"קשר חם" – המרכז הארצי
ל**ק**ידום, **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תמטי

הטכניון - מכון טכנולוגיה לישראל
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים
מוסד הטכניון למחקר ופיתוח

מל"מ
המרכז הישראלי להוראת
המדעים ע"ש עמוס דה שליט

הנושא: **חזרנו אל מעגלי הקסם – עם CAS**

הוכן ע"י: אסתר אופנהיים ונורית זהבי.

תקציר: המאמר עוסק במציאת תנאים מספיקים והכרחיים לבניית מעגל סגור של פונקציות לינאריות ומעגל קסם של פונקציות כאלו. מוצגת חקירה מעמיקה בעזרת תכנות Computer Algebra Systems (*CAS*) המאפשרות, נוסף על הצגות גרפיות וחישובים נומריים, גם ביצוע של מניפולציות סימבוליות על ביטויים אלגבריים, ובכך מעשירות את דרכי הפתרון ומוסיפות רבדים עמוקים יותר לחשיבה המתמטית ולשפה המתמטית.

מילות מפתח: אלגברה, פונקציות, פונקציה לינארית, הרכבה של פונקציות, מספרים מרוכבים, מספרים קומפלקסיים, שורשי יחידה, שילוב מחשב בהוראה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 29, סתיו תשס"ג, 2002, עמודים 57-66.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 10 עמודים.

חזרנו אל מעגלי הקסם - עם *CAS*

אסתר אופנהיים ונורית זהבי
מכון ויצמן למדע

ההתנסות בפתרון בעיות במתמטיקה בשילוב מחשב הולכת ותופסת חלק מרכזי בתכנית הלימודים במתמטיקה של כל הגילאים. שילוב המחשב בתהליך הפתרון משפיע על דרך פיתוחן של אסטרטגיות הפתרון, ועל המשמעויות שמקבלים המושגים והמבנים המתמטיים הקשורים לתהליך זה.

תכנות Computer Algebra Systems (*CAS*) המאפשרות, נוסף על הצגות גרפיות וחישובים נומריים, גם ביצוע של מניפולציות סימבוליות על ביטויים אלגבריים, מעשירות את דרכי הפתרון ומוסיפות רבדים עמוקים יותר לחשיבה המתמטית ולשפה המתמטית. תָכנה המאפשרת ביצוע מהיר ונוח של מניפולציות סימבוליות, מעוררת ומעודדת עיסוק בעבודת חקר: בדיקת מקרים רבים נוספים, העלאת שאלות חדשות ומתן הזדמנות להרחבה של הבעיה המתמטית. השימוש במחשב בתהליך פתרון בעיות מאפשר לפתוח חלון אל משמעויות מתמטיות שונות הנארגות ונבנות, כאשר הלומד המתמודד עם בעיה מתמטית, מקשר ומיישם ידע מתמטי קודם בתהליך הפתרון של בעיה נתונה. כך נוצר 'עכביש' של משמעויות - Webs of meanings - (Noss and Hoyles, 1996). במאמר של זהבי וברוקהיימר: Problem solving: Linear functions and magic circles (Zehavi and Bruckheimer,1982), מוצגת בעיית העשרה במתמטיקה בנושא הרכבה של פונקציות ליניאריות. המאמר עוסק בניתוח מתמטי של מציאת התנאים המספיקים וההכרחיים לבניית **מעגל סגור ומעגל קסם** הבנויים מפונקציות ליניאריות. הגישה לבעיה במאמר, הן מבחינה מתמטית והן מבחינה דידקטית, הושפעה מהעובדה שהפתרון נעשה בעזרת נייר ועיפרון, מאחר שתכנות סימבוליות לא היו זמינות לצורכי חינוך באותה העת. לפיכך, תהליך החשיבה למציאת הפתרון לבעיה היה בעיקרו תהליך מבני דדוקטיבי-אלגברי.

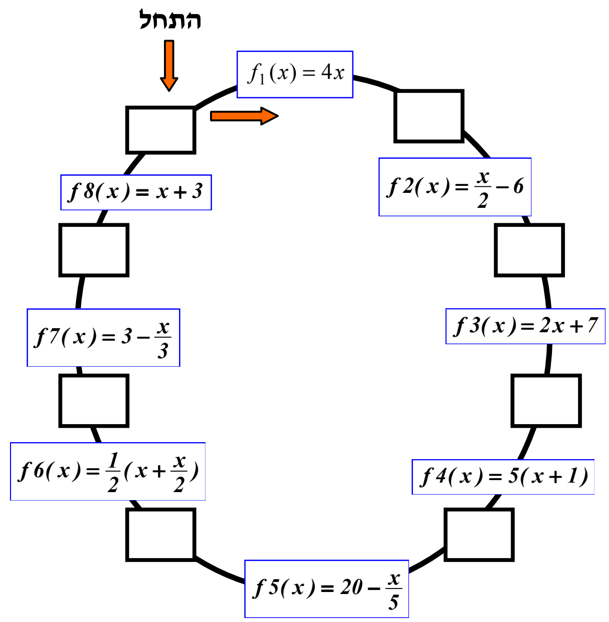
במאמר הנוכחי נחזור אל הבעיה המקורית. הפעם אנו מצוידים בתכנת *CAS* הנקראת *Derive*. נדגים דרכי פתרון נוספות המדגישות את המשמעויות וההקשרים המתמטיים, הנבנים בעקבות השימוש במנגנון האלגברי והייצוג הגרפי של התָכנה. נתאר גם כיצד הרחבנו את הבעיה ואת פתרונה ל**מעגלי קסם מסדר *K***.

בניית מעגל סגור בעזרת מנגנון חישוב אלגברי

מעגל סגור הוא מעגל המורכב מפונקציות ליניאריות באופן שבכל מקום שננתק את המעגל אם נציב מספר מסוים, בתום סיבוב אחד שלם בכיוון השעון יתקבל (תמיד) אותו המספר שהוצב בהתחלת הסיבוב.

דוגמה למעגל כזה מופיעה באיור 1. זהו המעגל המטופל במאמר משנת 1982, שבו נותחה הבעיה ופותח אלגוריתם לבניית מעגל סגור. האלגוריתם מסתמך על כך שלמעגל בן n פונקציות ליניאריות קיימות $n-1$ דרגות חופש. כלומר: כדי לבנות את המעגל אפשר לבחור $n-1$ פונקציות ליניאריות כלשהן (אך לא פונקציות קבועות, מדוע?), והפונקציה הליניארית האחרונה, הסוגרת את המעגל, חייבת להיות הפונקציה הליניארית ההפוכה לפונקציית ההרכבה של כל הפונקציות הליניאריות הראשונות. כדי למצוא את הביטוי האלגברי המתאים לפונקציית ההרכבה של כל $n-1$ הפונקציות הראשונות, נוח למשל להציב 0 ו- 1 במקום מסוים במעגל ולמצוא את הערך המתקבל, אחרי שעוברים את כל $n-1$ הפונקציות בשרשרת המעגל. האלגוריתם מסתמך על העובדה שדרך שתי נקודות עובר ישר אחד ויחיד וכי ההרכבה של פונקציות ליניאריות היא ליניארית. לכן על-פי שתי התוצאות אפשר למצוא פונקציה ליניארית. כעת נותר להשלים את המעגל במציאת הפונקציה ההפוכה לפונקציית ההרכבה הזאת.

