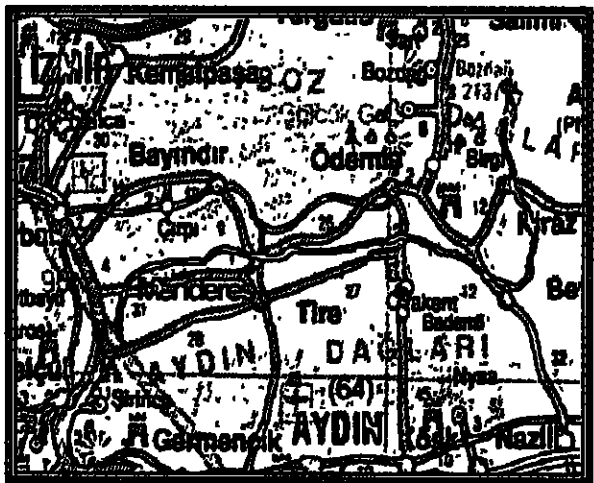
מילות מפתח: גיאומורפולוגיה, נהר, נחל, עקמומיות, פיתולי נהרות, תופעות טבע, מודל מתמטי, משוואה פרמטרית, טריגונומטריה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, פונקציה קדומה, פונקציה רציפה, אינטגרל, נקודות קיצון, חשבון וריאציות, כופלי לגרנז', משוואת אוילר, משוואה דיפרנציאלית, גישה דטרמיניסטית, גישה הסתברותית, התפלגות נורמלית, תוחלת.

החומר פורסם במסגרת: עלי"ה 25, חורף תש"ס, 2000, עמודים 62-76.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 15 עמודים.

# על פיתולי נהרות והמודל המתמטי של תופעה זו

וכך הם מוצגים גם במפות הדבר המפתיע הוא שלהתפתלותו ישל ונהר יש חוקיות יתר על כן, במקומות שונים ובתנאים שונים יש לתופעה זו אותה חוקיות, והנהחות זוהמים בטבע בפיתולים דומים זה לזה בצורתם, שמופיעים זה בעקבות זה באורח מתמיד. הפיתולים



איור 1 מפת טורקיה עם הנהר ומנהרס

נקהאים בלועזית מיאנדרים (meanders) ובעברית, בשפה המקצועית, נפתולים מקוהו של המונה מיאנדר והוא בשם ונהר ומנהרס והזורים בטורקיה וגורמי ותייהות בטורקיה ומצביעים על עמק ונהר. זהו כעל יערש ותרבויות והבות.

## הנפתולים בקולורדו

באיור 2 מוצגים הנפתולים של הנהר קולורדו והזורים בארצות והברית בדהום ימדינת יוטה והם יצולמו ומגובה ישל

ונצה ומובשוביץ-הדר ואלה שמוקלר  
הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, חיפה

מאמר זה נכתב לקהאת'ה הצאה במסגרת סדנאות למרכזי המקצוע ומתמטיקה מטעם 'קשר-חם' - והמרכז והאהצי לקידום, ושיפור וריענון והחינוך המתמטי, ובטכניון

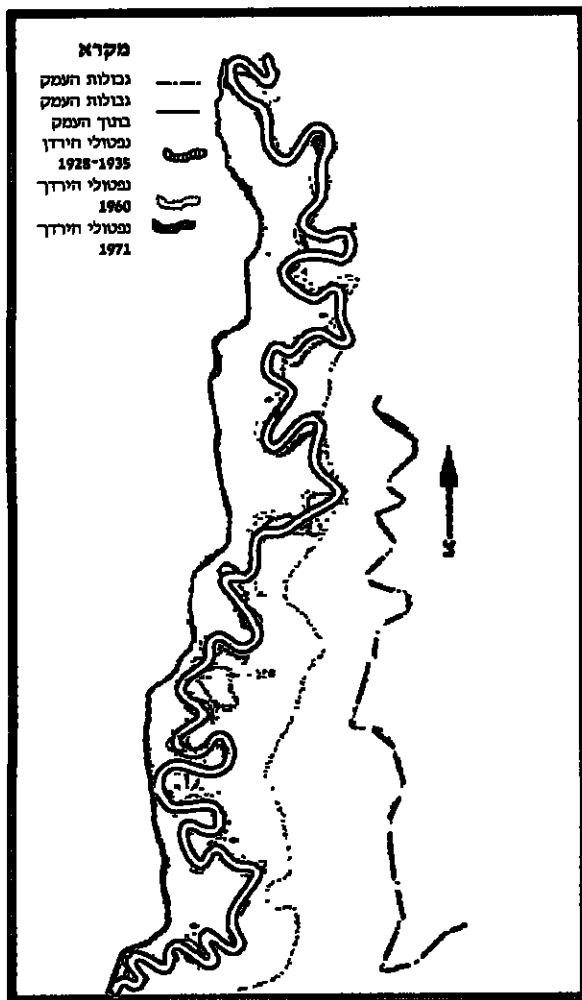
ותודת המחברות ונתונה לפרופ' עקיבא פלכסה, להידרוגיאולוג מהדכי מובשוביץ, יהרי אלכס קופרמן ולגב' זיוה שחם על והערתיהם והמועילות

## מבוא

יכל הנחלים הולכים אלהים והים איננו ומלאי אמר יקהלת (א, ז), אבל מהזע והולכים והם יכולים אל והים ובפיתולים ומזע ונפתלות וטיפות והגשם ובקווים ישרים ובהך כלל, וכדור ישנותנים לו להתגלגל באופן וחופשי במורד ותלול וע בהך והקצה וביותר, וואילו והנהחות לא זוהמים בקו ישרי והאם יש והיגיון ווסדר בפיתולי והנהחותי והאם אפשר להציג מודל ומתמטי והמאפשר וניבוי וחיוזי ישל ומסלול וההתפתלותי על שמלות אלו ועוד וננסה להשיב במאמר זה.

## תופעת המיאנדרים - מהי?

הנהחות והנהחלים זוהמים וממקום וגבוה למקום נמוך וההדות לכוח והמשיכה ומהיות והזרימה והולכת ומואצת במורד והאפיק למרות שטבעי והיה לצפות שמינההר יפלסו לעצמם את והדהך והקצה וביותר, ויזהמו בקו ישר, נדיר במאד למצוא ונהר והזורים למרחק והב במסלול ישר יש קטעים בודדים וקצרים שבהם הזרימה היא בקו כמעט ישר בצילומי אוויר, והנהחות ונהחלים יכללי וקווים ומתפתלים



איור 3 נפטולי הירדן (מתוך [1], עמ' 25)

השנים האחרונות הושפעה עלידי גורמים שמעבר להתפתחות הטבעית התערבות האדם במהלך התקין והטבעי של זרימת הירדן עלידי הפעלת סכר דגניה בשנת 1932 והטיית הירמוך בראשית שנות השישים הקטינו את ספיקת השיא השנתית ואת ההפרש בינה לבין זרימת המינימום התערבות זו גרמה להתקצרותם של נפתולים רבים בירדן, ובכך להקטנת יחס הפיתול הכללי שלו אף כי מגמת ההקטנה של יחס הפיתול של הירדן תימשך, סביר להניח כי אפיק הירדן לעולם לא יהפוך לישר ממש, כי המגמה הטבעית של נהרות בעולם היא לא להתיישר, אלא להתפתל (לפי לבנוני (1975))



איור 2 נפטולי הנהר קולורדו (מתוך [4], עמ' 61)

כ-1000 מטרים ייתכן שנפתולים אלה נוצרו קרוב לראשית ההיווצרות של כל רמת הקולורדו לפני כמיליון שנה או יותר הנפתולים הלכו והתפתחו ככל שהנהר פילס את דרכו עמוק יותר בשכבות הסלע והסחף

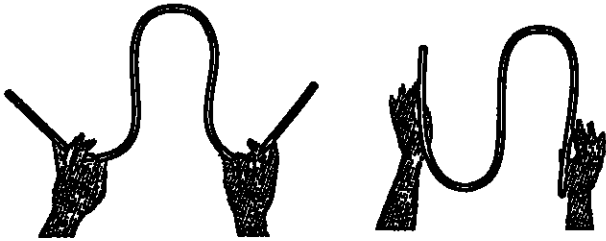
### יחס הפיתול של נפתול

כפי שיתברר בהמשך, הנפתולים בנהר משנים את צורתם ללא הרף מצב ההתפתחות של הנפתולים בנהר מאופיין עלידי היחס המספרי בין אורך האפיק בו זורם הנהר לבין אורכו של אותו נהר בקו אווירי יחס זה נקרא **יחס הפיתול** יחס הפיתול השכיח הוא בערך 2 3 נהר הירדן הוא אחד הנהרות הבולטים ביחס פיתול גבוה במיוחד, לא רק בהשוואה לנחלים בישראל, אלא גם בהשוואה לנהרות אחרים בעולם יחס הפיתול של הירדן הוא בערך 2 1 (רי איור 3) השתנות הנפתולים בירדן במהלך עשרות

## תעלומת הנפתולים

בשתי נקודות, כך שבין שתי נקודות אלו הרצועה יכולה לקבל צורה כלשהי, ללא אילוצים הרצועה יתבחר בצורה המבטיחה את עבודת הכיפוף הקטנה ביותר. צורה זו דומה לצורת הנפתולים בנהרות.

