הנושא: כמה שומרים נחוצים לאבטחתו של מוזיאון?

הוכן ע"י: נצה מובשוביץ-הדר ואלה שמוקלר.

תקציר: מהו המספר המינימלי של שומרים שיספיק לשמירת כל המוצגים במוזיאון? במאמר מוצג פתרון מתמטי לבעיה זו עבור מוזיאון השוכן בבניין שצורתו מנסרה ישרה, שבסיסה הוא מצולע לאו דווקא קמור. כבעיית תכנון וארגון, מחפשים עבורה פתרון אופטימלי, שיאפשר להשיג אבטחה מקסימלית באמצעים מינימליים.

מילות מפתח: קומבינטוריקה, פתרון אופטימלי, אינדוקציה מתמטית, פתרון בעיה, פאון, מנסרה, מצולע, מצולע קמור, מצולע קעור, אלכסון, קדקוד, תילות (טריאנגולציה).

החומר פורסם במסגרת: על"ה 29, סתיו תשס"ג, 2002, עמודים 42-55.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 14 עמודים.

כמה שומרים נחוצים לאבטחתו של מוזיאון ?[1]

נצה מובשוביץ-הדר
הטכניון, חיפה

אלה שמוקלר
הטכניון, חיפה

הרקע והצגת הבעיה

המסורת האנושית לאסוף ולשמור יצירות אמנות ואומנות כדי להעבירן מדור לדור, היא בת אלפי שנים. כבר בתנ״ך אנו מוצאים כי המלך חזקיהו הראה לשליחי מלך בבל *״את כל בית נכותה את הכסף ואת הזהב ואת הבשמים״* (מלכים ב׳, כ׳, 13).

המילה ׳מוזיאון׳ מקורה ביוונית ופירושה מקום בו שוכנות המוזות, אלות האמנויות. המוסד הראשון שנקרא בשם ׳מוזיאון׳ הוקם באלכסנדריה של מצרים במאה השלישית לפסה״נ. מוסד זה לא היה מוזיאון במובן המקובל בימינו, אלא מרכז לימוד ומחקר. מוזיאונים במובן המקובל כיום, של אוסף יצירות למשמרת ולהנצחה לדורות, התחילו להיבנות מהאוספים האמנותיים של מלכים ונסיכים ושל הכנסייה בימי הביניים. אלה לא נועדו להצגה לציבור הרחב. רק בסוף המאה ה-17 ובמאה ה-18 נפתחו לציבור מוזיאונים אחדים, כגון המוזיאון הבריטי, הלובר, מוזיאון הוותיקן, מוזיאון המדע בספרד ועוד. מספר המבקרים במוזיאונים היה באותם ימים מצומצם מאוד.

עם התפתחות התרבות וההשכלה במאה ה-19, חלה עלייה עצומה הן במספר המוזיאונים והן במספרי המבקרים בהם. התקדמות המדע והטכנולוגיה במאה ה-20, הביאה להתפתחותם של מוזיאונים למדע וטכנולוגיה ולתחומים נוספים שאינם דווקא בתחום האמנות. כמו כן חל שינוי בתפיסת המטרות של התצוגה במוזיאונים. המוזיאונים כיום הם מוסדות להנחלת ערכי התרבות האנושית לציבור הרחב ובפרט לנוער, ואינם מסתפקים עוד בשימורם ובהנצחתם של נכסי התרבות[2].

פתיחת המוזיאונים לקהל הרחב והגישה הנוחה למוצגים השונים, שהם בחלקם הגדול לא רק בעלי ערך תרבותי עצום, אלא גם בעלי ערך כספי גבוה מאד, מהווים פיתוי לגנבים. בהיסטוריה של מוזיאונים רבים מתועדות עבירות רבות כאלו.

המגמה להתמיד בפתיחת המוזיאונים לציבור הרחב הפכה את ההגנה על שלמות המוצגים במוזיאונים ואבטחתם בפני גניבה לבעיה מרכזית בניהולם השוטף. אילו הבעיה היתה גניבה בלבד ואילו אפשר היה לסמוך על שומר שיבדוק כל יוצא ובא למוזיאון, ניתן היה אולי להסתפק בהצבת שומר בכניסה אל המוזיאון וביציאה ממנו ובכך לקבל פתרון לבעיית השמירה שעלותו מינימלית. המציאות מלמדת שהשיטה הזאת אינה מוכיחה את עצמה מכמה וכמה סיבות. קודם כל מפני שיש נכסים זעירים (יהלום, למשל) שקל מאד להסתירם. בנוסף לכך קיימת בעיה של יחסי ציבור ודימוי שלילי שנוצר למוזיאון, אם המבקר בו הוא תמיד

---

1 מאמר זה הוכן לקראת הפתיחה של הסדנאות למרכזי המקצוע מתמטיקה בשנת תש״ס מטעם **״קשר חם״** - המרכז הארצי ל**ק**ידום, **ש**יפור **ור**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תמטי בישראל. תודתנו לגב׳ זיוה שחם על הערותיה המאירות.

2 נצה מובשוביץ-הדר, אחת השותפות לכתיבת מאמר זה, היתה מנהלת המוזיאון הלאומי למדע, תכנון וטכנולוגיה בחיפה. עם כניסתה לתפקיד בינואר 1998, היא הגדירה את מטרות המוזיאון כ**שימור** ערכי התרבות המדעית ונכסיה בישראל ובעולם, **שידור** ערכי תרבות זו לציבור הרחב באמצעות מוצגי-קבע ותערוכות מתחלפות ו**שיפור** ההבנה של הציבור בכלל והנוער בפרט בעקרונות המדעיים שעליהם מבוססים הישגי המדע בארץ ובעולם באמצעות פעילויות מגוונות בעלות אופי חינוכי במוזיאון ומחוצה לו. שלוש המילים המובלטות: **שימור, שידור שיפור,** נבדלות זו מזו באות אחת, ושלוש האותיות המבדילות ביניהן יוצרות את המילה ׳מדף׳. המוזיאון הוא ה׳מדף׳ שעליו ׳מונחים׳ לרשות הציבור ולשירותו, ערכי התרבות ונכסיה.

על תקן של חשוד בגניבה. קיימת גם בעיה משפטית בחדירה לתחום הפרט על-ידי חיפוש על גופו של המבקר ובחפציו. ידועים מקרים בהם מבקרים התנגדו בחריפות לבקשה לפתוח תיק לצורך בדיקתו.

לאור שיקולים אלה, נראה כי הכרחי למקם בתוך המוזיאון אנשי שמירה ולהציב מכשירי צפייה ואזעקה במקומות הנכונים כך שיחד ׳יכסו׳ את כל המוצגים. כמו בכל בעיית תכנון וארגון, מחפשים פתרון אופטימלי, שיאפשר להשיג אבטחה מקסימלית באמצעים מינימליים. שימוש יעיל ככל האפשר באמצעי השמירה בעלות מינימלית הם תמצית הבעיה. מטבע הדברים מרתקת בעיה מעין זו מתמטיקאים, המחפשים מודלים כלליים לפתרונה.

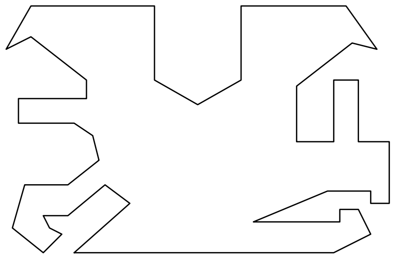
הבעיה הבסיסית של שמירה במוזיאון

לצורך הטיפול המתמטי בבעיה נניח כי המוזיאון שוכן בבניין שצורתו היא מנסרה ישרה אשר בסיסה הוא מצולע, לאו דווקא קמור, בעל n צלעות $(n \geq 3)$. עוד נניח כי במוזיאון יש רק קומה אחת, אין במוזיאון קירות פנימיים, וכל המוצגים בו תלויים על הקירות או עומדים על הרצפה, כך שהמבקרים נעים במרחב שבין הקירות. הנחות אלו הן מציאותיות למדי לפחות לחלל חלקי של כל מוזיאון, כמעט. שומר (או עין אלקטרונית מסתובבת) אשר ניצב בפינות הבניין שצורתו היא, כאמור, צורת מנסרה ישרה, יכול לראות כל נקודה על כל קיר סמוך לפינה וגם על אותם קירות שאינם מוסתרים על-ידי קירות אחרים (במקרה שבסיס המנסרה הוא מצולע קעור).
נתבונן איפוא בבעיה:

בהנחות הנ״ל מהו המספר המינימלי של שומרים שיספיק לשמירת כל המוצגים במוזיאון ?