ברור שבניית האלגוריתם דורשת ניתוח מוקדם של הבעיה. במהלך הניתוח מתבצע הקישור לעובדה שהפונקציות הליניאריות $a \neq 0$; $y=ax+b$ מהוות חבורה ביחס לפעולת ההרכבה של פונקציות בעלות איבר יחידה שהוא פונקציית הזהות: $y=x$. תכונת 'השבירה' של המעגל, שפירושה כי בכל מקום בו ינותק המעגל אם נתחיל להציב מספר מסוים - מספר זה יהיה גם הפלט בתום סיבוב שלם, נובעת מקיום חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) עבור הרכבת פונקציות.



איור 1 : מעגל סגור של פונקציות ליניאריות

כאשר נעזרים בתכנה כמו *Derive*, האלגוריתם לבניית המעגל יכול לצמוח מתוך התבוננות זהירה בתוצרים המתקבלים במעגל סגור ובחינתם, ולא בהכרח כתוצאה של ניתוח אנליטי דדוקטיבי. למשל, נתבונן במעגל באיור 1. נגדיר את הפונקציות בשפה אלגברית סימבולית ונחשב את ההרכבות החלקיות עבור משתנה *a*. נתבונן באיור 2: בשורות #2 ו- #3 מוגדרות הפונקציות הליניאריות של המעגל הסגור. בשורות #4 עד #11 מוצגת בשפה אלגברית סימבולית סדרה של הרכבות חלקיות של הפונקציות הליניאריות, כאשר ההרכבה היא בכיוון השעון. העובדה, כי כל התוצאות המתקבלות הן פונקציות ליניאריות, עוזרת להבחין בתכונת הסגירות של הרכבה של פונקציות ליניאריות. כמו כן משורה #11 אפשר להסיק, שתוצאת ההרכבה של כל שמונה הפונקציות במעגל היא פונקציית הזהות. התבוננות נוספת חושפת תכונה חשובה אחרת: ההרכבה של כל שבע הפונקציות הראשונות בכיוון השעון (שורה #10) היא הפונקציה הליניארית ההפוכה לפונקציה השמינית, האחרונה, הסוגרת את המעגל.

```
#1:   a closed circle
#2:   [f1(x) := 4·x, f2(x) := x/2 - 6, f3(x) := 2·x + 7, f4(x) := 5·(x + 1)]
#3:   [f5(x) := 20 - x/5, f6(x) := 3/4·x, f7(x) := 3 - x/3, f8(x) := x + 3]
#4:   f1(a) = 4·a
#5:   f2(f1(a)) = 2·a - 6
#6:   f3(f2(f1(a))) = 4·a - 5
#7:   f4(f3(f2(f1(a)))) = 20·(a - 1)
#8:   f5(f4(f3(f2(f1(a))))) = 4·(6 - a)
#9:   f6(f5(f4(f3(f2(f1(a)))))) = 3·(6 - a)
#10:  f7(f6(f5(f4(f3(f2(f1(a))))))) = a - 3
#11:  f8(f7(f6(f5(f4(f3(f2(f1(a)))))))) = a
```

איור 2 : סדרה של הרכבות חלקיות של פונקציות המעגל, בכיוון השעון.

בעזרת התכנה נוכל לבדוק בקלות רבה את תכונת 'השבירה' של המעגל. התנסות זו אינה מהווה הוכחה, אלא מעוררת באופן טבעי את הצורך לחפש הסבר והוכחה מתמטית כללית לתכונה זו. כאמור לעיל, תכונה זו מבוססת על תכונת הקיבוץ של פעולת ההרכבה של פונקציות ליניאריות.

כפי שנוכחנו, ההרכבה של כל הפונקציות הליניאריות בכיוון השעון נותנת את איבר היחידה (של חבורת הפונקציות הזאת). לכן אם נחלק כל שרשרת כזו לשתי פונקציות, שהרכבתן היא פונקציית הזהות, נקבל שתי פונקציות ליניאריות הפוכות זו לזו. סדרת ההתנסויות שתיארנו יכולה להוביל למציאת האלגוריתם לבניית המעגל הסגור, שמופיע לעיל. ואולם, אם מציגים את הבעיה למשתמש בתכנת *CAS*, שלא קרא את המאמר הקודם, סביר שיציע אלגוריתם אחר לבניית מעגל סגור. למשל, בבניית מעגל סגור בן עשר פונקציות ליניאריות נבחר תשע פונקציות ליניאריות כרצוננו, נסמן פונקציה אחת נוספת, למשל את הפונקציה החמישית, בעזרת משתנים $F_5(x)=ax+b$ וניעזר בתכנה לחישוב תוצאת ההרכבה של עשר הפונקציות. מאחר שתוצאה זו צריכה

להיות פונקציית הזהות, נוכל לחשב את ערכי a ו- b הדרושים (ר' איור 3 שורה 6#). גישה זו מדגימה את העצמה וגם את הסכנה של פתרון בעיה בשימוש במנגנון הסימבולי. מצד אחד זהו אלגוריתם טכני פשוט ויעיל, אך מצד שני השימוש בו אינו חושף את המבנים והמושגים המתמטיים שהתקשרו לדרך הפתרון הקודמת. לפיכך חשוב מאוד שבפעילות מסוג זה יידרש הלומד להתייחס לתוצרים המתקבלים בתהליך פתרון הבעיה ולהסביר אותם באופן מתמטי.