איך אפשר להסביר את הצורה האחידה והמיוחדת של הנפתולים? בשאלה זו נטפל בסעיפים הבאים



איור 5 יצירה של נפתול על-ידי פס מתכת גמיש (מתוך [4], עמ' 66)

### גורמי התפתחותם ותהליך היווצרותם של נפתולים

נפתולי נהרות הם אחת התופעות ההנדסיות הריתמיות הבולטות ביותר על פני כדור הארץ. חקר זרימת הנהרות והנפתולים הוא אחד הנושאים שבהם עוסק המדע הנקרא גיאומורפולוגיה<sup>2</sup>. חקר הנפתולים הוא אחד הנושאים הראשונים שבהם עסקה הגיאומורפולוגיה הכמותית בעקבות מחקרים רבים בתחום זה, התברר שתהליכי העיצוב של צורת הנפתולים הם תהליכים מסובכים הרבה יותר מהנראה במבט ראשון. הגיאומורפולוגיה נותנת תמונה בהירה ומפורטת של גורמי ההתפתחות ותהליך ההיווצרות של נפתולים, מ'הולדתם' ועד 'מותם' במסגרת מאמר זה נסתפק בהצגת הקווים העיקריים של הנושא דיון מעמיק בו אפשר למצוא במקורות [1], [2], [4]

תהליך ההיווצרות של הנפתולים בכל נהר הוא דינמי הנפתולים של נהר מתפתחים במהלך השנים, ומשתנים בהתמדה במשך תקופות ארוכות מאוד היווצרותם המתמדת של נפתולים היא תופעת טבע מדהימה המתרחשת בכל רחבי כדור הארץ היבטיה השונים קשורים לתחומים רבים של חקר פני כדור הארץ גיאולוגיה, גיאופיזיקה גיאומורפולוגיה ועוד החוקרים ביררו ותיארו בפרוטרוט את התנאים הגיאופיזיים של זרימת הנהרות הגורמים להתפתחות הנפתולים ואת תהליך התפתחותם של נפתולים שעליו נרחיב בהמשך הדבר המפליא ביותר בתופעת היווצרותם של נפתולים הוא הצורה הגיאומטרית המיוחדת והאחידה של כל הנפתולים



איור 4 תאונת רכבת ליד גרינוויל, דרום קרוליינה בשנת 1965 (מתוך [4], עמ' 67)

בכל מקומות הופעתם, למרות התנאים הגיאופיזיים השונים כך, לנפתולים המתפתחים בסביבות עתירות טעונת<sup>1</sup> יש אותה צורה כמו לנפתולים המתפתחים בסביבות חסרות טעונת, למשל ערוצי קרחונים וזרם הגולף יתר על כן, גם מחוץ למים אפשר לראות תופעה הדומה לתופעת הנפתולים

איורים 4, 5 מציגים שתי דוגמאות כאלו באיור 4 רואים מסילת רכבת הרוסה כתוצאה מתאונה, שקיבלה צורה המזכירה נפתולי נהר באיור 5 רואים כיצד אפשר ליצור נפתול באופן ידני אוחזים רצועה צרה של פלדה גמישה

2 מורפולוגיה היא המדע אשר חוקר צורה גיאומורפולוגיה היא המדע החוקר צורות טבעיות הנוצרות על פני האדמה ומתחתיה

1 טעונת הוא מונח המבטא את כל החומר המוסע על-ידי הנהר בגריפה על פני הקרקע או בהמסה במימיו

## האפיק ועמק הנהר

כל נהר זורם באפיק שהוא תעלה טבעית, אשר נוצרת בדרך כלל עלידי המים הזורמים, בהתאם לצורכי הזרימה. השינויים בצורת האפיק מתבטאים בעיקר בהעמקתו ובהרחבתו כתוצאה משקיעת הטעונת ומכמות המים הזורמים בנהר העמקת האפיק מביאה ליצירת עמק הנהר מדרונותיו הולכים ונעשים גבוהים ככל שהנהר הולך ומעמיק המדרונות, בדרך כלל, אינם גובלים באפיק, אלא מופרדים ממנו באזורים שטוחים נמוכים המוצפים בזמני שיטפון אזורים אלה, יחד עם האפיק, מהווים את רצפת העמק לעתים רצפת העמק צרה מאוד ומתלכדת עם אפיק הנהר. כך הוא ברוב הנחלים בארצנו לעתים רצפת העמק רחבה מאוד, עד כדי כך שהאפיק מהווה רק חלק קטן ממנה

## השפעת המבנה של רצפת העמק על התפתחות הנפתולים

מחקרים גיאומורפולוגיים רבים מציינים את השפעת המבנה של רצפת עמק הנהר על התפתחותם של נפתולים לפי יהודה לבנוני (1975)

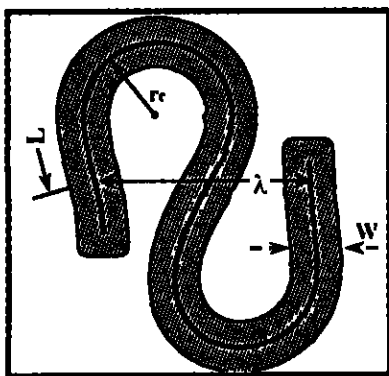
התפתחות הנפתולים מותנית בתנאי זרימת הנהר ובמצע הסלעי הבונה את העמק שלו. באזורים הבנויים מחומר בעל ערכיות מורפולוגית נמוכה (חומר בלתי מלוכד או שליכודו מועט, כך שתהליכי הבליה והסחיפה פועלים ביתר קלות) תחול בדרך כלל התפתחות רבה ביותר של נפתולים.

נפתולים המתפתחים באזור שבו החומר לא מלוכד מכונים נפתולים חופשיים (שטנר 1970), כי הם חופשיים להעתיק את מהלכם מגדה אחת של העמק לשנייה כאלה הם נפתולי הירדן באזורים הבנויים סלע מלוכד ובעל ערכיות מורפולוגית גבוהה, מתפתחים נפתולים 'כלואים', חופש תנועתם מוגבל יותר והם מכונים 'נפתולים חרותים' (שטנר, שם) כאלה הם הנפתולים של נחל שורק בהרי יהודה במאמר זה אנו מתייחסים בעיקר לנפתולים חופשיים

## היווצרות הנפתול

נפתול בודד מורכב משתי קשתות המתחברות זו אל זו ויוצרות יחד צורה של האות S כל קשת עולה בדרך כלל

על 180 מעלות באיור 6 מוצגת צורה כללית של נפתול ואפיוניו העיקריים התעקמות מסלול הזרימה היא היסוד להתפתחותם של נפתולים בדרך כלל, מהירות הזרימה קרוב לגדות הנהר איטית יותר מזו שבאמצע הנהר, בגלל החיכוך עם גדות הנהר כאשר נוצרת הפרעה לזרימת המים בקו ישר, כתוצאה ממכשול או מהבדלים בסוג הקרקע במקומות שונים, המים עוקפים את המכשול ונוצרת קשת באפיק הנהר זרימת המים מואצת וכתוצאה מכך מתגברת פעולת הסחיפה בדופן החיצונית של הקשת, כלומר בגדה הקעורה (אם מסתכלים אל הגדה מתוך האפיק) המים הזורמים אל עבר הגדה הקעורה נתקלים בה ומוחזרים חזרה ממנה תוך כדי זרימה אל הגדה הקמורה כך חוזר על עצמו בהמשך הזרימה התהליך של יצירת קשת נוספת בכיוון ההפוך במעבר דרך נקודת פיתול בין קשת אחת לבאה אחריה, כל הכוחות הפועלים במים הופכים את כיוונם, ותהליך ההיווצרות של קשת חוזר על עצמו בכיוון הנגדי לקשת שכבר נוצרה כתוצאה מתהליך זה נוצרת קשת שנייה בכיוון נגדי לזה של הקודמת, ובכך מסתיימת היווצרות של נפתול אחד בתהליך זה מתפתח כוח צנטריפוגלי המסייע להגדלת רדיוס הקשת בזמן שהגדה הקעורה נסוגה עקב הסחיפה, בגדה הקמורה הולך ומצטבר סחף הצטברויות אלו יוצרות שרטונים שטוחים דמויי משולש הנקראים שרטונים קדקדיים.