לבעיה זו נקרא: *הבעיה הבסיסית של שמירה במוזיאון.*

להמחשת מורכבות הבעיה הקורא מוזמן להתלבט בפתרונה לגבי מוזיאון שרצפתו מתוארת בשרטוט 1.



שרטוט 1

מונחים בסיסיים

כדי להגיע להצגה מתמטית של בעיית השמירה במוזיאון, נזכיר מספר מונחים בסיסיים הקשורים למצולעים, ונגדיר עוד אחדים.

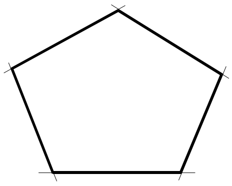
קו שבור סגור פשוט הוא קו בעל התכונות הבאות:

- מורכב מ- n קטעים (ישרים) הנמצאים באותו מישור, כך שכל נקודת קצה של אחד הקטעים משותפת לעוד קטע אחר, אחד ורק אחד; שני קטעים בעלי נקודת קצה משותפת נקראים קטעים סמוכים.
- לאף זוג של קטעים המרכיבים את הקו, אין נקודה משותפת למעט נקודת הקצה המשותפת לשני קטעים סמוכים; קו שבור סגור פשוט במישור מחלק את קבוצת הנקודות במישור לשלוש קבוצות זרות: נקודות שנמצאות על הקו השבור, נקודות בתוכו - פנימיות, ונקודות מחוצה לו - חיצוניות.

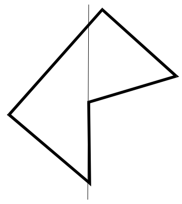
מצולע - חלק המישור החסום על-ידי קו שבור סגור פשוט. כל קטע של הקו נקרא *צלע* של המצולע. נקודת הקצה המשותפת לשני קטעים סמוכים נקראת *קדקוד* של המצולע.

מצולע קמור - מצולע אשר כל הנקודות הפנימיות שלו נמצאות באותו צד של כל ישר העובר דרך אחת מצלעותיו (ר׳ דוגמה בשרטוט 2א).

מצולע קעור - מצולע שאינו קמור, כלומר מצולע שדרך צלע אחת לפחות שלו עובר ישר אשר מחלק את הנקודות הפנימיות שלו לשני חלקים, שאינם מאותו צד של הישר: אחד מעל ואחד מתחת לישר, או אחד מימינו ואחד משמאלו (ר׳ דוגמה בשרטוט 2ב).



שרטוט 2א

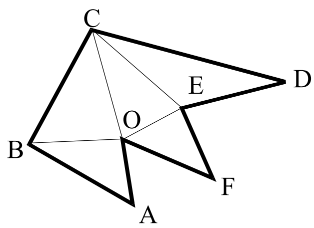


שרטוט 2ב

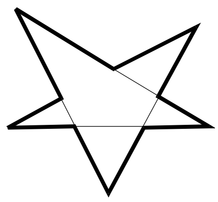
אלכסון המצולע - קטע המחבר שני קדקודים של המצולע שאינם על אותה צלע.

אלכסון פנימי - אלכסון אשר כל הנקודות שעליו הן נקודות פנימיות במצולע.

תילות (טריאנגולציה) של מצולע - חלוקת המצולע למשולשים על-ידי אלכסונים פנימיים שאינם נחתכים (ר' דוגמה בשרטוט 3א'), כך שקדקוד של המצולע לא ישמש אלא כקדקוד של משולש בתילות, כלומר לא יהיה מצב שבו קדקוד של המצולע הוא נקודה פנימית על צלע של משולש בתילות (ר' חלוקה של מעושר למשולשים, שאיננה עונה לדרישות של תילות, בשרטוט 3ב'). קיומו של תילות לכל מצולע יוכח להלן (טענה 1). תילות של משולש הוא המשולש עצמו.



שרטוט 3א

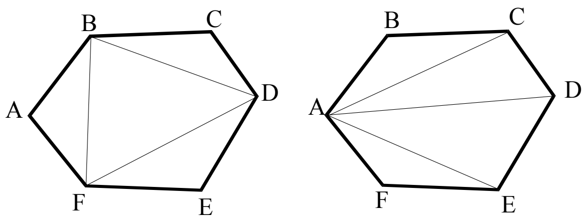


שרטוט 3ב

מניפה - איחוד כל המשולשים בעלי קדקוד משותף בתילות. קדקוד זה נקרא *מרכז המניפה*. במקרה הפשוט של משולש יחיד, המניפה היא המשולש עצמו, ומרכז המניפה יכול להיות בכל קדקוד של המשולש. בשרטוט 3א המשולשים: OAB, OBC, OCE, OEF מהווים מניפה שמרכזה O. המשולשים: EOF, ECO, ECD מהווים מניפה שמרכזה E. שתי המניפות חופפות חלקית כי המשולשים OCE, OEF נמצאים בשתיהן.

חלוקת התילות למניפות - חלוקת כל המשולשים בתילות למניפות זרות בעלות מרכזים שונים. לדוגמא: חלוקת התילות המופיע בשרטוט 3א היא לשלוש מניפות שמרכזיהן A, F, C. חלוקה זו אינה יחידה. אותו תילות ניתן לחלוקה לשתי מניפות שמרכזיהן B , E או D , O.

מדד התילותים של מצולע - המספר המינימלי של מניפות המתקבל בכל החלוקות למניפות של כל התילותים האפשריים של המצולע. לדוגמה, בשרטוט 4 מוצגים שני תילותים של אותו משושה. בשמאלי ניתן לחלק את כל המשולשים בתילות לשתי מניפות, למשל כך: אחת שמרכזה D ושנייה שמרכזה A. אין אפשרות להציג תילות זה כמניפה אחת. את התילות הימני אפשר לחלק למניפות בדרכים אחדות: אפשר לחלקו לשלוש מניפות - אחת שמרכזה B, אחת שמרכזה D, ואחת שמרכזה F; אפשר גם לחלק לשתי מניפות - אחת שמרכזה C, אחת שמרכזה E; אפשר גם לראות את כל המשולשים כמניפה אחת שמרכזה A. לפיכך, מדד התילותים של מצולע $ABCDEF$ בשרטוט 4 הוא 1.



שרטוט 4

במצולע קמור העברת כל האלכסונים מקדקוד אחד יוצרת תילות שבו כל המשולשים מהווים מניפה אחת שמרכזה באותו קדקוד. לכן *מדד התילותים של מצולע קמור הוא* 1.

מההגדרה נובע כי מדד התילותים של מצולע בעל n צלעות אינו עולה על n ולכן מדד התילותים הוא מספר סופי בין 1 ל-n. להלן יוכח כי מדד התילותים של מצולע בעל n צלעות אינו עולה על $n-2$.