$$\#1:\quad \left[f1(x) := -2\cdot x+3,\ f2(x) := -\frac{3}{7}\cdot x-1,\ f3(x) := \frac{2}{3}\cdot x-1\right]$$

$$\#2:\quad \left[f4(x) := -4\cdot x+\frac{8}{3},\ f5(x) := a\cdot x+b,\ f6(x) := 15\cdot x-12\right]$$

$$\#3:\quad \left[f7(x) := -\frac{5}{18}\cdot x,\ f8(x) := -9\cdot x+7,\ f9(x) := x-1,\ f10(x) := -\frac{x}{24}\right]$$

$$\#4:\quad f(x) := f10(f9(f8(f7(f6(f5(f4(f3(f2(f1(x))))))))))$$

$$\#5:\quad f(x) = \frac{1200\cdot a\cdot x-6700\cdot a-21\cdot(25\cdot b-16)}{336}$$

$$\#6:\quad \left[\frac{1200\cdot a}{336}=1,\ \frac{-6700\cdot a-21\cdot(25\cdot b-16)}{336}=0\right]$$

$$\#7:\quad \mathrm{SOLVE}\left(\left[\frac{1200\cdot a}{336}=1,\ \frac{-6700\cdot a-21\cdot(25\cdot b-16)}{336}=0\right],\ [a,\ b]\right)$$

$$\#8:\quad \left[a=\frac{7}{25}\wedge b=-\frac{44}{15}\right]$$

$$\#9:\quad f5(x) := \frac{7}{25}\cdot x-\frac{44}{15}$$

$$\#10:\quad f10(f9(f8(f7(f6(f5(f4(f3(f2(f1(x)))))))))) = x$$

איור 3: בניית מעגל סגור הבנוי מ- 10 פונקציות ליניאריות בעזרת התכנה Derive

בניית מעגל קסם בעזרת מנגנונים שונים

המאמר הקודם מרחיב את הבעיה המתמטית ועוסק במציאת התנאים המספיקים וההכרחיים לבניית **מעגל קסם**. מעגל קסם הוא מעגל פונקציות בעל התכונה הבאה: בכל מקום שננתק את המעגל ונתחיל להציב מספר מסוים, תמיד בתום סיבוב אחד שלם בכיוון השעון (וגם נגד כיוון השעון), יתקבל אותו המספר שהוצב בהתחלה. כידוע חבורת הפונקציות הליניאריות עם פעולת ההרכבה אינה חילופית (קומוטטיבית), ולכן יש עניין בפתרון הבעיה החדשה.

נתחיל באסטרטגיית פתרון העושה שימוש במנגנון הסימבולי בלבד. נגדיר עשר פונקציות ליניאריות:

$F_1(x)=a_1x+b_1 \qquad F_2(x)+a_2x+b_2,...$

$F_{10}(x)=a_{10}x+b_{10}$

נבצע את פעולת ההרכבה על כל הפונקציות לפי הסדר:

$$F_{10}(F_9(F_8...F_3(F_2(F_1(x)))...))=$$
$$=F_1(F_2(F_3...F_8(F_9(F_{10}(x)))...))=x$$

נפשט את הביטוי האלגברי בעזרת המנגנון הסימבולי, ונגדיר מערכת של שלושה אילוצים:

1. $a_{10}a_9...a_2a_1=1$
2. $a_{10}a_9...a_2b_1+a_{10}a_9...a_3b_2+a_{10}a_9b_8+a_{10}b_9+b_{10}=0$
3. $a_1a_2...a_9b_{10}+a_1a_2...a_8b_9+a_1a_2b_3+a_1b_2+b_1=0$

נוכל לקבוע שלושה נעלמים (למשל, $a_{10}=a\,,b_{10}=b\,,b_9=n$), ולפתור את מערכת המשוואות בעזרת המנגנון הסימבולי (ר' דוגמה באיור 4).

$$\#1:\quad \left[f1(x) := -2\cdot x+3,\ f2(x) := -\frac{3}{7}\cdot x-1,\ f3(x) := \frac{2}{3}\cdot x-1\right]$$

$$\#2:\quad \left[f4(x) := -4\cdot x+\frac{8}{3},\ f5(x) := \frac{4}{5}-\frac{x}{10},\ f6(x) := 15\cdot x-12\right]$$

$$\#3:\quad \left[f7(x) := -\frac{5}{18}\cdot x,\ f8(x) := -9\cdot x+7,\ f9(x) := -\frac{35}{132}\cdot x+n,\ f10(x) := a\cdot x+b\right]$$

$$\#4:\quad g(x) := f10(f9(f8(f7(f6(f5(f4(f3(f2(f1(x))))))))))$$

$$\#5:\quad h(x) := f1(f2(f3(f4(f5(f6(f7(f8(f9(f10(x))))))))))$$

$$\#6:\quad g(x) = \frac{11\cdot(a\cdot(6\cdot n+65)+6\cdot b)-150\cdot a\cdot x}{66}$$

$$\#7:\quad h(x) = -\frac{175\cdot a\cdot x+175\cdot b-33\cdot(20\cdot n-13)}{77}$$

$$\#8:\quad -\frac{150}{66}\cdot a=1$$

$$\#9:\quad \mathrm{SOLVE}\left(-\frac{150}{66}\cdot a=1,\ a\right)$$

$$\#10:\quad a=-\frac{11}{25}$$

$$\#11:\quad a := -\frac{11}{25}$$

$$\#12:\quad \mathrm{SOLVE}\left(\left[\frac{11\cdot(a\cdot(6\cdot n+65)+6\cdot b)}{66}=0,\ -\frac{175\cdot b-33\cdot(20\cdot n-13)}{77}=0\right],\ [b,\ n]\right)$$

$$\#13:\quad \left[b=\frac{143}{25}\wedge n=\frac{13}{6}\right]$$

$$\#14:\quad \left[b := \frac{143}{25},\ n := \frac{13}{6}\right]$$

$$\#15:\quad g(x) = x$$

$$\#16:\quad h(x) = x$$

איור 4: בניית מעגל קסם

כך נקבל עשר פונקציות ליניאריות היוצרות מעגל קסם.

בדרך זו אכן ביצענו כקבלנים את המטלה ובנינו מעגל קסם בן עשר פונקציות ליניאריות, אולם עסקנו בטכניקה מתמטית בלבד ולא פתחנו 'חלונות' לרעיונות חדשים. עלינו לזכור כי מערכת אלגברה ממוחשבת *CAS*

היא יותר מאשר מנגנון סימבולי: יש לה מנגנון גרפי ומנגנון תכנותי: נחזור, אם כך, אל ניתוח הבעיה במאמר הקודם ונטפל במעגל הקסם בעזרת מכלול הכלים של *Derive*.