איור 6 צורה סכמתית של נפתול (מתוך [4], עמ' 62)  
-W רוחב הערוץ,  $\lambda$ - אורך הגל, L- אורך הערוץ,  
 $r_c$ - מחוג העקמומיות של הנפתול

## הגבלות לגודל הנפתול

הנפתולים מאריכים את מסלול הזרימה של הנהר ותוך כדי כך גורמים להקטנת השיפוע המקומי ומהירות הזרימה ככל שהיקף הנפתול גדול יותר, הוא תורם יותר למיתון שיפוע הנהר ולהקטנת מהירות הזרימה באותו חלק של הנהר כתוצאה מכך חלה הקטנה הדרגתית של הכוח הצנטריפוגלי עד להתאפסותו במצב זה נעצרת הגדלת מחוג הנפתול לפיכך, הגודל של מחוג נפתולי הנהר אינו עולה מעבר לגבול מסוים, המותנה בשיפוע של המדרון, ברוחב הנהר ובכמות המים הזורמים בו בהגיע המחוג לגודלו המקסימלי, הנפתול נקרא נפתול בוגר ככל שיוורדים במורד הנהר, עצמת הזרם גדולה יותר, ולכן הנפתולים מגיעים לבגרות כשהם בעלי מחוג גדול יותר תהליך היווצרות הנפתולים הוא, אפוא, תהליך הגורם לאיזון מהירות הזרימה של המים לאורך אפיק הנהר

ומתפתח ונעשה יותר בוגר, זרועותיו מתחילות להתקרב זו לזו, ולשון היבשה שביניהן נעשית יותר ויותר צרה, עד אשר נוצר מצר המחבר את קצותיהן מצד זה נקרא צוואר הנפתול בעת שיטפון פורצים מי הנהר ומכסים את הצוואר בכך נקטעת אחת מקשתות הנפתול מהנהר אף כי במשך זמן מה יישארו עדיין מים בנפתול הנקטע, הוא נשאר מנותק מהנהר עצמו במצב זה מתיישר מהלכו של הנהר במקום הפריצה לנפתול הקטוע יש צורת סהר והוא מכונה **מקווה הנפתול**. מקווה הנפתול הולך ומתמלא סחף ומתייבש בהדרגה מקווה נפתול שהתייבש נקרא **נפתול חרב**. כל עוד קיימים תנאים הגורמים לפיתול הנהר, נוצרים נפתולים חדשים במקום אלה שנקטעו במקומו של כל נפתול שנקטע כתוצאה מפריצה, מתהווה נפתול חדש במקום אחר, כך שאורך הנהר המתפתל נשאר כמעט קבוע

## מודל מתמטי של תופעת הנפתולים

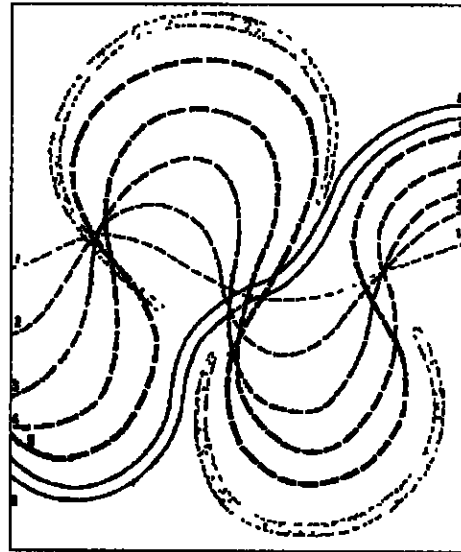
הניתוח הגיאומורפולוגי של תופעת הנפתולים, אשר הוצג בצורה תמציתית בסעיף הקודם, מסביר את צורתם החיצונית המתקבלת כתוצאה של המכניזם של היווצרותם יחד עם זאת במסגרת ניתוח זה לא מתקבלות תשובות לשאלות ספציפיות אחדות הקשורות לצורת הנפתולים, כמו מדוע לנפתולים של נהרות הזורמים בתנאים גיאופיזיים שונים לחלוטין יש צורה גיאומטרית אחידה מדוע צורת הנפתולים מופיעות בסביבות שאינן מימיות (איורים 4,5)

את התשובה לשאלות כאלו אפשר לעתים לקבל מניתוח מתמטי של העקרונות האוניברסליים של זרימת המים, כלומר בעזרת בנייה של מודל מתמטי לתופעת הנפתולים וחקירתו

לתופעה מסוימת אפשר לפתח מודלים מתמטיים שונים, הנבדלים זה מזה במידת הזיקה של כל אחד מהם אל תכונות התופעה העומדות לחקירה באמצעות אותו מודל מתמטי מודל מתמטי לתופעת פיתולי הנהרות, אם אכן קיים, יכול לסייע בחיזוי מראש של שינויים בנתיב הזרימה ולאפשר בכך התערבות של האדם למניעת אסונות ולהגדלת התועלת שהנהר מביא כמקור חיים לאדם, לבעלי-חיים ולצמחייה שבסביבתו

## קישור הנפתול

במהלך התפתחות הנפתול, הולך וגדל השטח בין זרועות הקשת שטח זה מוקף כמעט מכל צדדיו באפיק הנהר, ויוצר חצי אי זעיר - לשון יבשה. ככל שהנפתול הולך

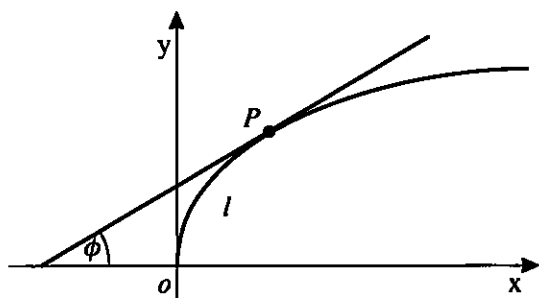


איור 7. תיאור סכמתי של התפתחות הנפתול בשישה שלבים (מתוך [2], עמ' 106)

כידוע, בין כל שתי נקודות במישור קיימים אינסוף מסלולים שונים פשוטים וחלקים וביניהם, כמובן, הקטע הישר, כפי שרואים באיור 8

### משוואה פרמטרית של מסלול

תהא  $B$  נקודה במישור נבחר במישור מערכת צירים  $xOy$ . נבחר מסלול פשוט חלק מ- $O$  ל- $B$  נסמן ב- $l$  את אורך כל המסלול ננסה להגיע למשוואה פרמטרית של המסלול תהא  $P(x, y)$  נקודה על המסלול, נסמן ב- $t$  את אורך המסלול בין  $O$  לבין  $P$  תהא  $\phi$  הזווית בין הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  לבין המשיק למסלול בנקודה  $P$  (ראי איור 9).

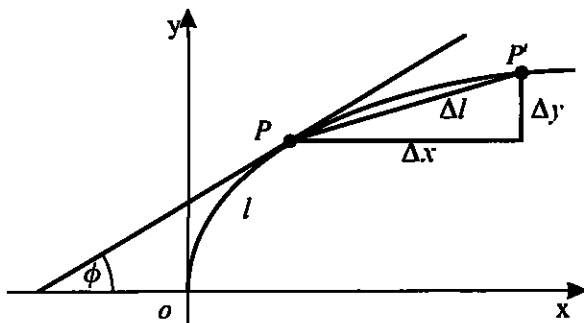


איור 9 כיוון המסלול בנקודה כלשהי  $P$

תהא  $P(x + \Delta x, y + \Delta y)$  נקודה על מסלול הקרובה ל- $P$  נסמן ב- $\Delta l$  את האורך של חלק המסלול בין  $P$  ל- $P'$  מהגדרות אלו נובע כי מתקיים

$$\frac{\Delta x}{\Delta l} \approx \cos \phi$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta l} \approx \sin \phi$$

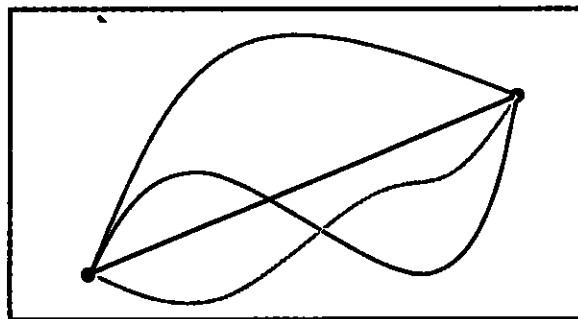


איור 10 שינוי השיעורים בנקודה כלשהי  $P$

קלנדר (Callander 1978) סקר מודלים מתמטיים אחדים של תופעת פיתולי נהרות המודל המתמטי אשר נציג כאן, הוא בעיקרו פרי עבודותיהם של פון-שלינג (Von Schelling 1951) ובעקבותיו ליאופולד ולנגביין (Leopold & Langbein 1966) הגישה לבניית מודל מתמטי, המוצגת במאמר זה, שונה מהגישה של פון-שלינג בכך שהיא איננה הסתברותית, אלא מתבססת רק על שיטות של חשבון וריאציות קלסי<sup>3</sup> לאחר הצגת המודל בגישה זו, שהיא דטרמיניסטית, נביא תיאור של גישה הסתברותית לבניית אותו מודל