פתרון לבעיה הבסיסית של שמירה במוזיאון

שומר או עין אלקטרונית (מכאן ואילך נתייחס במילה 'שומר' גם לעין אלקטרונית), אשר ניצבים בפינת הבניין, שצורתו כאמור, היא מנסרה ישרה, יכול לראות כל נקודה על כל קיר בתנאי שקטע ישר המחבר בין עין השומר לבין נקודת הקיר אינו 'נתקל' באף קיר אחר. קל

להבין שאם עין השומר רואה את צלע הבסיס של הבניין, היא יכולה לראות את כל הקיר העומד בניצב לצלע זו. לכן את הבעיה המרחבית שהוצגה לעיל ניתן 'להטיל על הרצפה' ולהסתפק בפתרון הבעיה המישורית הבאה:

מהו המספר המינימלי של שומרים שיש להציב בקדקודים של מצולע נתון, כך שהם יוכלו לצפות בכל שטח המצולע?

יהי נתון מצולע בן n צלעות (לאו דווקא קמור). שומר הניצב בקדקוד מסוים של המצולע יכול לראות את כל שטחו של כל משולש הכלוא בין שני אלכסונים פנימיים אשר יוצאים מקדקוד זה. לפיכך, לכל תילות של המצולע, שדה הראיה של עין השומר הנמצאת בקדקוד המצולע מכיל את מניפת התילות שמרכזה באותו קדקוד.

מכאן, את סידור השמירה ניתן לבצע על-ידי תילות המצולע וחלוקת התילות למספר מניפות זרות בעלות מרכזים שונים. מרכזי המניפות מסמנים פינות בהן יש למקם שומרים ומספר השומרים יהיה כמספר המניפות בחלוקת התילות. על פי ההגדרות שלעיל, המספר המינימלי של המניפות בכל התילותים האפשריים של המצולע הוא מדד התילותים של המצולע. מכאן מגיעים לפתרון הבא של בעיית השמירה במוזיאון:

המספר המינימלי של שומרים הדרוש לשמירה במוזיאון, השוכן במבנה חד-קומתי בעל צורת מנסרה ישרה, הוא מדד התילותים של המצולע הנמצא בבסיסי המנסרה.

ראינו כי מדד התילותים של כל מצולע קמור הוא 1, באופן בלתי תלוי במספר הצלעות. הפתרון של הבעיה הבסיסית של שמירה במוזיאונים שלרצפתם צורת מצולע קמור הוא, אם כן, מאד פשוט ואינו תלוי בצורתו המיוחדת של המצולע הקמור.

לגבי מצולע שאיננו קמור, האינטואיציה הטבעית מובילה להשערה שמדד התילותים של מצולע כזה יהיה תלוי בצורתו של המצולע, היינו במספר הצלעות שלו ובמספר הזוויות הקטנות מ- $180°$ לעומת מספר הזוויות שמידתן עולה על $180°$. בכל מקרה ברור שמספר השומרים הנחוץ אינו עולה על מספר הקדקודים, n. במילים אחרות n שומרים יספיקו לשמירת כל מוזיאון שרצפתו היא מצולע בעל n צלעות. קביעת ערכו המדויק של מדד התילותים למצולע המהווה פתרון הבעיה הבסיסית של שמירה במוזיאון היא במקרים רבים לא פשוטה. הקורא מוזמן לחזור ולהתלבט בבעיה זו, שהוצגה בראשית המאמר.

הבעיה הכללית של שמירה במוזיאון

בבעיה הבסיסית, שהצגנו לעיל, הנחנו כי המוזיאון שוכן בבניין חד קומתי שצורתו היא מנסרה ישרה אשר בסיסה הוא מצולע, לאו דווקא קמור, בעל n צלעות $(n \geq 3)$; אין במוזיאון קירות פנימיים וכל המוצגים בו תלויים על הקירות או עומדים על הרצפה, כך שהמבקרים נעים במרחב שבין הקירות.

ברור שלמוזיאונים שונים יש מבנים שונים. גם באותו מוזיאון יכולים להיות מבנים וביתנים אחדים לאו דווקא חד-קומתיים ולאו דווקא ללא קירות פנימיים. לצורך הדיון, אפשר לחשוב על קומות אחדות של בנין אחד כאוסף של מבנים מנסרתיים חד-קומתיים ועל כל חלל פנימי, שאין בו קירות פנימיים, כעל מבנה נפרד. על כן, מבלי להגביל מדי את הכלליות, אפשר להניח, שלכל הבניינים והביתנים בכל המוזיאונים והגלריות יש צורה של מנסרה ישרה חד-קומתית ללא קירות פנימיים. צורת הרצפה, מצולע הבסיס של המנסרה, איננה בהכרח זהה בכל המבנים, לא מבחינת מספר הצלעות ולא מבחינת הזוויות שבין כל שתיים מהן. מועצת המוזיאונים הבינלאומית נתקלת בשאלת השמירה במוזיאונים, המעסיקה מנהלי מוזיאונים רבים ושונים[3]. טבעי שגוף כזה יעסוק בשאלה הכללית:

מהו המספר המינימלי של שומרים שיספיק לשמירת כל מוזיאון שהוא, בעל מבנה מנסרתי, עם n קירות חיצוניים (חד-קומתי וללא קירות פנימיים)?

במלים אחרות, לכל n, יש למצוא את המספר המינימלי של שומרים אשר יספיק לשמירת כל מוזיאון, אם רק ידוע שהוא שוכן בבניין חד-קומתי בצורת מנסרה ישרה בעלת n קירות חיצוניים (ללא מחיצות פנימיות).

לבעיה זו נקרא הבעיה הכללית של שמירה במוזיאון.

נתבונן תחילה ב'מוזיאון המשובעים', מוזיאון דמיוני ובו k מבנים וביתנים $P_1 , P_2 , \dots , P_k$, שכולם בעלי רצפה משובעת (כלשהי). יהיו $m_1, m_2 , \dots ,m_k$ מדדי

[3] מועצת המוזיאונים במדינת ישראל היא גוף סטטוטורי המפקח ומתקצב חלקית את הפעילות של כל המוזיאונים במדינה. בראשו עומד עו"ד יונה יהב. מינהל התרבות, שהוא חלק ממשרד המדע, התרבות והספורט, אחראי לפעילות המועצה.

התילותים ל- k משובעי הרצפה, בהתאמה. אם המוזיאון אינו פותח לביקורי הקהל יותר ממבנה אחד למשך זמן מסוים, אזי מהפתרון של הבעיה הבסיסית של שמירה במוזיאון, נובע כי המספר המינימלי של שומרים הדרוש לשמירת המוזיאון במשך שעות הביקור הוא:

$$M_7 = MAX\{m_1, m_2, ..., m_k\} \qquad (1)$$

ברור שלא כל השומרים יעבדו כל היום, כי יש מבנים שלשמירתם יידרש מספר יותר קטן של שומרים, אבל ברור גם שמספר זה יספיק אפילו למבנה התובעני ביותר מבחינת מספר השומרים הדרוש.

הפתרון של הבעיה הכללית של שמירה במוזיאון מתקבל כהכללת נוסחה (1):

יהי P_n מצולע כלשהו בעל n צלעות, $n \geq 3$. לכל $n \geq 3$ נסמן ב- π_n את קבוצת כל המצולעים P_n.