המאמר הקודם מציג אלגוריתם לבניית מעגל המסתמך על כך שכדי לבנות מעגל בן n פונקציות ליניאריות קיימות $n-2$ דרגות חופש. כלומר: כדי לבנות את המעגל יש לבחור $n-2$ פונקציות ליניאריות ושתי הפונקציות הליניאריות האחרונות, הסוגרות את המעגל צריכות לקיים מספר אילוצים. על-פי האלגוריתם מוצע למצוא את ההרכבה של כל $n-2$ הפונקציות הליניאריות; פעם בכיוון השעון $G(x)$ ופעם נגד כיוון השעון $H(x)$, והפונקציה הליניארית לפני הפונקציה האחרונה במעגל (הפונקציה ה- $n-1$) תהייה חייבת לקיים את התנאי של חוק החילוף (הקומוטטיבי) $F_{n-1}(G(x)) = H(F_{n-1}(x))$. הפונקציה הליניארית האחרונה במעגל הקסם (הפונקציה ה- n) צריכה להיות הפונקציה הליניארית ההפוכה לפונקציה $F_{n-1}(G(x))$.
נבנה שוב את המעגל המופיע באיור 5 בעזרת האלגוריתם. נסמן ב- $G(x)$ את ההרכבה של שמונה הפונקציות הראשונות בכיוון השעון, וב- $H(x)$ את ההרכבה של שמונה הפונקציות הראשונות נגד כיוון השעון.

$$G(x)=F_8(F_7(F_6(F_5(F_4(F_3(F_2(F_1(x))))))))$$

```
#1:  [f1(x) := - 2·x + 3, f2(x) := - 3/7·x - 1, f3(x) := 2/3·x - 1]
#2:  [f4(x) := - 4·x + 8/3, f5(x) := 4/5 - x/10, f6(x) := 15·x - 12]
#3:  [f7(x) := - 5/18·x, f8(x) := - 9·x + 7, f9(x) := m·x + n]
#4:  h(x) := f1(f2(f3(f4(f5(f6(f7(f8(x))))))))
#5:  g(x) := f8(f7(f6(f5(f4(f3(f2(f1(x))))))))
#6:  h(f9(x)) = f9(g(x))
#7:  3·(20·m·x + 20·n - 13)/7 = (60·m·x - 286·m + 7·n)/7
#8:  n = 13·(3 - 22·m)/53
#9:  f9(x) := m·x + 13·(3 - 22·m)/53
```

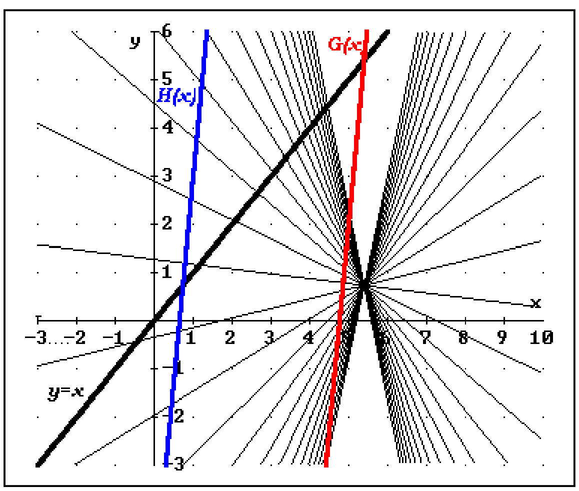
איור 5: מציאת 'שרשרת קומוטטיבית' של פונקציות ליניאריות

נוסיף את שתי הפונקציות הליניאריות האחרונות: נגדיר את הפונקציה הליניארית התשיעית באופן כללי: $F_9(x)=mx+n \;;\; m\neq 0$ ונדרוש שתתקיים התכונה הקומוטטיבית: $F_9(G(x)=H(F_9(x))$. נפשט את תבנית הפסוק בעזרת Simplify (ר' איור 6 שורה #8), ונפתור אותה עבור n (soLve for n). מקבלים:

$$n=\frac{13(3-22m)}{53}$$

מהתבוננות בתוצאות המתקבלות מתברר, שהפונקציה התשיעית במעגל יכולה להיות כל פונקציה ליניארית השייכת למשפחת הפונקציות $F_9(x)$ שאיננה פונקציה ליניארית קבועה. ולכן מתקבלים אינסוף פתרונות לבעיה. במעגל המופיע באיור 5 נבחרה פונקציה מהמשפחה וכך נוצרה 'שרשרת קומוטטיבית' של תשע פונקציות. $F_{10}(x)$ היא הפונקציה ההפוכה להרכבת תשע הפונקציות והיא סוגרת את מעגל הקסם.

נשאלת השאלה: מהי ההצגה הגיאומטרית של משפחת הפונקציות $F_9(x)$ הנ"ל?
הופתענו לגלות כי למשפחת הפונקציות הליניאריות $F_9(x)$ יש ייצוג גרפי מעניין (ר' איור 6).



איור 6: הצגה גרפית של משפחת הפונקציות הליניאריות $F_9(x)$

משפחה זו יוצרת אלומת ישרים דרך נקודה אחת ששיעוריה הם: $A\left(\frac{286}{53},\frac{39}{53}\right)$.

את שיעורי הנקודה A אפשר לקבל בקלות רבה מפתרון מערכת המשוואות המורכבת מכל שתי פונקציות ליניאריות השייכות למשפחה $F_9(x)$.

ההצגה הגרפית של המשפחה הנ"ל (ר' איור 6) עוררה את סקרנותנו ובעקבותיה העלינו שאלות נוספות לגבי המצב ההדדי האפשרי במערכת הצירים בין הנקודה A והפונקציות $G(x)$ ו- $H(x)$ (המתארות למעשה שני קווים מקבילים):

- האם קיים קשר בין שיעורי הנקודה A לפונקציות $G(x)$ ו- $H(x)$?
- באילו תנאים תימצא הנקודה A בין הישרים המקבילים $G(x)$ ו- $H(x)$? ובאילו תנאים מחוצה להם?
- האם ייתכן שהנקודה A תימצא על אחד הישרים המקבילים? אם כן, באילו תנאים?

התשובה לשאלה הראשונה מתקבלת מפתרון המשוואות $G(x)=x$, $H(x)=x$ מסתבר ששיעור ה- x של הנקודה A הוא שיעור ה- x של נקודת השבת של הפונקציה $G(x)$ ושיעור ה- y של נקודה A הוא שיעור ה- y של נקודת השבת של הפונקציה $H(x)$.

אנו משאירים לקורא הסקרן את הטיפול בשאלות האחרות.

בניית מעגל קסם מסדר K בעזרת CAS

הקלות שבה אנו יכולים עתה לבנות מעגלים והציפייה להפתעות מתמטיות עודדו אותנו להמשיך לפתח את הבעיה למעגלי קסם מסדר K.

האם אפשר לבנות מעגל קסם כזה, שבכל מקום שננתק אותו ונתחיל להציב בו מספר כלשהו, יתקבל אותו המספר שהוצב בהתחלה? רק בתום K סיבובים שלמים בכיוון השעון (וגם נגד כיוון השעון), נתחיל לטפל במקרים פרטיים.

מעגל קסם מסדר 2

כידוע ההרכבה של פונקציות ליניאריות היא ליניארית.

נסמן את הפונקציה המתקבלת מהרכבת כל הפונקציות הליניאריות במעגל ב- $I_2(x)=mx+b$, $m\neq 0$ ונדרוש שיתקיימו התנאים הבאים:

$$I_2(x)\circ I_2(x)=I(x)$$

$$I_2(x)\neq I(x)$$

כלומר:

$$m(mx+b)+b=x$$

$$m^2x+b(m+1)=x$$

השוויון האחרון מתקיים כאשר $b(m+1)=0$ וגם $m^2=1$.