### ההנחות הראשוניות

תהיינה  $A, B$  שתי נקודות נתונות במישור לקו כלשהו, ישר או עקום, המחבר את הנקודות האלו, נקרא מסלול מ- $A$  ל- $B$  למסלול נקרא בשם **מסלול פשוט**, אם בתנועה מ- $A$  ל- $B$  לאורך המסלול עוברים בכל נקודה של המסלול פעם אחת ורק אחת, כלומר אין לולאות במסלול, ואין 'חורים' במסלול. מסלול פשוט ייקרא **מסלול חלק**, אם בכל נקודה עליו קיים ישר המשיק לו, אשר שיפועו משתנה באופן רציף (בלי קפיצות), עם תנועת נקודת ההשקה לאורך המסלול. מכאן ואילך כל מסלול שנעסוק בו בהמשך הוא מסלול פשוט וחלק, מסלול שטבוי להניח כי הוא יכול להיות מסלול של זרימת מים בנהר



איור 8 מסלולים פשוטים וחלקים בין שתי נקודות

3 פיתוח המודל דורש ידע ברמה שמעבר לתכנית הלימודים במתמטיקה בבית ספר תיכון תלמידי תיכון, המעוניינים בנושא, יכולים לרכוש ידע זה כחומר העשורה במתמטיקה אפשר להשתמש למטרה זו בספר 'סיפורים על מקסימום ומינימום' מאת טיחומירוב [7]

על-ידי מעבר לגבול עבור מה מקבלים

$$\frac{dx}{dl} = \cos \phi$$

$$\frac{dy}{dl} = \sin \phi$$

שוויונים אלה מתקיימים עבור כל ערך של  $l$  בקטע  $0 < l < L$  כאשר הגודל של  $l$  משתנה, הגדלים  $x, y, \phi$  הופכים לפונקציות של המשתנה  $l$ . הפונקציות  $x(l), y(l)$  הן פונקציות המקום של נקודה הנעה על המסלול והפונקציה  $\phi(l)$  היא פונקציית הכיוון של המסלול

בהתאם לאמור, האגפים הימניים של שתי המשוואות לעיל הם פונקציות טריגונומטריות של פונקציית הכיוון  $\phi(l)$  על סמך הנגזרות של פונקציות המקום, הפונקציות  $x(l), y(l)$  הן הפונקציות הקדומות

$$x(l) = \int \cos \phi(l) dl + C$$

$$y(l) = \int \sin \phi(l) dl + C$$

נסמן ב- $l$  פרמטר המשתנה בקטע  $(0, L)$  מכיוון ש- $x(0) = y(0) = 0$ , אפשר לרשום את השוויונים האחרונים

כך

$$\begin{cases} x(l) = \int_0^l \cos \phi(l) dl \\ y(l) = \int_0^l \sin \phi(l) dl \end{cases} \quad (1)$$

שתי המשוואות (1) הן המשוואות הפרמטריות של המסלול העובר בין הנקודות  $O$  ו- $B$ , ש- $\phi(l)$  היא פונקציית הכיוון שלו

~

### העקמומיות (curvature) של מסלול

לפי נתוני המוצא, הפונקציה  $\phi(l)$  רציפה בקטע  $0 \leq l \leq L$  הנחה זו מוצדקת על-ידי כך שהמים בנהרות ובנחלים שבטבע, בדרך כלל, משנים את כיוון זרימתם באופן הדרגתי, ללא קפיצות פתאומיות יתר על כן, מהירות ההשתנות של כיוון הזרימה משתנה גם היא באופן רציף והדרגתי לכן אפשר להניח, נוסף על רציפות הפונקציה  $\phi(l)$  בקטע  $0 \leq l \leq L$ , גם את רציפות נגזרתה בקטע זה

תהא  $P$  נקודה על המסלול, המתאימה לערך  $l$  ותהא  $P'$  נקודה על המסלול המתאימה לערך  $l + \Delta l$

לפיכך, העקמומיות הממוצעת של קשת המסלול בין הנקודה  $P$  לבין  $P'$  היא

$$\frac{\phi(l + \Delta l) - \phi(l)}{\Delta l}$$

כשנעבור לגבול עבור  $\Delta l \rightarrow 0$ , נקבל את העקמומיות בנקודה  $P$ . נסמן אותה ב- $c(l)$

$$c(l) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\phi(l + \Delta l) - \phi(l)}{\Delta l} = \phi'(l)$$

העקמומיות הממוצעת  $\hat{c}$  לאורך המסלול תוגדר כממוצע הריבועי האינטגרלי של  $\phi'(l)$

$$\hat{c} = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L (\frac{d\phi}{dl})^2 dl}$$

זהו האנלוג הרציף של ממוצע הריבועים של  $n$  מספרים (כמו, למשל, סטיית תקן)

### מינימום העקמומיות של המסלול

אנו מעוניינים למצוא מסלול (או מסלולים) המוביל מראשית הצירים אל נקודה נתונה  $B$ , אשר עבורו העקמומיות הממוצעת,  $\hat{c}$ , היא מינימלית, שהרי טבעי להניח שהנהר מחפש מסלול כזה ברור שאם מדובר על מינימום מוחלט, כלומר מינימום בקבוצת כל המסלולים האפשריים מ- $O$  ל- $B$ , הפתרון מיני, והוא הקטע הישר  $OB$ , כי  $\hat{c} \geq 0$  ו- $\hat{c} = 0$  עבור קטע ישר על כן נחפש מינימום מקומי ולא מינימום מוחלט

השאלה שנחקר היא אפוא האם בין המסלולים העקומים (פשוטים וחלקים) מ- $O$  ל- $B$  בעלי אורך נתון  $L$  ( $L > |OB|$ ) קיים מסלול שעבורו  $\hat{c}$  מינימלי (מינימום מקומי)?

מכיוון שפונקציית השורש עולה בתחום הגדרתה והערך של  $L$  הוא קבוע, השאלה לעיל שקולה לשאלה הבאה האם בין המסלולים העקומים מ- $O$  ל- $B$  בעלי אותו אורך נתון  $L$ , הגדול מ- $|OB|$ , קיים מסלול עבורו מתקבל מינימום (מקומי) של האינטגרל



$$\int_0^L \left(\frac{d\phi}{dl}\right)^2 dl \quad (2)$$

כאשר המקדמים  $\lambda, \mu$ , הנקראים כופלי לגרנז', הם מספרים ממשיים

לפי ההנחה, הפונקציה  $\phi(l)$  היא רציפה ובעלת גזרת רציפה בקטע  $0 \leq l \leq L$

לפי אחד המשפטים של התחום המתמטי הנקרא חשבון וריאציות, אם פונקציה  $\phi(l)$ , שהיא רציפה ובעלת גזרת רציפה בקטע  $[0, L]$ , היא פונקציה המספקת מינימום לאינטגרל (2) באילוצים (3), (4), פונקציה זו מספקת מינימום גם לאינטגרל (5), שבו הכופלים  $\lambda, \mu$  הם מספרים ממשיים מתאימים, אשר אינם מתאפסים ברזומנית

נסמן ב- $x_1, y_1$  את שיעורי הנקודה  $B$  שהיא נקודת הסיום של כל המסלולים לפי המשוואות הפרמטריות (1) המתארות את שיעורי הנקודה על המסלול מ- $O$  ל- $B$ , מתקיים

$$x_1 = y(L) = \int_0^L \cos \phi(l) dl$$

$$y_1 = y(L) = \int_0^L \sin \phi(l) dl$$

או

$$\int_0^L \cos \phi(l) dl - x_1 = 0 \quad (3)$$

$$\int_0^L \sin \phi(l) dl - y_1 = 0 \quad (4)$$

על סמך הפיתוח לעיל אפשר להציג את בעיית המינימום של עקמומיות המסלולים המחברים שתי נקודות נתונות במישור באופן הבא

בין כל הפונקציות  $\phi(l)$  שהן רציפות ובעלות גזרת רציפה, המקיימות את תנאים (3), (4) בקטע  $[0, L]$ , יש למצוא פונקציה (לא קבועה) המספקת מינימום (מקומי) לאינטגרל (2)

בסעיפים הבאים נביא בקווים כלליים פתרון לבעיה, הנשען על חשבון וריאציות אחריו נביא, בקווים כלליים, פתרון הנשען על תורת ההסתברות פירוט נוסף מופיע בנספח.