נסמן ב - $m(P_n)$ את מדד התילותים של מצולע P_n. יהי M_n המספר המינימלי של שומרים אשר יספיק לשמירת כל מוזיאון שהוא, ובלבד שהוא שוכן בבניין בעל n קירות חיצוניים בצורת מנסרה ישרה (ללא מחיצות פנימיות) שרצפתה היא אחד המצולעים ב- π_n. מובן מאליו שאם נבחר באקראי מבין כל המוזיאונים בעלי התכונות הנזכרות, מוזיאון אחד כזה, הרי שמספר השומרים שיספיק לשמירתו לא יעלה על הערך המקסימלי של מדדי התילותים של המצולעים בקבוצה π_n. היות ומההגדרה נובע שמדד התילותים של מצולע P_n אינו עולה על n, קבוצת מדדי התילותים, של המצולעים בקבוצה האינסופית π_n, היא סופית ולכן יש לה מקסימום שאינו עולה על n. לפיכך M_n מקיים:

$$M_n = \underset{p_n \in \pi_n}{MAX} \{m(P_n)\}$$

יחד עם זאת, יכול להיות שלמוזיאון שייבחר באקראי כאמור, לא בהכרח יהיה צורך במספר שומרים זה בדיוק, כי ייתכן שיספיק לו מספר שומרים קטן מ- M_n. במיוחד, למשל, אם רצפתו של מוזיאון היא פוליגון קמור אז יספיק לו שומר אחד, כי מדד התילותים של מצולע קמור, כפי שראינו, הוא 1. מתברר איפוא, שהפתרון M_n לבעיית השמירה במוזיאון, הוא פונקציה של n בלבד, דהיינו הוא תלוי במספר הקירות החיצוניים בלבד, ואיננו תלוי בצורת הרצפה או באופן התילות שלה! כפי שיוכח בהמשך, ניתן לבטא את M_n כפונקציה מפורשת של n, פונקציה מאוד מאוד פשוטה ושימושית. הפיתוח מבוסס על תכונות אחדות של תילות מצולעים.

תכונות אחדות של תילות מצולעים

נוכיח תכונות אחדות של תילות מצולעים. נזכיר, לפני כן, כי במצולע קמור כל האלכסונים הם אלכסונים פנימיים. במצולע קעור קיים לפחות אלכסון אחד שאינו פנימי ולפחות אלכסון אחד פנימי.

טענה 1

לכל מספר טבעי n, כל מצולע בעל n צלעות ניתן לתילות באמצעות אלכסונים פנימיים שאינם נחתכים.

<u>הוכחה</u> (באינדוקציה על $n \geq 3$).

עבור $n = 3$ הטענה נכונה באופן ריק. יהי k מספר טבעי כלשהו שאינו קטן מ-3 ($n \geq 3$). נניח כי הטענה נכונה עבור כל המצולעים בעלי n צלעות, $3 \leq n \leq k$, כלומר הם ניתנים לתילות על-ידי אלכסונים פנימיים שאינם נחתכים. נוכיח כי הנחה זו גוררת את נכונות הטענה גם עבור מצולע בעל $n = k+1$ צלעות.

יהי נתון מצולע כלשהו בעל $k+1$ צלעות. על-ידי העברת אלכסון פנימי נחלק אותו לשני מצולעים זרים בעלי צלע אחת בלבד משותפת, שלכל אחד מהם מספר צלעות קטן או שווה ל-k. לפי הנחת האינדוקציה, שני מצולעים אלה ניתנים לתילות על-ידי אלכסונים פנימיים שאינם נחתכים. מאיחוד התילותים של שני תת-המצולעים הזרים האלה מתקבל תילות של כל המצולע הנתון בעל $k+1$ צלעות על-ידי אלכסונים שאינם נחתכים. מכאן נובע שהטענה נכונה לכל n.

מ.ש.ל.

טענה 2

לכל n טבעי, בכל מצולע בעל n צלעות יש $n-3$ אלכסונים פנימיים שאף שניים מהם אינם נחתכים.

<u>הוכחה</u> (באינדוקציה על $n \geq 3$)

עבור $n = 3$ הטענה נכונה ($n - 3 = 0$).

יהי k מספר טבעי כלשהו שאינו קטן מ- 3 ($k \geq 3$). נניח כי הטענה נכונה עבור כל המצולעים בעלי n צלעות, $3 \leq n \leq k$. נוכיח כי מהנחה זו נובע בהכרח שהטענה נכונה גם עבור כל מצולע בעל $n = k+1$ צלעות.

יהי נתון מצולע כלשהו בעל $k+1$ צלעות. על-ידי העברת אלכסון פנימי נחלק אותו לשני מצולעים זרים, שבכל אחד מהם מספר הצלעות קטן או שווה ל- k.

סכום מספרי הצלעות בשני המצולעים, הוא: $2+(k+1)$ כי את האלכסון הפנימי המחלק את המצולע הנתון לשני מצולעים, סופרים כצלע בשניהם.

לפי הנחת האינדוקציה מספר האלכסונים הבלתי נחתכים בכל אחד ממצולעים אלה קטן ב-3 ממספר הצלעות. לכן מספר האלכסונים הבלתי נחתכים בשני המצולעים ביחד הוא $[(k+1)+2]-3-3=k-3$.

קבוצת האלכסונים הפנימיים הבלתי נחתכים במצולע הנתון מורכבת מהאלכסונים הפנימיים הבלתי נחתכים בכל אחד מהמצולעים המתקבלים בחלוקה לשניים של המצולע הנתון ועוד אלכסון אחד המבצע את החלוקה. לפיכך, סך-כל מספר האלכסונים הפנימיים הבלתי נחתכים במצולע הנתון הוא $k-3+1$, כלומר הטענה נכונה גם למצולע בעל $k+1$ צלעות. מכאן נובע שהטענה נכונה לכל n.

מ.ש.ל.

טענה 3

לכל n טבעי, סכום הזוויות הפנימיות בכל מצולע בעל n צלעות הוא $180(n-2)$ מעלות.

<u>הוכחה</u> (באינדוקציה על $n \ge 3$)[4].

עבור $n=3$ הטענה מהווה משפט ידוע מהגיאומטריה האוקלידית.

יהי k מספר טבעי כלשהו שאינו קטן מ-3 ($k \ge 3$). נניח כי הטענה נכונה עבור כל המצולעים בעלי n צלעות, $3 \le n \le k$, ונוכיח כי מכאן נובעת נכונותה גם למצולע כלשהו בעל $k+1$ צלעות.

יהי נתון מצולע בן $k+1$ צלעות. נחלק אותו בעזרת אלכסון פנימי כלשהו לשני תת-מצולעים. ברור שבכל אחד מהם יש לא יותר מ-k צלעות. אם מספר הצלעות במצולע חלקי אחד הוא p ($p-1$ מהן הן צלעות של המצולע) אז במצולע החלקי השני יש $(k+1)-(p-1)+1$ צלעות. כאמור, כל אחד משני מספרים אלה קטן או שווה ל-k, לכן לפי הנחת האינדוקציה, סכום הזוויות הפנימיות בכל אחד מהמצולעים החלקיים הוא בהתאם $180(p-2)$ מעלות ו- $180(k+1-p)$ מעלות. סכום הזוויות במצולע הנתון הוא לכן:

$$180(p-2)+180(k+1-p)=180(k+1-2).$$

כלומר הטענה נכונה גם למצולע בעל $k+1$ צלעות.

מכאן נובע שהטענה נכונה לכל n.

מ.ש.ל.

[4] טענה זו ידועה היטב כתקפה למצולע קמור. ההוכחה שלפנינו מעידה על כך שהיא תקפה באותה מידה גם לגבי מצולע קעור.

טענה 4

לכל n טבעי, בכל תילות של מצולע בעל n צלעות, מספר המשולשים הוא $n-2$.

<u>הוכחה</u>

יהי נתון מצולע כלשהו בעל n צלעות. נניח שמספר המשולשים בתילות כלשהו של המצולע הזה הוא q. סכום הזוויות הפנימיות של כל המשולשים בתילות זה הוא $180q$ מעלות. לפי טענה 3 סכום הזוויות הפנימיות במצולע הנתון שווה גם ל- $180(n-2)$ מעלות. מכאן נובע $q=n-2$. הואיל ושום צעד בהוכחה לא נשען על תכונה מסוימת של התילות, לא על הגודל של n ולא על תכונה מסוימת של המצולע, המסקנה נכונה עבור כל תילות של כל מצולע.

מ.ש.ל.

<u>הגדרה</u>

כל אלכסון פנימי במצולע מחלק את n צלעותיו לשתי קבוצות: k צלעות ($n > k \ge 2$) הנמצאות מצד אחד של האלכסון ו- $n-k$ צלעות הנמצאות מצדו השני של האלכסון. במצב זה נגיד כי האלכסון *גוזר k צלעות* (*או $n-k$ צלעות*) *מהמצולע*.