התבוננות בפתרון של מערכת המשוואות מגלה כי מדובר בשני מקרים:

1. עבור $m=1$ חייב להיות $b=0$. מקרה זה, בו $I_2(x)=I(x)$ איננו מעניין.
2. עבור $m=(-1)$, b יכול להיות כל מספר. במקרה זה מעגל קסם מסדר 2 "יסגר" **בפעם הראשונה רק אחרי שני סיבובים שלמים**.

אם כך, נוכל לבנות בקלות מעגל קסם מסדר 2 המורכב מ- n פונקציות ליניאריות.

נבחר $n-1$ פונקציות ליניאריות כלשהן (אך לא פונקציות קבועות). הרכבתן בכיוון אחד תיתן פונקציה ליניארית שנסמנה $G(x)=ax+p$ והרכבתן בכיוון ההפוך תיתן פונקציה ליניארית שנסמנה $H(x)=ax+q$.

אם נסמן את הפונקציה הליניארית האחרונה ב- $F_n(x)=-\frac{1}{a}x+b$ ונבצע את ההרכבות נקבל:

$$F_n(G(x))=-x-\frac{p}{a}+b\,,\ H(F_n(x))=-x+ab+q$$

מאחר שבשתי הפונקציות המקדם של x הוא (-1), כל אחת מהן מקיימת את התנאי עבור $I_2(x)$.

הערה: תכונת 'השבירה' של המעגל מתקיימת כמו במקרים הקודמים על סמך חוק הקיבוץ בהרכבה של פונקציות ליניאריות.

מעגל קסם מסדר 3

נסמן את הפונקציה המתקבלת מהרכבת כל הפונקציות הליניאריות במעגל ב- $I_3(x)=mx=b$, $m\neq 0$ ונדרוש שיתקיימו התנאים הבאים:

1. $I_3(x)\circ I_3(x)\circ I_3(x)=I(x)$
2. $I_3(x)\neq I(x)$
3. $I_3(x)\circ I_3(x)\neq I(x)$

נפשט את הביטוי:

$$I_3(I_3(I_3((x))))=x$$

$$m^3x+b(m^2+m+1)=1$$

השוויון האחרון מתקיים כאשר:

$$m^3=1\,,\ b(m^2+m+1)=0$$

התבוננות בפתרון של מערכת המשוואות מגלה כי מדובר בשלושה מקרים, השייכים לשורשי היחידה מסדר 3.

א. עבור $m=1$ חייב להיות $b=0$. מקרה זה בו $I_3(x)=I(x)$ איננו מעניין.

ב. אם $m=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, b יכול להיות כל מספר.

ג. אם $m=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, b יכול להיות כל מספר.

הביטוי m^2+m+1 מהווה סכום של סדרה הנדסית שסכומה $\frac{m^3-1}{m-1}$. כאשר m הוא אחד מהשורשים המרוכבים מסדר 3, חזקתו השלישית m^3 שווה ל- 1 ולכן הסכום $\frac{m^3-1}{m-1}$ שווה לאפס. לפיכך הביטוי $b\left(m^2+m+1\right)$ שווה לאפס לכל b.

בשני המקרים ב ו- ג, מעגל קסם מסדר 3 "ייסגר" בפעם הראשונה רק אחרי שלושה סיבובים שלמים.

כלומר ההרכבה של כל הפונקציות הליניאריות במעגל צריכה להיות פונקציה ליניארית שבה המקדם של x חייב להיות שורש יחידה מסדר 3 מרוכב, השונה מ- 1 והאיבר החופשי b יכול להיות כל מספר.

אם כך, נוכל לבנות בקלות מעגל קסם מסדר 3 בעל n פונקציות. נבחר $n-1$ פונקציות ליניאריות כלשהן (אך לא פונקציות קבועות). הרכבתן בכיוון אחד תיתן פונקציה ליניארית שנסמנה $G(x)=ax+p$ והרכבתן בכיוון ההפוך תיתן פונקציה ליניארית שנסמנה $H(x)=ax+q$. את הפונקציה הליניארית האחרונה נבחר כך שתוצאת ההרכבה של n הפונקציות תקיים את התנאי עבור $I_3(x)$. המקדם של x הוא שורש יחידה מסדר 3:

$$m=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$F_n(x)=\frac{1}{a}(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)x+b$$

ואמנם אחרי ביצוע ההרכבה נקבל:

$$F_n(G(x))=-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)x+\frac{p}{a}(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+b$$

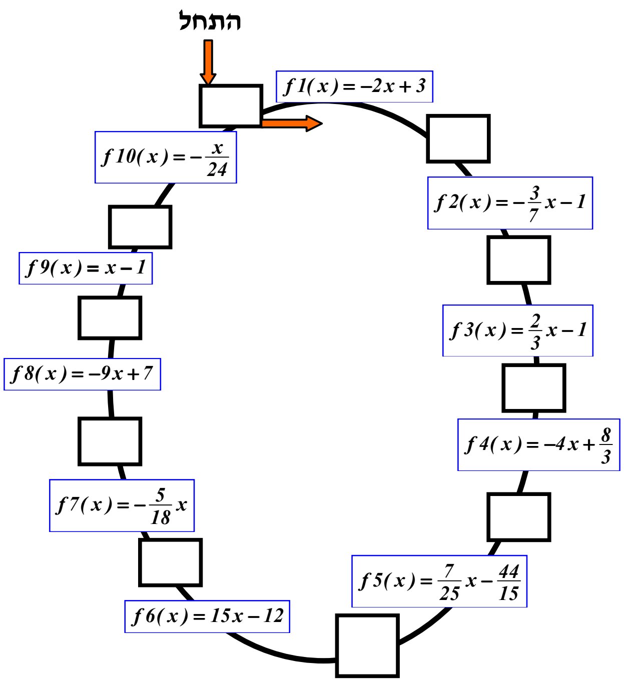
$$H(F_n(x))=(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)x+ab+q$$

ברור שגם אם נשתמש בשורש המרוכב השני מסדר 3 כדי ליצור את המקדם של x בפונקציה:

$$F_n(x)=\frac{1}{a}(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)x+b$$

נקבל מעגל קסם מסדר 3.

כאמור לעיל, תכונת 'השבירה' של המעגל מתקיימת כמו במקרים הקודמים על סמך חוק הקיבוץ בהרכבה של פונקציות ליניאריות. עתה, נבנה מעגל קסם מסדר 3 בן עשר פונקציות וניתן את דעתנו גם למשמעויות הגרפיות של תהליך בנייה זה. נבחר את תשע הפונקציות הליניאריות הראשונות המופיעות במעגל הקסם באיור 7, ואת הפונקציה הליניארית העשירית נחבר באופן שמכפלת כל המקדמים של x תשווה לאחד משורשי היחידה המרוכבים מסדר 3, ונבחר $b=0$.