### יישום של שיטת כופלי לגרנז' להתרת הבעיה

כדי לטפל באופן מאוחד באינטגרל (2) ובאילוצים (3), (4), נבצע פעולה שאותה הציע לגרנז' נבנה ביטוי חדש המתקבל מ-(2), (3), (4) באופן הבא

$$\int_0^L \left(\frac{d\phi}{dl}\right)^2 dl + \lambda \left(\int_0^L \cos \phi(l) dl - x_1\right) + \mu \left(\int_0^L \sin \phi(l) dl - y_1\right)$$

או

$$\int_0^L \left[ \left(\frac{d\phi}{dl}\right)^2 + \lambda \left(\cos \phi(l) - \frac{x_1}{L}\right) + \mu \left(\sin \phi(l) - \frac{y_1}{L}\right) \right] dl \quad (5)$$

### שימוש במשוואת אוילר להמשך הפיתוח

נסמן ב- $F$  את האינטגרנד באינטגרל (5)

$$F(\phi) = (\phi'(l))^2 + \lambda \left(\cos \phi(l) - \frac{x_1}{L}\right) + \mu \left(\sin \phi(l) - \frac{y_1}{L}\right)$$

(6)

$$\phi'(l) = \frac{d\phi}{dl} \quad \text{כאשר}$$

יהיו  $F'_{\phi}$  ו- $F'_{\phi'}$  גזרות חלקיות של  $F$  ביחס ל- $\phi$  ו- $\phi'$  בהתאמה לפי אחד מהמשפטים היסודיים של חשבון וריאציות, פונקציה  $\phi(l)$ , עבורה לאינטגרל (5) מתקבל ערך מינימלי, מקיימת בהכרח את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה, הנקראת משוואת אוילר

$$F'_{\phi} = \frac{d}{dl} (F'_{\phi'}) \quad (7)$$

מ-(6) אנו למדים כי

$$F'_{\phi} = -\lambda \sin \phi(l) + \mu \cos \phi(l)$$

$$\frac{d}{dl} (F'_{\phi'}) = \frac{d}{dl} (2\phi'(l)) = 2\phi''(l)$$

נציב זאת במשוואת אוילר (7) ונקבל

$$2\phi''(l) = -\lambda \sin \phi(l) + \mu \cos \phi(l) \quad (8)$$

$$\phi''(l) = \frac{d^2 \phi}{dl^2} \quad \text{כאשר}$$

התקבלה משוואה דיפרנציאלית ממעלה שנייה שהנעלם בה הוא הפונקציה  $\phi(l)$ . יש לשים לב לכך שהמשוואה מכילה פונקציות טריגונומטריות של המשתנה הפונקציונלי  $\phi(l)$

**פתרונות המשוואה הדיפרנציאלית**

פוך-שלינג (1951) מצא את הנוסחה המתארת בצורה סתומה איך-סוף פתרונות שונים של משוואה (8)

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\omega}} = \alpha l \quad (9)$$

$$(0 \leq l \leq L)$$

כאשר  $\phi, l$  הם משתנים ו- $\alpha, \omega$  הם מספרים ממשיים קבועים

נוסחה (9) מתארת בצורה סתומה איך-סוף פתרונות שונים של (8) אין אפשרות להביא נוסחה זו לצורה מפורשת, כי האינטגרל באגף השמאלי של (9) אינו ניתן להבעה בעזרת פונקציות אנליטיות בצורה סגורה (סופית) על בסיס הפתרון של פון-שלינג, מצאו ליאופולד ולנגביין (1966) פתרונות מפורשים מקורבים של המשוואה הדיפרנציאלית (8) מהצורה

$$\phi'(l) = \omega \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \quad (10)$$

$$(0 \leq l \leq L)$$

הגרף של הפונקציה (10) מתקבל מהגרף של הפונקציה  $\sin l$  על-ידי מתיחתו לאורך הצירים זוהי משפחה של פונקציות שהן פונקציות סינוס בעלות מחזור  $L$  ומשרעת (אמפליטודה)  $\omega$  פיתוח הנוסחאות (9), (10) מופיע בנספח

**עקום תיאורטי של נפתולים**

לפי ליאופולד ולנגביין (1966), הפונקציה (10) מתארת בקירוב את ההשתנות של כיוון הנפתול בהתאם לכך, על-ידי הצבת (10) ב-(2), צורת הנפתולים ניתנת לתיאור תיאורטי על-ידי המשוואות הפרמטריות

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\omega \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right)\right) dl$$

$$y(t) = \int_0^t \sin\left(\omega \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right)\right) dl \quad (11)$$

כאשר  $t$  הוא, כאמור, פרמטר המשתנה בקטע  $[0, L]$  ליאופולד ולנגביין קראו לעקום (11) בשם 'עקום הנוצר על ידי סינוסי (Sine generated curve) האינטגרלים במשוואות (11) אינם ניתנים לחישוב בצורה ישירה, אלא

רק בשיטות נומריות באיור 11-א מוצג עקום שנבנה באמצעות התכנה MathCad עבור ערכים נתונים של  $L$  ו- $\omega$  חשוב לציין כי שיטת המציאה של העקום (11) מתבססת על התנאי ההכרחי למינימום מקומי של אינטגרל (2) בתנאים (3), (4) לכן יש לבדוק בנוסף, אם בין כל העקומים בסביבת העקום הנוצר על-ידי סינוס, עקום זה אכן מספק את הערך המינימלי לאינטגרל (2) בדיקה בכיוון זה, שנעשתה בעזרת מחשב, מוצגת בסעיף הבא

**אימות ממוחשב של התוצאות התיאורטיות**

נגדיר שתי פונקציות כיוון בקטע  $0 \leq l \leq L$

פונקציה טריגונומטרית  $\phi_0'(l) = \omega \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right)$  ופונקציה פולינומיאלית ממעלה שלישית  $\phi(l)$  אשר צורת הגרף שלה בקטע  $0 \leq l \leq L$  דומה לצורת הגרף של  $\phi_0(l)$  אחר כך נשווה את העקמומיות הממוצעת של שני המסלולים הנבנים באמצעות המשוואות הפרמטריות, על-ידי כל אחת משתי הפונקציות אם, למרות שינויים בערכי הפרמטרים, נקבל בבדיקה, שהעקמומיות הממוצעת של 'העקום הנוצר על-ידי סינוסי קטנה מזו של העקום הנוצר על-ידי הפונקציה האחרת, נראה בכך, כמובן, אישוש לתיאוריה

את  $\phi(l)$  אפשר לבנות באופן הבא נבחר בתור פונקציית המוצא פולינום ממעלה שלישית  $\beta(l)$  אשר מתאפס, כמו הפונקציה  $\phi_0(l)$ , בקצוות ובאמצע של הקטע  $0 \leq l \leq L$

$$\beta(l) = l\left(\frac{L}{2} - l\right)(L - l)$$

הנגזרת של  $\beta(l)$  היא

$$\beta'(l) = 3l^2 - 3lL + \frac{L^2}{2}$$

הנגזרת מתאפסת עבור

$$l = (3 \pm \sqrt{3}) \frac{L}{6}$$

מכאן, שהערך המקסימלי של הפונקציה  $\beta(l)$  בקטע  $0 \leq l \leq L$  מתקבל עבור

$$l_1 = (3 - \sqrt{3}) \frac{L}{6}$$

באיור 11-א מוצג העקום הנוצר על-ידי הפונקציה הטריגונומטרית

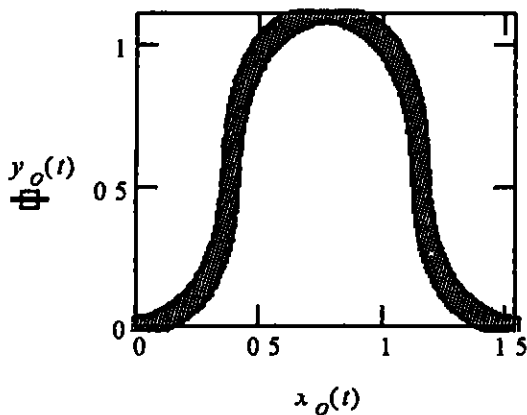
$$\phi_0(l) = \omega \sin\left(2\pi \frac{l}{L}\right)$$