טענה 5

לכל n טבעי, בכל תילות של מצולע בעל n צלעות, קיימים לפחות שני אלכסונים פנימיים שכל אחד מהם גוזר מהמצולע שתי צלעות.

<u>הוכחה</u>

יהי k_i מספר המשולשים בתילות, אשר i צלעות שלהם הן צלעות המצולע $(i=0,1,2)$ יש להוכיח כי $k_2 \ge 2$.

מספר הצלעות במצולע הוא:

$$2k_2+1\cdot k_1+0\cdot k_0=n \qquad (2)$$

לפי טענה 4 מספר המשולשים בתילות הוא $n-2$, לכן קיים:

$$k_2+k_1+k_0=n-2 \qquad (3)$$

אם נחסר את (3) מ-(2) נקבל: $k_2=k_0+2\ge 2$

מ.ש.ל.

טענה 6

אם מספר הצלעות במצולע גדול או שווה 6, אזי בכל תילות שלו קיים אלכסון אשר גוזר מהמצולע בדיוק 4 צלעות, או בדיוק 5 , או בדיוק 6.

הוכחה

יהי n מספר הצלעות במצולע. עבור $n=6,7,8$, נכונותה של טענה זו נובעת ישירות מטענה 5 כי קיומו של אלכסון הגוזר שתי צלעות מצד אחד מבטיח שמצד שני הוא גוזר במשושה 4 צלעות, במשובע - 5 צלעות ובמתומן - 6 צלעות. נוכיח שגם בתילות כלשהו של מצולע שבו $n \geq 9$ יש אלכסון בעל אותה תכונה.

ההוכחה היא בדרך השלילה. נניח כי בתילות מסוים לא קיים אלכסון כזה, כלומר כל אלכסון בתילות גוזר מספר צלעות שהוא או קטן מ-4 או גדול מ-6. נחפש בתילות אלכסון הגוזר 7 צלעות מהמצולע. אם אין כזה, נחפש אלכסון הגוזר 8 צלעות, אם גם כזה לא קיים, נמשיך לחפש אלכסון הגוזר 9 צלעות, וכך הלאה. לפי טענה 5, קיים בתילות של המצולע אלכסון אשר גוזר $n-2$ צלעות מהמצולע. לכן כעבור מספר סופי של צעדים יימצא אלכסון d בעל שתי התכונות הבאות:

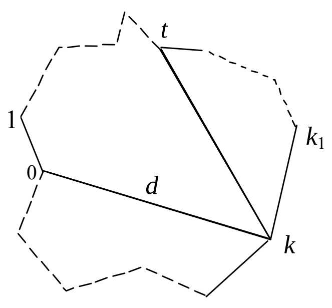
א. הוא גוזר k צלעות מהמצולע, כאשר $7 \leq k \leq n-2$;

ב. לכל אלכסון בתילות, אם נסמן ב- m את מספר הצלעות שהוא גוזר מהמצולע מצד כלשהו, אזי m מקיים: $m \leq 3$ או $m \geq k$.

נמספר את כל הקדקודים במצולע מ- 0 עד $n-1$ באופן מעגלי, בזה אחר זה, כאשר המספור מתחיל באחד מקצוות האלכסון d. המספר המתאים לקצה השני של האלכסון d הוא k.

כל אלכסון בתילות המצולע הוא צלע משותפת של שני משולשים בתילות.

בין שני המשולשים שהאלכסון d הוא צלע משותפת שלהם, נבחר אחד ונניח שמספרי הקדקודים שלו הם $0,\ t,\ k$ כאשר $0<t<k$ (ר' שרטוט 5).



שרטוט 5

נציין כי צלע (t,k) במשולש לא יכולה להתלכד עם צלע המצולע כי אז היה $t=k-1$ והאלכסון $(0,t)$ היה גוזר $k-1$ צלעות מהמצולע, דבר שלא ייתכן על פי בחירתו של האלכסון d (תכונה ב). מכאן נובע שהקטע (t,k) הוא לא צלע, אלא אלכסון במצולע.

אלכסון זה הוא אלכסון פנימי במצולע כי הוא משמש צלע באחד ממשולשי התילות $(0,t,k)$. מאותן סיבות הקטע $(0,t)$ הוא אלכסון פנימי במצולע.

אלכסון (t,k) גוזר מהמצולע $k-t$ צלעות ואלכסון $(0,t)$ גוזר t צלעות מהמצולע. כל אחד מהמספרים האלה קטן מ- k ועל פי תכונה ב לעיל כל אחד מהם קטן או שווה ל- 3:

$$t \leq 3$$
$$k-t \leq 3$$

מכאן נובע כי $k \leq 6$ בסתירה לכך שלפי תכונה א של האלכסון d מתקיים: $7 \leq k \leq n-2$.

הסתירה התקבלה על סמך ההנחה שאין בתילות של המצולע אף אלכסון שגוזר מהמצולע 4, 5 או 6 צלעות. מכאן נובע שההנחה מוטעית, כלומר בכל תילות של כל מצולע קיים אלכסון, אחד לפחות, הגוזר מן המצולע 4, 5 או 6 צלעות.

מ.ש.ל.

משפט צ'באטאל

בתחילת שנות השבעים הוכיח מתמטיקאי צ'כי צעיר בשם וצלב צ'באטאל (Vaclav Chvatal) את המשפט הבא [2]:

כל תילות של מצולע כלשהו בעל n צלעות ניתן לחלק למניפות זרות שמספרן אינו עולה על הערך השלם של $\frac{n}{3}$

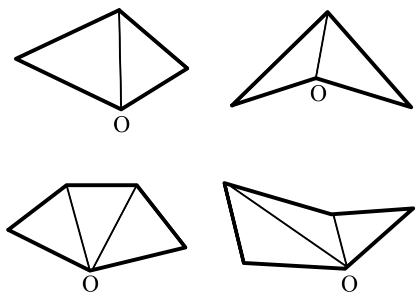
נביא למשפט שתי הוכחות. הראשונה היא ההוכחה של צ'באטאל [2], בשינויים קלים שנעשו למען הבהרת יתר של הצגת ההוכחה[5]. ההוכחה השנייה נשענת על רעיון הצביעה של הקדקודים [3].

הוכחה 1 (ההוכחה של צ'באטאל [2])

ברור שהמשפט נכון למשולש אחד, כלומר עבור $n=3$. עבור $n=4$ (מרובע) ו- $n=5$ (מחומש) המשולשים בכל

[5] צ'באטאל ניגש לחקירת הבעיה בעקבות אתגר שהציג בפניו ויקטור קלי (Victor Klee) בפגישתם בכנס בסטנפורד, קליפורניה, בהקשר לאבטחת ציורים מקוריים בגלריה לאמנות.

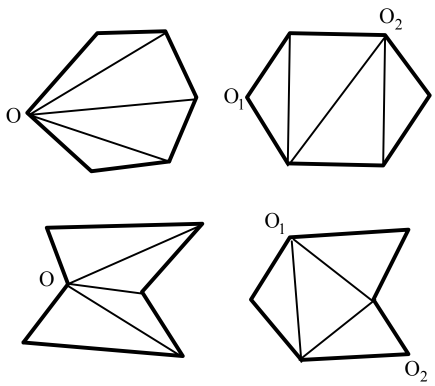
תילות יוצרים מניפה אחת (ר' דוגמאות בשרטוט 6), ולכן גם עבור ערכים אלה המשפט נכון.



שרטוט 6

לגבי $n=6$, כלומר כאשר המצולע הוא משושה, לפי טענה 5 קיים בתילות אלכסון המחלק את המשושה למשולש ומחומש. כל תילות של כל מחומש ניתן להציג כמניפה אחת. לכן כל תילות של כל משושה ניתן להציג כשתי מניפות לכל היותר, וזה מתאים לטענת המשפט (ר' דוגמאות בשרטוט 7).