איור 7: מעגל קסם הבנוי מ- 10 פונקציות ליניאריות

הפונקציה העשירית תהייה:

$$F_{10}(x)=\frac{1}{a}(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)x$$

אמנם מתקבלות שתי פונקציות ליניאריות שונות עבור ההרכבה של כל עשר הפונקציות הליניאריות במעגל, פעם בכיוון השעון ופעם נגד כיוון השעון:

$$F_{10}(G(x))=(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)x+\frac{7}{6}(1-\sqrt{3}i)$$

$$H(F_{10}(x))=(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)x+57$$

אולם, מאחר שבשתי הפונקציות המקדם של x הוא שורש יחידה מרוכב מסדר 3, כל אחת מהן מקיימת את התנאי עבור $I_3(x)$.

'הפריצה' אל תחום המספרים המרוכבים המריצה אותנו, באופן טבעי, לחפש אחר משמעות אלגברית וגיאומטרית של פונקציה ליניארית אשר 'שיפועה' הוא מספר מרוכב שהוא גם שורש יחידה, ולקשור ביניהם.

מבחינה אלגברית מוגדרת כאן פונקציה מתחום המספרים המרוכבים. לכל מספר ממשי מתאים מספר על-פי התבנית של הפונקציה הליניארית עם מקדם של x שהוא מספר מרוכב. שאלנו את עצמנו: מה יהיה הייצוג הגרפי של הפונקציות האלה? מהי המשמעות הגרפית של התכונה, שרק אחרי שלושה סיבובים שלמים עם כיוון השעון וגם נגד כיוון השעון המעגל "ייסגר"? האם תבוא לידי ייצוג גרפי שונה בחירה שונה של האיבר החופשי b בפונקציה הליניארית? אם כן, כיצד? ואם לא, מדוע?

כדי לתאר באופן גרפי את הטווח של הפונקציה המרוכבת $I_3(x)$ נעזרנו בפונקציות $RE(z)$ ו- $IM(z)$ של *Derive* המגדירות את הרכיב הממשי והרכיב המדומה של מספר מרוכב. הצבנו בפונקציה $I_3(x)$:

$$I_3(x)=(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)x+\frac{7}{6}(1-\sqrt{3}i)+b$$

ערכים שונים של x בתחום בין 10 ל- (10 -) בדילוגים של 0.1 וערכים שונים עבור b בתחום בין 5 ל- (-5), תוך שימוש כפול בפונקציה *vector*, המוגדרת ב *Derive*.

הפקודה נרשמה כך:

$$vector(vector([RE(I_3(x)),IM(I_3(x))],\ x,-10,10,0.1)\,b,-5,5,1)$$

הגרפים שהתקבלו משרטוט אוסף כל הנקודות שהתקבלו מתוארים באיור 8. (באיור 8, הגרפים בחלונות מתארים בהתאמה את השורות #2, #4 בחלון האלגברי). התיאור הגרפי במישור גאוס של טווח פונקציה $I_3(x)$ הוא קו ישר היוצר זווית של $\frac{2}{3}\pi$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x. עבור ערכים שונים של b מתקבלים ישרים מקבילים בעלי אותה זווית נטייה ביחס לקרן החיובית של ציר ה-x, ועבור הרכבה של הפונקציה בעצמה $I_3(I_3(I_3(x)))$ מתקבל ישר המתלכד עם ציר ה-x עצמו.

שוב הופתענו

היה ברור לנו שהביטוי הגרפי ל ערכים השונים של b יתבטא בכך שנקבל קבוצה של קווים מקבילים ואכן קיבלנו זאת בחלון 2. אולם הופתענו לגלות שלכל אחד מהקווים המקבילים שהתקבלו עבור סיבוב אחד מלא (בחלון $I_3(x)$), עבור כל אחד מהערכים השונים של b, הותאם ישר אחד בלבד עבור שני סיבובים מלאים (בחלון $I_3(I_3(x))$).

שאלנו את עצמנו: מדוע לא מבחינים בשינוי של הערכים השונים בהצגה במישור גאוס אחרי ההרכבה הראשונה? האם תופעה זו תתרחש גם במעגלי קסם מסדר גבוה יותר? אנו מציעים לקורא לחשוב על הבעיה. אנו נשוב לטפל בה בהמשך המאמר.

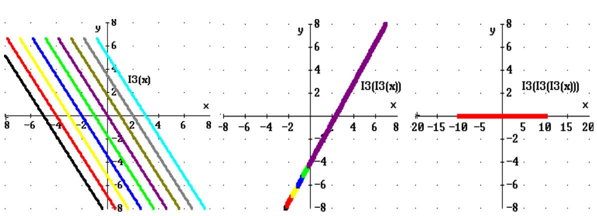
בניית מעגל קסם מסדר k

נכליל את התהליך לבניית מעגל קסם מסדר K (K טבעי), מהרכבה של n פונקציות ליניאריות (לא קבועות). כידוע, תוצאת ההרכבה של כל n הפונקציות הליניאריות במעגל, היא פונקציה ליניארית שהמקדם של x בה שווה למכפלת מקדמי x של כל הפונקציות במעגל. כדי לקבל מעגל קסם מסדר K, תנאי הכרחי ומספיק הוא שההרכבה של כל n הפונקציות $I_k(x)=F_n\circ F_{n-2}\circ\circ\circ\circ F_1(x)$ תקיים את התנאים הבאים:

$$I_K(x)=F_n\circ F_{n-1}\circ F_{n-2}\circ\circ\circ\circ F_1(x)=mx+b\ ,\ m\neq 0$$

כאשר המקדם m הוא אחד משורשי היחידה המרוכבים מסדר K, שאינו מהווה גם שורש יחידה מסדר קטן מ-K. כך יתקיים שרק אחרי K סיבובים שלמים המעגל 'ייסגר'. כלומר פונקציית היחידה מתקבלת אך ורק ב-K הרכבות של $I_k(x)$.

```
#1:   I3(x) := (- 1/2 + √3/2·î)·x + 7/6·(1 - √3·î) + b
#2:   VECTOR(VECTOR([RE(I3(x)), IM(I3(x))], x, -10, 10, 0.1), b, -5, 5, 1)
#3:   VECTOR(VECTOR([RE(I3(I3(x))), IM(I3(I3(x)))], x, -10, 10, 0.1), b, -5, 5, 1)
#4:   VECTOR(VECTOR([RE(I3(I3(I3(x)))), IM(I3(I3(I3(x))))], x, -10, 10, 0.1), b, -5, 5, 1)
```



איור 8: הצגה גיאומטרית של שלושת הסיבובים של $I_3(x)$

כדי להוכיח טענה זו נתבונן בהצגה הטריגונומטרית של שורשי היחידה מסדר K .

$$m=\cos\frac{2\pi\cdot p}{K}+i\sin\frac{2\pi\cdot p}{K}\qquad p=0,1,\dots,K-1,\ K\in N$$