לפי המשוואות הפרמטריות

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos \phi_0(l) dl \\ y(t) = \int_0^t \sin \phi_0(l) dl \end{cases}$$

$$\omega = 1.5, L = 3, 0 \leq l \leq L$$

כאשר



איור 11-ב

באיור 11-ב מוצג העקום הנוצר על-ידי הפונקציה הפולינומיאלית

$$\phi(l) = \frac{\omega}{m} l \left(\frac{L}{2} - l\right) (L-l)$$

לפי המשוואות הפרמטריות

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos \phi(l) dl \\ y(t) = \int_0^t \sin \phi(l) dl \end{cases}$$

כאשר

$$\omega = 1.5, L = 3, 0 \leq l \leq L$$

העקמומיות הממוצעת של העקום המופיע באיור 11-א בקטע  $0 \leq l \leq L$  היא.

$$\int_0^L \left(\frac{d}{dl} \phi_0(l)\right)^2 dl = 14.804$$

והערך המינימלי - עבור

$$l_2 = (3 + \sqrt{3}) \cdot \frac{L}{6}$$

קל לוודא כי

$$\beta(l_1) = -\beta(l_2)$$

נסמן

$$m = |\beta(l_1)| = |\beta(l_2)|$$

ונגדיר

$$\phi(l) = \frac{\omega}{m} \cdot \beta(l) = \frac{\omega}{m} l \left(\frac{L}{2} - l\right) (L-l)$$

כאשר  $0 \leq l \leq L$

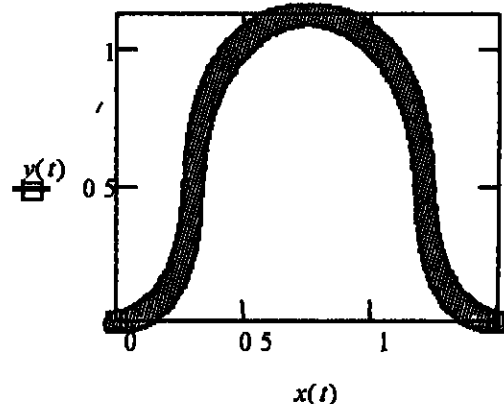
בחרנו פונקציה פולינומיאלית  $\phi(l)$  דומה לפונקציה הטריגונומטרית  $\phi_0(l)$  בכך שלשתייהן יש אותן נקודות אפס  $l=0, l=1/2, l=L$  ואותה משרעת (אמפליטודה)  $\omega$  באיורים 11-א, 11-ב מוצגים העקומים (המהווים מסלולים) הנוצרים באמצעות המשוואות הפרמטריות

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos \phi(l) dl \\ y(t) = \int_0^t \sin \phi(l) dl \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos \phi_0(l) dl \\ y(t) = \int_0^t \sin \phi_0(l) dl \end{cases}$$

על-ידי הפונקציות

$$\phi(l) = \frac{\omega}{m} l \left(\frac{L}{2} - l\right) (L-l) \quad \text{ו} \quad \phi_0(l) = \omega \sin\left(2\pi \frac{l}{L}\right)$$

בהתאמה, עבור ערכי הפרמטרים הבאים  $\omega = 1.5, L = 3$  הערך של ריבוע העקמומיות הממוצעת של העקום, המחושב על-ידי האינטגרל של ריבוע הנגזרת של הפונקציה היוצרת את המסלול בקטע  $0 \leq l \leq L$  מופיע בהמשך



איור 11-א

הנפתולים ניסוי במחשב מצביע על כך שעבור ערכי  $\omega$  הגדולים מ-2, מופיעות לולאות בעקומים הנוצרים על-ידי סינוס במצב כזה מתקבלים מסלולים לא פשוטים, בניגוד להנחת המוצא שלנו, שנעשתה בהתאם לצורת הנפתולים במציאות (הקורא המתעניין יכול לחקור מדוע בערכים אלה חל השינוי)

**השוואה בין העקום התיאורטי של נפתול לבין צורת הנפתולים במציאות**

ניסיונות רבים נעשו בנהרות על-ידי חוקרי הנפתולים כדי להשוות בין הצורה של נפתולים במציאות לבין צורת העקום התיאורטי הנוצר על-ידי סינוס. תוצאותיהן של השוואות אלו לגבי שני נהרות מוצגות באיור 12 מצד שמאל הקו העבה מסמן את צורת הנפתול כפי שנמצאה במדידות של מסלול הנהר במציאות. הקו המרוסק שכמעט צמוד אליו, הוא עקום תיאורטי הנוצר על-ידי סינוס, כלומר עקום שפונקציית הכיוון שלו היא

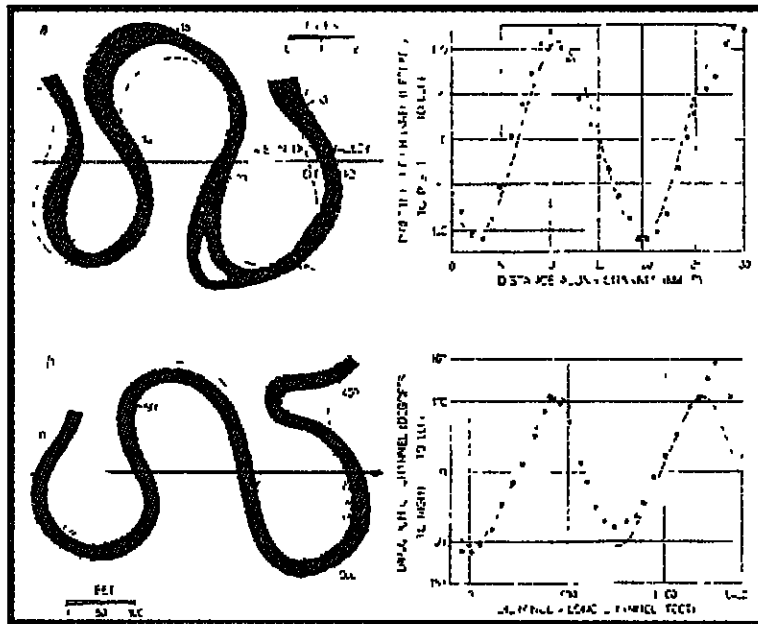
$$\phi_0(l) = \omega \sin\left(2\pi \frac{l}{L}\right)$$

העקמומיות הממוצעת של העקום המופיע באיור 11-ב, בקטע  $0 \leq l \leq L$  היא

$$\int_0^L \left(\frac{d}{dl} \phi(l)\right)^2 dl = 16.2$$

מהתוצאות שלעיל רואים שהעקמומיות הממוצעת של העקום הנוצר על-ידי הפונקציה,  $\phi_0(l) = \omega \sin\left(2\pi \frac{l}{L}\right)$ , קטנה מהעקמומיות הממוצעת של העקום הנוצר על-ידי הפולינום,  $\phi(l) = \frac{\omega}{m} l\left(\frac{L}{2} - l\right)(L - l)$ , אף כי לשתי

הפונקציות יש תכונות משותפות רבות באמצעות התכנה MathCad או תכנה דומה לה אפשר לשנות את ערכי הפרמטרים ולקבל תוצאות חדשות מעניין להיווכח כי יחס זה נשמר כאשר משנים את ערכי הפרמטרים  $\omega, L$ . ראוי לציין כי קיימת מגבלה על הפרמטר  $\omega$  עבור העקום הנוצר על-ידי  $\phi_0(l) = \omega \sin\left(2\pi \frac{l}{L}\right)$  והמייצג את צורת



איור 12 (מתוך [4], עי' 64)

משמאל השוואה בין עקומים תיאורטיים לבין צורות של נפתולים במציאות מימין השוואה בין פונקציית הכיוון של המסלול התיאורטי לבין ערכי פונקציית הכיוון של המסלול במציאות

מהנחה זו ומהנחה נוספת כי הגדלים

$\Delta\phi_1, \Delta\phi_2, \Delta\phi_3, \dots, \Delta\phi_n$  אינם תלויים זה בזה, נובע כי התפלגות ההסתברות של סדרת שינויי הכיוון הנ"ל היא

$$f(\Delta\phi_1) f(\Delta\phi_2) f(\Delta\phi_3) \dots f(\Delta\phi_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta l}}\right)^n e^{-\frac{\Delta\phi_1^2 + \Delta\phi_2^2 + \Delta\phi_3^2 + \dots + \Delta\phi_n^2}{2\Delta l}}$$

נשאלת השאלה עבור אילו שינויי כיוון הביטוי לעיל מקבל ערך מקסימלי

שאלה זו שקולה לשאלה

עבור איזו סדרת ערכים  $\Delta\phi_1, \Delta\phi_2, \Delta\phi_3, \dots, \Delta\phi_n$