ובכן, המשפט נכון עבור $n=3,4,5,6$. נוכיח באינדוקציה מתמטית שהוא נכון לכל $n\ge 3$.



שרטוט 7

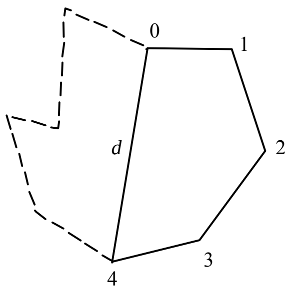
יהי k מספר טבעי שאינו קטן מ- 6 ($k\ge 6$). כבר ראינו כי המשפט נכון עד $n=6$. נניח כי המשפט נכון עבור כל מצולע בעל n צלעות כאשר $k\le n$. נוכיח שהנחה זו מחייבת שהוא נכון גם למצולע בעל $n=k+1$ צלעות.

יהי נתון תילות כלשהו של מצולע כלשהו בעל $k+1\ge 7$ צלעות.

לפי טענה 6 בתילות קיים אלכסון הגוזר מהמצולע 4 צלעות או 5 או 6. נדון לחוד בכל אחד משלושת המקרים.

מקרה א: בתילות המצולע קיים אלכסון d הגוזר מהמצולע 4 צלעות. נמספר את קדקודי הצלעות הגזורות באופן מעגלי כך שאחד מקצות האלכסון הגוזר יסומן ב0- והשני ב- 4 (ר' שרטוט 8).

האלכסון d מחלק את המצולע למחומש ולמצולע בעל $(k+1)-4+1=k-2$ צלעות.



שרטוט 8

עבור המחומש כבר ראינו כי ניתן להציג את משולשי התילות בתוכו כמניפה אחת. לגבי התילות של תת-המצולע בעל $k-2$ צלעות, לפי הנחת האינדוקציה ניתן לחלק אותו למספר מניפות זרות אשר אינו עולה על $\left[\frac{k-2}{3}\right]$. לפיכך, מספר המניפות במצולע הנתון, שמספר צלעותיו על פי ההנחה הוא $k+1$, אינו עולה על:

$$\left[\frac{k-2}{3}\right]+1=\left[\frac{(k+1)-3}{3}\right]+1=\left[\frac{k+1}{3}\right]-1+1=\left[\frac{k+1}{3}\right]$$

בכך הוכחנו שהטענה נכונה למצולע בעל $k+1$ צלעות, במקרה א.

מקרה ב: עתה נניח שלא קיים בתילות המצולע אלכסון הגוזר 4 צלעות, אבל קיים בו אלכסון הגוזר מהמצולע 5 צלעות. במקרה זה המצולע מחולק למשושה ולתת-מצולע בעל $(k+1)-5+1=k-3$ צלעות. ייתכנו שני תת-מקרים:

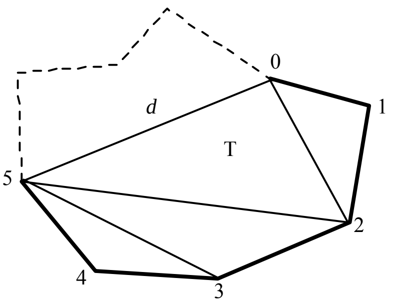
(1) ניתן להציג את תילות המשושה כמניפה אחת;

(2) לא ניתן להציג את תילות המשושה כמניפה אחת.

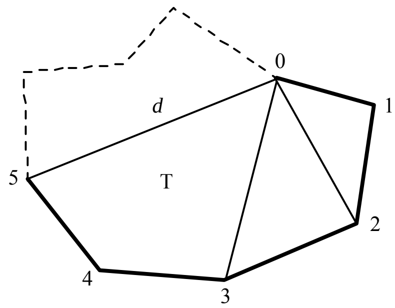
תת-מקרה ב(1): אם התילות במשושה עשוי ממניפה אחת, אזי ההוכחה דומה להוכחה של מקרה א.

תת-מקרה ב(2): נניח כי לא ניתן להציג אף תילות במשושה כמניפה אחת. נמספר את הקדקודים של המשושה שנגזר מ- 0 עד 5 כך שהקדקודים שמספריהם 0 ו- 5 הם קצות האלכסון d (שרטוט 9). נסמן ב-T את

אותו משולש בתילות של המשושה אשר מכיל את הצלע $(0,5)$. הקדקוד השלישי של משולש זה איננו קדקוד 1, כי האלכסון $(5,1)$ גוזר מהמצולע 4 צלעות וזה לא ייתכן במקרה ב. מאותה סיבה הוא גם לא קדקוד 4. לפיכך הקדקוד השלישי של המשולש T הוא או 2 או 3. כלומר המשולש T הוא $(0,5,2)$ או $(0,5,3)$. נניח כי $T=(0,5,2)$ (שרטוט 9א). המרובע $(2,3,4,5)$ ניתן לתילות על-ידי אלכסון $(3,5)$ או $(4,2)$. האפשרות השניה איננה יכולה להתקיים כי אם התילות נעשה על-ידי האלכסון $(4,2)$, כל המשושה הופך למניפה אחת עם מרכז 2, וזה סותר את ההנחה בתת-מקרה ב(2) לפיה לא ניתן להציג את תילות המשושה כמניפה אחת. לכן אם $T=(0,5,2)$ האלכסון $(3,5)$ נמצא בתילות המשושה, כפי שמוצג בשרטוט 9א.



שרטוט 9א



שרטוט 9ב

מאותן הסיבות אם $T=(0,5,3)$, במרובע $(0,1,2,3)$ התילות נעשה על-ידי האלכסון $(0,2)$, כפי שמוצג בשרטוט 9ב.

נסמן ב-G מצולע המתקבל על-ידי האיחוד של המצולע בעל $k-3$ צלעות הנגזר על-ידי האלכסון d ושל המשולש T. למצולע G יש $(k-3)-1+2=k-2$ צלעות. לכן לפי הנחת האינדוקציה ניתן לחלק את התילות שלו למספר מניפות אשר אינו עולה על:

$$\left[\frac{k-2}{3}\right]=\left[\frac{(k+1)-3}{3}\right]=\left[\frac{k+1}{3}\right]-1 \qquad (4)$$

נסמן ב-M אותה מניפה ב-G אשר מכילה את המשולש T. נתבונן במקרה המוצג בשרטוט 9א. אם המרכז של M נמצא בקדקוד 2, המשולש T הוא משולש יחיד במניפה M, ואז כל אחד מהקדקודים 0 , 5 יכול לשמש מרכז של M. לכן ללא הגבלת הכלליות, ניתן להניח כי המרכז של M נמצא בקדקוד 0 או בקדקוד 5. אם המרכז של M נמצא ב0-, ניתן לצרף משולש $(0,1,2)$ ל-M ולראות את תילות המרובע $(2,3,4,5)$ כמניפה אחת עם המרכז 5. אם המרכז של M נמצא ב5-, ניתן לצרף משולשים $(3,4,5)$ ו-$(2,3,5)$ ל-M ולראות את המשולש $(0,1,2)$ כמניפה אחת שמרכזה באחד מקדקודיו.

סך הכל תמיד מספר המניפות במצולע הנתון בעל $k+1$ צלעות במקרה המוצג בשרטוט 9א הוא מספר המניפות בתילות של המצולע G ועוד אחד. כלומר, לפי (4), מספר המניפות בתילות המצולע בעל $k+1$ צלעות אינו עולה על:

$$\left[\frac{k+1}{3}\right]-1+1=\left[\frac{k+1}{3}\right]$$

בדומה מוכיחים כי מסקנה זו נכונה גם עבור המקרה המוצג בשרטוט 9ב.