אם נבחר את אחד השורשים המרוכבים :

$I_K(x)=(\cos\frac{2\pi\cdot p}{K}+i\sin\frac{2\pi\cdot p}{K})x+b$, ונבצע K הרכבות על עצמו נקבל שהמקדם של x הוכפל למעשה בעצמו K פעמים. לפי משפט דה מואבר מתקבל:

$$m^K=(\cos\frac{2\pi\cdot p}{K}+i\sin\frac{2\pi\cdot p}{K})^K=$$
$$=\cos 2\pi\cdot p+i\sin 2\pi\cdot p=1+0i=1$$
$$p=0,1,\dots,K-1,\ K\in N$$

אם הזווית $\frac{2\pi\cdot p}{K}$ תשווה לאחד משורשי היחידה המרוכבים מסדר קטן מ- K, כי אז המעגל ״ייסגר״ לפני תום K סיבובים שלמים. למשל עבור $K=6$, כאשר נבחר מספר פונקציות ליניאריות כך שמכפלת המקדמים של x תשווה ל - $(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$ המעגל ״ייסגר״ בפעם הראשונה כעבור שלושה סיבובים שלמים וגם אחרי שישה סיבובים שלמים. הסיבה לכך נעוצה בעובדה ש $(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$ הוא שורש יחידה מסדר 3 וגם שורש יחידה מסדר $6,9,\dots,3n$. ומכאן ניתן להכליל ולנסח את המשפט הבא:

בהינתן מעגל קסם מסדר K, אם K ראשוני , המעגל ״ייסגר״ רק בתום K סיבובים שלמים.

אם K אינו ראשוני המעגל ״ייסגר״ לפני תום K סיבובים שלמים בהתאם לפריקות של K.

לכן על-פי הפריקות של המספר K ניתן לקבוע מהו שורש היחידה המרוכב המתאים להיות המקדם של x בביטוי של $I_K(x)$. ברור שניתן לבחור ביותר מאפשרות אחת.

בטבלה שלהלן מרוכזות הזוויות (הארגומטרים) המופיעות בהצגה הטריגונומטרית של שורשי היחידה המתאימים למעגלי הקסם מסדר K , $2\le K\le 7$.

מעגל קסם מסדר K	שורשי היחידה
$K=2$	π
$K=3$	$\frac{4}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi$
$K=4$	$\frac{3}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi$
$K=5$	$\frac{2}{5}\pi,\frac{4}{5}\pi,\frac{6}{5}\pi,\frac{8}{5}\pi$
$K=6$	$\frac{1}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi$
$K=7$	$\frac{2}{7}\pi,\frac{4}{7}\pi,\frac{6}{7}\pi,\frac{8}{7}\pi\,\frac{10}{7}\pi,\frac{12}{7}\pi$

כעת נדגים בנייה של מעגל קסם מסדר 5 המורכב מעשר פונקציות ליניאריות. ברור שנבצע זאת בעזרת התוכנה *Derive*.

בחרנו תשע פונקציות ליניאריות כרצוננו. הפונקציה העשירית, הסוגרת את המעגל, השלימה את מכפלת המקדמים של x לאחד משורשי היחידה מסדר 5 .

להלן רשימת הפונקציות שנבחרו :

$$F_1(x)=-2x+5$$
$$F_2(x)=-\frac{3}{7}x-1$$
$$F_3(x)=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$$
$$F_4(x)=-21x$$
$$F_5(x)=-\frac{1}{24}x+5$$
$$F_6(x)=-(-\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{8}(\sqrt{5}-1)})\cdot x-2$$
$$F_7(x)=-4-3x$$
$$F_8(x)=-x-\frac{1}{30}$$
$$F_9(x)=-\frac{1}{3}x$$
$$F_{10}(x)=(\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{8}(\sqrt{5}+1)})\cdot x$$

כידוע, אנו מצפים שמעגל הקסם ״ייסגר״ רק אחרי 5 סיבובים. ואכן קיבלנו שרק אחרי 5 הרכבות הביטוי $I_5(I_5(I_5(I_5(I_5(x)))))=x$. ברור שגם אם נבצע שינוי בסדר ביצוע ההרכבות של עשר הפונקציות, למשל: $F_1(F_9(F_8(F_7(F_{10}(F_5(F_6(F_3(F_2(F_4(x))))))))))$ נקבל פונקציה ליניארית אחרת בעלת אותו מקדם של x , ולכן המעגל ״ייסגר״ גם במקרה זה בפעם הראשונה רק אחרי חמישה סיבובים שלמים.

כעת נחזור לבחון את התיאור הגרפי במישור גאוס של טווח הפונקציה $I_5(x)$ ונבדוק כיצד באה לידי ביטוי גרפי הבחירה של האיבר החופשי (ערכים שונים של b). נבחר את אחד משורשי היחידה מסדר 5 כמקדם של x בביטוי של $I_5(x)$.

$$I_5(x)=(\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)+i\sqrt{\tfrac{\sqrt{5}}{8}(\sqrt{5}+1)})\cdot x+b$$

נעזרנו שוב בפונקציות *RE(z)* ו- *IM(z)* המוגדרות ב- *Derive* כפונקציות המגדירות את הרכיב הממשי והרכיב המדומה של מספר מרוכב, כדי להריץ את הפונקציה $I_5(x)$ וחמש ההרכבות שלה על עצמה והצבנו ערכים שונים עבור x ועבור b (ר׳ איור 9).

גילינו שעבור ערכים שונים של b מתקבלת קבוצה של ישרים מקבילים בעלי זוויות נטייה זהות ביחס לקרן

החיובית של ציר ה - x , וכל הרכבה של $I_5(x)$ על עצמה תופעה זו התקיימה בשלוש ההרכבות הראשונות של הפונקציה $I_5(x)$ על עצמה: מזיזה את קבוצת הישרים המקבילים במישור גאוס.

$$I_5(x) \quad , \quad I_5(I_5(x)) \quad , \quad I_5(I_5(I_5(x)))$$

#1: $\left[f1(x) := -2\cdot x+5,\ f2(x) := -\frac{3}{7}\cdot x-1,\ f3(x) := \frac{4}{3}\cdot x+\frac{5}{3},\ f4(x) := 21\cdot x\right]$