מתקבל ערך מינימלי של הביטוי

$$\frac{\Delta\phi_1^2 + \Delta\phi_2^2 + \Delta\phi_3^2 + \dots + \Delta\phi_n^2}{\Delta l}$$

אפשר לרשום ביטוי זה בצורה הבאה

$$S = \left(\frac{\Delta\phi_1}{\Delta l}\right)^2 \Delta l + \left(\frac{\Delta\phi_2}{\Delta l}\right)^2 \Delta l + \dots + \left(\frac{\Delta\phi_n}{\Delta l}\right)^2 \Delta l$$

נניח כעת כי המרווח  $\Delta l$  בין שני שינויים עוקבים בכיוון

החלקיק שואף לאפס הואיל ו- $\Delta l = \Delta t$ , קיים גם  $\Delta l \rightarrow 0$

בתנאי זה הסכום  $S$  לעיל שואף לאינטגרל

$$\int_0^L \left(\frac{d\phi}{dl}\right)^2 dl \quad (12)$$

כאן שוב,  $\phi$  מסמן את פונקציית הכיוון של מסלול תנועת

החלקיק ו- $L$  את אורך המסלול השאלה שנשאלה קודם

לגבי סדרת שינויי הכיוון הופכת לשאלה לגבי פונקציית

הכיוון

עבור איזו פונקציית כיוון  $\phi(l)$  האינטגרל (12) מקבל ערך

מינימלי

אם נדרוש בנוסף שהמסלול יסתיים בנקודה הנתונה

$(x_1, y_1)$  נצטרך להוסיף תנאי השפה

$$\int_0^L \cos\phi(l) dl = x_1 \quad (13)$$

$$\int_0^L \sin\phi(l) dl = y_1 \quad (14)$$

שתי הדוגמאות המופיעות באיור 12 משמאל תומכות

במסקנה כי העקום התיאורטי, המסומן בקו מרוסק, הוא

קירוב טוב לצורת הנפתולים במציאות, המסומנת בקו עבה

באיור 12 מצד ימין מסורטטת, בקו דק רציף

במערכת צירים, 'פונקציית הכיוון'  $\phi_0(l) = \omega \sin\left(2\pi \frac{l}{L}\right)$

כמו כן מופיעים במערכת הצירים ערכים נקודתיים של

פונקציית הכיוון של מסלול הנהר במציאות (המוצג מצד

שמאל בקו עבה) ערכים נקודתיים אלה התקבלו באופן

ניסיוני על-ידי מדידת כיוון הזרימה של הנהר גם כאן, יש

כמעט התלכדות של הממצאים התיאורטיים והאמפיריים

### גישה הסתברותית לבניית המודל המתמטי של

#### תופעת הנפתולים

המודל המתמטי של תופעת הנפתולים, אשר הוצג לעיל,

נבנה בגישה דטרמיניסטית, כלומר ללא שיקולים

הסתברותיים כלשהם להלן נציג גישה הסתברותית

לבנייה של אותו מודל גישה זו בעיקרה תואמת את

גישתו של פון-שלינג, תוך 'קיצורי דרך' אחדים [6]

נניח כי במישור  $xOy$  נע חלקיק במהירות קבועה בגודל 1,

אולם כיוון תנועתו משתנה באופן אקראי בכל רגע ורגע

כיוון החלקיק בזמן נתון נמדד על-ידי הזווית  $\phi$  הנוצרת בין

וקטור המהירות של החלקיק לבין הכיוון החיובי של ציר

ה- $x$ . נסמן את שינוי הכיוון ב- $\Delta\phi$  נניח תחילה כי שינויי

הכיוון של החלקיק חלים במרווחי זמן שווים

$$\Delta t, 2 \Delta t, 3 \Delta t, \dots, n \Delta t$$

נסמן שינויים אלה בהתאמה

$$\Delta\phi_1, \Delta\phi_2, \Delta\phi_3, \dots, \Delta\phi_n$$

היות שהמהירות של החלקיק היא 1, החלקיק עובר אותו

מרחק  $\Delta l$  בין שני שינויים עוקבים של הכיוון, דהיינו

$\Delta l = \Delta t$  טבעי להניח כי הגודל  $\Delta\phi$  של שינויי הכיוון, הוא

בעל התפלגות נורמלית בעלת תוחלת  $m=0$  וסטיית תקן

שלה  $\sigma = \sqrt{\Delta l}$  כלומר, הפונקציה של התפלגות

ההסתברויות של  $\Delta\phi$  היא

$$f(\Delta\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta l}} e^{-\frac{\Delta\phi^2}{2\Delta l}}$$

## לסיים:

### הזמנה לטיולים מתמטיים בנחלים

העובדה המפתיעה והמדהימה היא כי בכל רחבי העולם 'מעדיפים' נהרות ונחלים, בתנאים מקומיים שונים, 'לסטות' מדרך הישרי' ולהתפתל כדי להקטין את סחיפת הגדות, והם 'יודעים' איך להתפתל כך שבכל זאת העקמומיות הממוצעת תהיה מינימלית. תוך כדי התפתלותם 'שואפים' הנחלים לאזן את מהירות הזרימה לאורך האפיק לנו לא נותר אלא להתפעל מהחכמה הנסתרת במעשה הבריאה

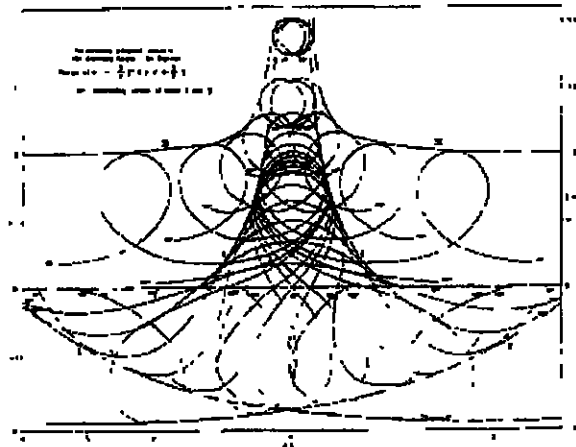
בארצנו היפה והקטנה יש נחלים רבים, גדולים וקטנים ונהר אחד הידוע בכל העולם – הירדן כולם מתפתלים, כמובן איזה מהם הוא המתפתל ביותר ואיזה הישר ביותר? האפיון המרכזי של הנחל המתפתל הוא מידת הסטייה של קו זרימתו מקו ישר אפיון זה נקרא יחס הפיתול כדי לקבוע אפיון זה יש לדעת את נקודת המוצא של הנחל, את נקודת סיומו והעיקר – את המרחק האווירי ביניהן,  $D$  כמו כן, יש לדעת את האורך,  $L$ , של ערוץ הנחל שהוא מידת הדרך אשר עוברים כאשר הולכים לאורך שפת הנחל מתחילתו עד סופו היחס  $D/L$  הוא יחס הפיתול של הנחל והוא מאפיין את הסטייה של קו הזרימה המתפתל של הנחל מקו ישר נתונים חשובים נוספים קשורים לאיתור הנפתולים בנחל ותיאורם בהתאם לאפיונים שצוינו באיור 2

המשרד לאיכות הסביבה, הקרן הקיימת לישראל והמנהלה לשיקום נחלי ישראל מוציאים לאור עלון בשם 'נחלי ארצנו', שבו מוצג המצב של הנחלים בישראל, מתוארות עבודות שיקום ותכניות הפיתוח של סביבתם. בעלון מס' 3, שיצא בקיץ 98, מופיעה הצעה לבילוי חופשת הקיץ 'כדאי ואפשר לשלב טיולים על גדות הנחלים ובשטחים הפתוחים שבסביבתם' גם בסתיו ובאביב ואף בימי חורף בהירים, כדאי לצאת לטיולים מתמטיים בנחלים, לראות את הנפתולים, ולהכיר את סביבתם אם בעקבות הטיולים ייאספו נתונים המאפיינים את זרימת הנחלים ברחבי הארץ, נוכל למצוא את הנחל המתפתל ביותר. על-ידי עיבוד סטטיסטי של הנתונים, ייתכן חישוב של יחס הפיתול הממוצע של הנחלים בארץ ושל הסטייה הממוצעת ממנו ועוד ועוד

האינטגרל (12) והתנאים (13), (14) זהים בהתאמה לאינטגרל (2) ולתנאים (3), (4) כלומר הגענו לאותה בעיית מינימום שהתקבלה בגישה הדטרמיניסטית כל הפתרונות של בעיה זו מתוארים על-ידי תבנית (9) תבנית זו מכילה שני פרמטרים ובאמצעותה מוגדרת משפחה אינסופית של עקומים במישור בעלי עקמומיות ממוצעת מינימלית

מהפיתוח לעיל אפשר לחסיק תכונה מיוחדת נוספת של עקומים אלה כמסלולים הסבירים ביותר (Most Probable Paths) בתנועה אקראית במישור. מסלולים אלה מוצגים באיור 13 אפשר גם לראות חלק מהן בתנועתו החופשית של עשן המיתמר מהסיגריה

נחשוב כעת על שינויי אפיק הנהר כתהליך אקראי המושפע על-ידי מכלול גורמים אקראיים. היות שהעקומים של נפתולים מהווים קירוב טוב לעקומים מהמשפחה הנזכרת, אפשר לומר כי מסלול ההתפתלות של הנהר הוא לא רק בעל ההתעקמות הממוצעת המינימלית, אלא הוא גם המסלול הסביר ביותר מבין כל המסלולים שבהם הנהר יכול 'לבחור' לו לזרום בהם בתנועתו האקראית



איור 13 המסלולים השכיחים ביותר של תנועה אקראית במישור (מתוך [6] עמ' 225)

המעוניינים להצטרף לאיסוף נתונים כזה, מוזמנים להודיע על כך באמצעות רשת התקשורת של יקשר חס' או ב-E-mail לפי הכתובת shmukler@tx.technion.ac.il.