בכך הוכחנו כי גם במקרה ב הטענה של משפט צ'באטאל נכונה עבור מצולע כלשהו בעל $k+1$ צלעות.

מקרה ג: נניח כי לא קיים בתילות של המצולע אלכסון שגוזר 4 או 5 צלעות, אבל כן קיים בו אלכסון d הגוזר 6 צלעות (שרטוט 10).

במקרה זה כל המצולע מחולק על-ידי האלכסון d למשובע ולמצולע בעל $(k+1)-6+1=k-4$ צלעות. שוב, נמספר באופן מעגלי את הקדקודים במשובע הנגזר כך שקצות האלכסון הגוזר הם הקדקודים שמספריהם 6, 0. אם המשולשים במשובע מהווים מניפה אחת, ההוכחה דומה למקרה א. נניח איפוא כי *לא* ניתן להציג את תילות המשובע כמניפה אחת. נסמן ב-T את המשולש בתילות המשובע, אשר מכיל את הצלע $(0,6)$.

כל אחד מהאלכסונים $(6,1)$, $(6,2)$, $(0,4)$, $(0,5)$ גוזר מהמצולע 4 או 5 צלעות. לכן אף אחד מהם אינו שייך לתילות. מכאן שקדקוד 3 הוא בהכרח הקדקוד השלישי של המשולש T.

תילות המשובע מכיל משולש T ועוד ארבעה משולשים המתקבלים על-ידי תילות שני המרובעים $(0,1,2,3)$ ו-$(3,4,5,6)$. את המרובע הראשון ניתן לתלת בעזרת האלכסון $(0,2)$ או האלכסון $(1,3)$, ואת המרובע השני ניתן לתלת בעזרת האלכסון $(3,5)$ או האלכסון $(4,6)$.

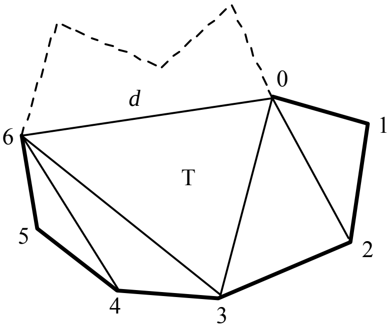
אם האלכסונים $(1,3)$ ו-$(3,5)$ נמצאים בתילות בו-זמנית, אזי את תילות המשובע ניתן להציג כמניפה אחת עם המרכז 3, וזה סותר את ההנחה שנעשתה לעיל. לכן יש רק שלוש אפשרויות של תילות המשובע:

1. האלכסונים $(1,3)$, $(3,5)$ אינם מופיעים בכלל בתילות (ר' שרטוט 10א);
2. האלכסון $(1,3)$ לא מופיע בתילות ואלכסון $(3,5)$ מופיע בתילות (ר' שרטוט 10ב);
3. האלכסון $(1,3)$ מופיע בתילות ואלכסון $(3,5)$ אינו מופיע בתילות (ר' שרטוט 10ג);

נתבונן בהתאם בשלושה תת-מקרים של מקרה ג.

תת-מקרה ג(1). המרובע $(0,1,2,3)$ מתולת על-ידי אלכסון $(0,2)$ והמרובע $(3,4,5,6)$ מתולת על-ידי אלכסון $(4,6)$ (שרטוט 10א).

במקרה זה יש לצרף את המשולש $T=(0,3,6)$ למצולע בעל $k-4$ צלעות הנגזר על-ידי האלכסון d. מתקבל מצולע G בעל $k-3$ צלעות.



שרטוט 10א

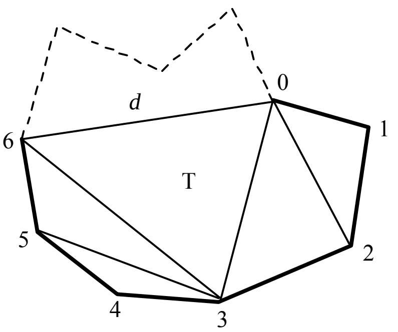
נניח כי בתילות של המצולע G מרכז המניפה M אשר מכילה את המשולש T הוא קדקוד 0 (המקרה כאשר מרכז המניפה נמצא בקדקוד 6 מטופל באופן דומה). יש להרחיב את המניפה על-ידי שני משולשים $(0,1,2)$ ו-$(0,2,3)$. מניפה נוספת שמרכזה בקדקוד 6 נוצרת על-ידי משולשים במרובע $(3,4,5,6)$. לפי הנחת האינדוקציה מספר המניפות אינו עולה על:

$$\left[\frac{k-3}{3}\right]+1=\left[\frac{k}{3}\right]-1+1=\left[\frac{k}{3}\right]\le\left[\frac{k+1}{3}\right]$$

אם המרכז של המניפה M הוא קדקוד 3, מניפה זו מכילה רק משולש T. במקרה זה ניתן להעביר את מרכז המניפה לקדקוד 0 ובכך לחזור למקרה שטופל לעיל.

תת-מקרה ג(2): המרובע $(0,1,2,3)$ מתולת על-ידי אלכסון $(0,2)$ והמרובע $(3,4,5,6)$ מתולת על-ידי אלכסון $(3,5)$ (שרטוט 10ב).

במקרה זה יש לצרף את משולש $T=(0,3,6)$ ומשולש $(0,2,3)$ למצולע בעל $k-4$ צלעות הנגזר על-ידי האלכסון d. מתקבל מצולע G בעל $k-4$ צלעות. נניח כי במצולע G המשולש $(0,2,3)$ מוכל במניפה F. אם המרכז של F הוא ב-0 או ב-2, יש להרחיב את המניפה על-ידי המשולש $(0,1,2)$. המשולשים הנשארים במשובע מהווים מניפה אחת עם מרכז 3.

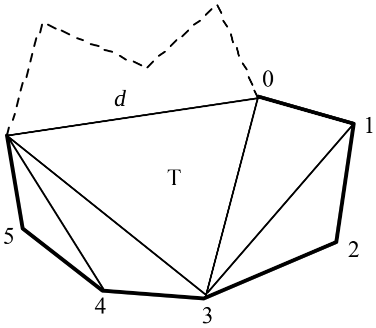


שרטוט 10ב

אם מרכז המניפה F הוא קדקוד 3, יש להרחיב אותה על-ידי צירוף המשולש T=$(0,3,6)$ והמשולשים שבמרובע $(3,4,5,6)$. המשולש $(0,1,2)$ מהווה מניפה נוספת בודדת. שוב, מספר כל המניפות במצולע המוצא G אינו עולה על:

$$\left[\frac{k-2}{3}\right]+1=\left[\frac{(k+1)-3}{3}\right]+1=$$
$$=\left[\frac{k+1}{3}\right]-1+1=\left[\frac{k+1}{3}\right]$$

תת-מקרה ג(3): המרובע $(0,1,2,3)$ מתולת על-ידי אלכסון $(1,3)$ והמרובע $(3,4,5,6)$ מתולת על-ידי אלכסון $(4,6)$ (שרטוט 10ג). מקרה זה דומה למקרה הקודם ומטופל בהתאם לו.



שרטוט 10ג

מתת-מקרים א, ב, ג, עולה, כי משפט צ׳באטאל נכון לכל מצולע בעל $k+1$ צלעות אם הוא נכון למצולע כלשהו בעל $n \le k$ צלעות, כאשר k מספר טבעי שאינו קטן מ-6 $(k \ge 6)$.

כבר הראינו לעיל כי המשפט נכון עבור $n = 3,4,5,6$. באינדוקציה מסיקים כי המשפט נכון עבור כל n, $n \ge 3$.
מ.ש.ל

ההוכחה שניתנה על-ידי צ׳באטאל נשענת על סקירה ממצה של האפשרויות לתילות. זוהי הוכחה ארוכה למדי. טבעי שמתמטיקאים חיפשו הוכחות קצרות יותר, אלגנטיות יותר. ההוכחה הבאה הנשענת על רעיון הצביעה של הקדקודים בשלושה צבעים, היא אלגנטית במיוחד.
נוכיח תחילה את טענת-העזר הבאה:

טענת-עזר

לכל $n \ge 3$, בכל תילות של מצולע בעל n צלעות ניתן לצבוע את קדקודי המצולע בשלושה צבעים שונים כך שבכל משולש בתילות, שלושת הקדקודים יהיו צבועים בשלושה צבעים שונים.