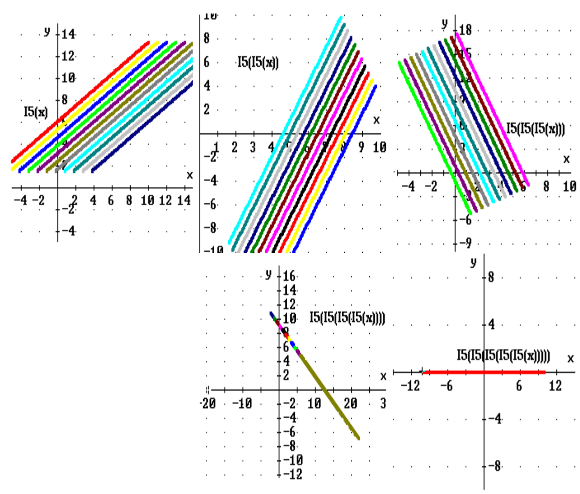
#2: $\left[f5(x) := -\frac{1}{24}\cdot x+5,\ f6(x) := \left(-\frac{1}{4}\cdot(\sqrt{5}+1)+\hat{\imath}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{8}\cdot(\sqrt{5}-1)\right)}\right)\cdot x-2\right]$

#3: $\left[f7(x) := 4-3\cdot x,\ f8(x) := -x-\frac{1}{30},\ f9(x) := -\frac{1}{3}\cdot x\right]$

#4: $f10(x) := \left(\frac{1}{4}\cdot(\sqrt{5}-1)+\hat{\imath}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{8}\cdot(\sqrt{5}+1)\right)}\right)\cdot x+b$

#5: $I5(x) := f10(f9(f8(f7(f6(f5(f4(f3(f2(f1(x))))))))))$

#6: $I5(I5(I5(I5(I5(x))))) = x$



איור 9: בניית מעגל קסם מסדר 5, והצגה גיאומטרית של חמש ההרכבות של $I_5(x)$

בהרכבה הרביעית $I_5(I_5(I_5(I_5(x))))$ התאחדו כל הישרים המקבילים לישר אחד, ובהרכבה החמישית והאחרונה התקבל ישר אחד המתלכד עם ציר ה- x. ניסינו לקשור תופעה זו למושג של הפונקציה ההפוכה, (כפי שבנינו את המעגל הסגור). לשם כך בדקנו בעזרת התוכנה *Derive* האם ההרכבה של $I_5(x)$ על עצמה ארבע פעמים היא הפונקציה ההפוכה ל - $I_5(x)$. ואכן הסתבר כי $I_5(I_5(I_5(I_5(x))))$ ו- $I_5(x)$ הן שתי פונקציות הפוכות זו לזו, שהרכבתן היא איבר היחידה. כמו כן עקבנו אחרי הופעתו של b בכל אחת מההרכבות של הפונקציה $I_5(x)$ בעצמה ומצאנו שהביטוי $I_5(I_5(I_5(I_5(x))))$ חופשי מהאיבר החופשי b.

דבר זה מסביר מדוע הישרים המקבילים שהתקבלו עבור ערכים שונים של b הועתקו בהרכבה הרביעית לישר אחד.

התשובה לשאלה: האם המעגל יישאר מעגל קסם גם כאשר 'שוברים' אותו או כאשר מבצעים את ההרכבה של הפונקציות בכיוון הנגדי (נגד כיוון השעון), היא טריביאלית.

סיכום

במאמר זה חזרנו אל מעגלי הקסם והפעם מצוידים בתכנת *CAS*. תיארנו דרכי פתרון שונות של הבעיה, הנבנות תוך כדי פיתוח הפתרון באמצעות *Derive*. התחלנו להשתמש ב *CAS* כמכשיר לחישובים בלבד כדי להקל על עצמנו בחישובים שביצענו על-פי המאמר הקודם. ככל שהמשכנו להתעמק בבעיה, הלך והשתנה התפקיד של הכלי הממוחשב. הביצוע הקל של המניפולציות הסיבמוליות בשילוב עם קבלת הייצוג הגרפי המתאים, העמיד בפנינו את האתגר כיצד להסביר ולהוכיח את התוצאות המתקבלות, ואת הקשרים המתמטיים הנלווים אליהם. כך הצלחנו להכליל את הבעיה ל **מעגלי קסם מסדר *K***. נוכחנו לדעת שהבעיה שמקורה בנושאים מתמטיים מתחילת האלגברה של חטיבת הביניים, מתרחבת ומעמיקה בנושאים מתמטיים מתקדמים באלגברה כמו חבורות ושדות.

את טיפולנו בבעיה פתחנו במעגל סגור, עברנו למעגל קסם והרחבנו למעגל קסם מסדר K. המאמר של זהבי וברוקהיימר (1982) מציין שכדי לבנות מעגל סגור דרושות $n-1$ דרגות חופש, וכדי לבנות מעגל קסם (מעגל סגור בשני הכיוונים) דרושות $n-2$ דרגות חופש. אנו שיערנו שאם נרחיב את הבעיה למעגל קסם מסדר גבוה יותר $K \geq 2$ נצטרך להציג דרישות נוספות, אולם להפתעתנו גילינו שההפך הוא הנכון: כדי לבנות מעגל מסדר $K \geq 2$, לא רק שיש $n-1$ דרגות חופש, אלא שגם סדר ההרכבה של הפונקציות בתוך המעגל אינו מהווה בעיה כלל. כלומר בכל סדר שנרכיב את הפונקציות, בשני הכיוונים, תמיד אחרי K סיבובים שלמים תתקבל פונקציית הזהות. הפתעות נוספות התבררו לנו כתוצאה מהמעבר בין הייצוגים השונים. הופתענו לגלות שאם שתי פונקציות ליניאריות $G(x)$ ו-

$H(x)$ הן בעלות אותו מקדם של x (שונה מאפס), אז קיימת משפחה של פונקציות ליניאריות $F(x)$, שהצגתה הגרפית היא אלומה של ישרים, כך שההרכבה מקיימת $F(G(x)) = H(F(x))$. כדאי לשים לב שאלומת ישרים מהווה תת-חבורה קומוטטיבית.

במאמר ניסינו להדגים את 'הקלות הבלתי מוכרת' של ביצוע המטלות בעזרת מנגנון החישוב האלגברי של *CAS*. מנגנון זה הופך את התכנה למכשיר נוח לביצוע עבודות חקר בעזרת בדיקה של דוגמאות רבות ומגוונות. אולם ביכולת הנוחה טמונה סכנה של ביצוע מהיר של המטלה מבלי לתת את הדעת למשמעויות ולמבנים המתמטיים המסתתרים בתוכה. אם ברצוננו להעשיר את הלומד הרי שהמפתח לפיתוח 'חלונות' וקישוריות אל מושגים ונושאים מתמטיים אחרים הוא בשילוב הייצוג האלגברי עם מכלול הייצוגים שמאפשרת תכנת *CAS* לחקירת בעיה.

רשימת ספרות

R. Noss, & C. Hoyles, [1996]. *Windows on Mathematical Meanings Learning Cultures and Computers*. Dordrecht, Kluwer Mathematics Education. Library

N. Zehavi, & M. bruckheimer, [1982]. Problem Solving: Linear Functions and Magic Circles, *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology* 13(1): 27-40

ומה אם ריבועי קסם ?