**נספח:**

**מציאת הפתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית (8)**

כדי לפתור את המשוואה (8), נכפול אותה ב-  $\frac{d\phi}{dl}$

$$2 \frac{d\phi}{dl} \frac{d^2\phi}{dl^2} = -\lambda \frac{d\phi}{dl} \sin\phi(l) + \mu \frac{d\phi}{dl} \cos\phi(l)$$

מכאן

$$\frac{d}{dl} \left( \frac{d\phi}{dl} \right)^2 = \lambda \frac{d}{dl} (\cos\phi(l)) + \mu \frac{d}{dl} (\sin\phi(l))$$

ולכן

$$\frac{d}{dl} \left( \left( \frac{d\phi}{dl} \right)^2 - \lambda \cos\phi(l) - \mu \sin\phi(l) \right) = 0$$

מהמשוואה האחרונה נובע כי

$$\left( \frac{d\phi}{dl} \right)^2 - (\lambda \cos\phi(l) + \mu \sin\phi(l)) = C \quad (i)$$

כאשר  $C$  הוא קבוע שרירותי בעזרת פעולות אלגבריות, אפשר להביא את הביטוי

$$\lambda \cos\phi(l) + \mu \sin\phi(l)$$

לצורה

$$U \cos(\phi(l) - h)$$

כאשר  $U, h$  קבועים התלויים בכופלים  $\mu, \lambda$  מכאן, אפשר לרשום את המשוואה (i) באופן הבא

$$\left( \frac{d\phi}{dl} \right)^2 = U \cos(\phi(l) - h) + C \quad (ii)$$

מהצורה המציאותית של הנפתולים אפשר להסיק שהפונקציה  $\phi(l)$  אינה פונקציה קווית לכן הערך של  $U$  שונה מ-0 כמו כן אפשר להניח כי פונקציית הכיוון  $\phi(l)$  משתנה בקטע הסימטרי

$$-\omega \leq \phi \leq \omega$$

כאשר את הערך של  $\omega$  אפשר למצוא באופן ניסיוני מהצורה המציאותית של הנפתולים. נבחר בתור  $h$  את הערך הממוצע של  $\phi(l)$ , כלומר נניח כי  $h = 0$  את הערכים של  $U, C$  נבחר בהתאם לשני תנאים

א הביטוי באגף הימני במשוואה (ii) אינו שלילי.  
ב הפתרון של המשוואה (ii) הוא פונקציה מחזורית של המשתנה  $l$

תנאי א מתבסס על השיקולים המתמטיים, ותנאי ב – על השיקולים הקשורים לצורה המציאותית של הנפתולים אפשר להבטיח את התנאים הנ"ל אם נבחר

$$U = \alpha^2, \quad C = -\cos\omega \quad (iii)$$

מ-(ii) ו-(iii) נובע כי

$$\frac{d\phi}{dl} = \alpha \sqrt{\cos\phi - \cos\omega} \quad (iv)$$

מכאן

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\omega}} = \alpha \cdot l \quad (v)$$

כאשר  $\lambda, \phi$  הם משתנים ו- $\omega, \alpha$  מספרים ממשיים קבועים

הנוסחה (v) מתארת בצורה סתומה אינטגרל פתרונות שונים של המשוואה (ii) אין אפשרות להביא נוסחה זו לצורה מפורשת, כי האינטגרל באגף השמאלי של (v) אינו ניתן להבעה בעזרת פונקציות של אנליזה בצורה סגורה (סופית). הפיתוח להלן מכוון לחישוב מקורב של אינטגרל (v) וכתוצאה מכך למציאת פתרונות מפורשים מקורבים של המשוואה הדיפרנציאלית (ii)

לפי הזהות הטריגונומטרית להפרש קוסינוסים

$$\cos\phi - \cos\omega = -2 \cdot \sin \frac{\phi + \omega}{2} \sin \frac{\phi - \omega}{2} \quad (vi)$$

נניח כי  $\omega$  הוא מספר ממשי חיובי מספיק קטן לפיכך, כל אחד מהארגומנטים של הסינוס בנוסחה (vi) גם הוא קטן נשתמש בקירוב הידוע  $\sin x \approx x$  אשר שגיאתו קטנה ככל שהערך של  $x$  קטן על סמך קירוב זה ונוסחה (vi) מקבלים את השוויון המקורב הבא

$$\cos\phi - \cos\omega \approx -2 \cdot \frac{\phi + \omega}{2} \cdot \frac{\phi - \omega}{2}$$

או

$$\cos\phi - \cos\omega \approx \frac{\omega^2 - \phi^2}{2} \quad (vii)$$

$$\phi(l) = \omega \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \quad (\text{ix})$$

$$(0 \leq l \leq L)$$

( $\omega$  - מספר ממשי כלשהו)

### רשימת ספרות

- 1 לבנוני, יי [1975] 'העתיד הירדן להתיישרי' טבע וארץ, אפריל 1975
  - 2 שטנר, יי [1970] 'עמק הנהר ועיצובו', בתוך גיאומורפולוגיה, העיצוב החיצון של התבליט, ירושלים, קריית ספר, עמ' 97-113
  - 3 W. B Langbein, L B Leopold [1966] 'River Meanders — Theory of Minimum Variance', *U S Geological Survey Professional Paper* 422-H 1-15
  - 4 L B Leopold, W B Langbein [1966] 'River Meanders', *Scientific American* 214 60-70
  - 5 R A Callander [1978] 'River Meandering', *Annual Reviews of Fluid Mechanics* 10 129-158
  - 6 H Von Schelling [1951] 'Most Frequent Particle Paths in a Plane', *Transactions of the American Geophysical Union* 32 222-226
  - 7 V M Tikhomirov [1990] *Stories about Maxima and Minima* American Mathematical Society.
- סיפורים על מקסימום ומינימום, תרגום לעברית של ספר זה יצא לאור באפריל 1999, בסדרת 'המדף המתמטי' של 'קשר חם'

השגיאה של שוויון (vii) קטנה ככל שהגודל  $\omega$  קטן. על סמך השוויון האחרון נרשום את (v) כך

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{\omega^2 - \phi^2}} = \alpha l$$

מכאן על-ידי חישוב האינטגרל וחילוף המשתנה  $\phi$  מקבלים (ב-קבוע נוסף שרירותי)

$$\arcsin \frac{\phi}{\omega} = \alpha l + \beta$$

$$\frac{\phi}{\omega} = \sin(\alpha l + \beta)$$

$$\phi = \omega \sin(\alpha \cdot l + \beta) \quad (\text{viii})$$

השוויון האחרון לעיל מציג אינסוף פתרונות מקורבים של המשוואה הדיפרנציאלית (iv) בהתאם לאינסוף הערכים האפשריים של הפרמטרים  $\alpha, \beta$ . סטיית הפתרונות המקורבים (viii) מהפתרונות המדויקים של משוואה (iv) קטנה ככל שהגודל של  $\omega$  קטן. כדי להבחין בפתרונות פרטיים בין כל הפתרונות האלה נחוצות הנחות נוספות נניח בנוסף, למשל, כי המסלול משיק לציר ה- $x$  בכל אחד מקצותיו, כלומר  $\phi(l) = 0$ , כאשר  $l = 0$  ו- $l = L$

אז, על סמך (viii) מקבלים

$$0 = \omega \sin \beta \Rightarrow \beta = 0$$

$$0 = \omega \sin(\alpha L) \Rightarrow \alpha L = 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{L}$$

על סמך תוצאות אלו מקבלים משפחה של פתרונות מקורבים למשוואה (iv) בצורה המפורשת הבאה