הוכחה

נוכיח את הטענה באינדוקציה על מספר הצלעות n של מצולע.
עבור משולש ($n = 3$), הטענה נכונה באופן טריביאלי.
יהי k מספר טבעי נתון $k \ge 3$. נניח כי ניתן לצבוע כפי שדרוש את כל הקדקודים בכל תילות של כל מצולע בעל k צלעות. יהי נתון תילות כלשהו של מצולע בעל $k+1$ צלעות. נסלק ממנו משולש אשר שתי צלעותיו מתלכדות עם צלעות המצולע (קיומו של המשולש מובטח בטענה 5). לאחר הסילוק של משולש זה, נשאר תילות של מצולע בעל $(k+1)-2+1=k$ צלעות. לפי הנחת האינדוקציה, ניתן לצבוע את הקדקודים של מצולע זה כנדרש. במשולש שסולק יש שני קדקודים שמתלכדים עם הקדקודים שכבר נצבעו. קדקודים אלה נצבעו בצבעים שונים. נצבע את הקדקוד השלישי של המשולש בצבע השלישי. כל הקדקודים במצולע הנתון בעל $k+1$ צלעות יהיו צבועים כנדרש. כך הוכח באינדוקציה שבכל תילות של כל מצולע ניתן לצבוע את קדקודיו כנדרש.
מ.ש.ל.

הוכחה 2 של משפט צ׳באטאל (מבוסס על רעיון הצביעה של הקדקודים [3])

יהי נתון תילות כלשהו של מצולע בעל n צלעות $(n \ge 3)$. על פי טענת-העזר, ניתן לצבוע את כל הקדקודים של המצולע בשלושה צבעים שונים, כך שבכל משולש בתילות, יש לשלושת הקדקודים שלושה צבעים שונים. מספר הקדקודים הוא n. לכן בין שלושת הצבעים קיים צבע אחד לפחות, שמספר הקדקודים הצבועים בצבע זה לא עולה על $\left[\frac{n}{3}\right]$. נקרא לצבע זה ׳צבע A׳. נתבונן במשולשים בתילות שיש להם קדקוד בצבע A גם מספרם אינו עולה על $\left[\frac{n}{3}\right]$. כל קבוצת משולשים בעלי קדקוד משותף בצבע A מהווה מניפה שמרכזה באותו קדקוד. לפיכך מספר המניפות שמרכזן הוא בקדקוד מצבע A אינו עולה אף הוא על $\left[\frac{n}{3}\right]$. לשתי מניפות בעלות מרכזים שונים בצבע A אין משולשים משותפים, כי לא ייתכנו במשולש אחד שני קדקודים באותו צבע. יחד עם זאת, לכל משולש בתילות יש קדקוד בצבע A, לכן כל משולש שייך לאחת המניפות ורק לאחת. מכאן נובע שאיחוד כל המניפות שקדקדן בצבע A, הוא תילות של כל המצולע, ומספרן של מניפות זרות אלו, כאמור, אינו עולה על $\left[\frac{n}{3}\right]$. בכך השלמנו את ההוכחה השניה של משפט צ׳באטאל.

אלגוריתם לחלוקת תילות נתון של מצולע למספר מניפות שאינו עולה על שליש מספר הצלעות

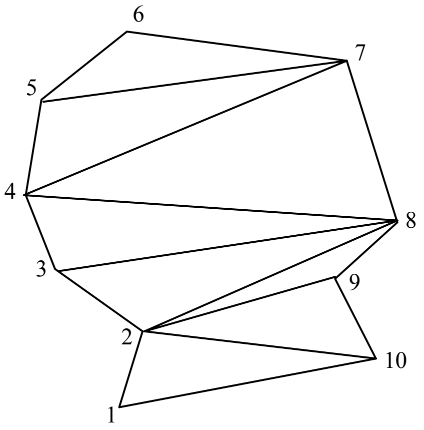
להוכחה השניה של משפט צ׳באטאל יש יתרון, על פני ההוכחה הראשונה, בכך שניתן להציג לאורה אלגוריתם המאפשר לבצע בפועל חלוקה של תילות נתון של מצולע למספר מניפות אשר אינו עולה על שליש של מספר הקדקודים (צלעות) של המצולע. נבחן אלגוריתם כזה:

1. ממספרים באופן מעגלי את הקדקודים של המצולע המתולת מ- 0 עד $n-1$.

2. בין המשולשים בתילות מוצאים משולש אשר שתי צלעותיו הן צלעות המצולע (יש לפחות אחד כזה, על פי טענה 5). מורידים את שתי הצלעות האלו מהמצולע ורושמים את שם המשולש בעזרת מספרי קדקודיו בראש רשימת המשולשים.
3. במצולע הנותר לאחר סילוק המשולש, מוצאים משולש אשר שתי צלעותיו הן צלעות המצולע. מורידים אותן מהמצולע ורושמים את שמו של המשולש בעזרת מספרי קדקודיו בהמשך הרשימה.
4. חוזרים על ביצוע הפעולות הנזכרות בצעד 3, שוב ושוב עד שנשאר משולש אחד. רושמים אותו בסוף רשימת המשולשים.
5. בוחרים שלושה צבעים. צובעים את שלושת הקדקודים של המשולש האחרון, כל אחד באחד הצבעים האלה.
6. עוברים למשולש שלפני האחרון ברשימה. שניים מקדקודי המשולש הם קדקודים של המשולש האחרון והם כבר צבועים בשני צבעים שונים מבין השלושה. צובעים את הקדקוד השלישי שלו בצבע השלישי.
7. עוברים למשולש הבא מלמטה ברשימת המשולשים. צובעים את הקדקוד שאינו צבוע בצבע שונה מהצבעים של שני קדקודיו האחרים.
8. חוזרים על הפעולות הנזכרות בצעד 7 עד שמגיעים אל ראש רשימת המשולשים וצובעים את קדקודו השלישי כאמור.
9. מאתרים בין שלושת הצבעים שנבחרו, אחד (קיים לפחות אחד) בו צבועים לא יותר מ- $\left[\frac{n}{3}\right]$ קדקודים.
10. עבור כל קדקוד שנצבע בצבע זה מוצאים את מניפת כל המשולשים שמרכזה בקדקוד זה. כל המניפות האלו יוצרות חלוקה למניפות זרות של תילות המצולע הנתון.

בדוגמה הבאה מופיע מימוש האלגוריתם.
יהי נתון תילות המעושר המוצג בשרטוט 11 .
הקדקודים במעושר מסומנים מ- 0 עד 9, באופן מעגלי לפי כיוון השעון. תהליך ההורדה של משולשים הוא:

(4,5,6)
(0,1,9)
(3,4,6)
(1,8,9)
(3,6,7)
(2,3,7)
(1,7,8)
(1,2,7).



שרטוט 11

תהליך החזרת משולשים תוך צביעת הקדקודים בשלושת הצבעים (כחול, ירוק, אדום):

במשולש (1,2,7)	2	כחול
	1	אדום
	7	ירוק
במשולש (1,7,8)	8	כחול
במשולש (2,3,7)	3	אדום
במשולש (3,6,7)	6	כחול
במשולש (1,8,9)	9	ירוק
במשולש (3,4,6)	4	ירוק
במשולש (0,1,9)	0	כחול
במשולש (4,5,6)	5	אדום

הצבעים אדום וירוק מופיעים שלוש פעמים, $\left[\frac{10}{3}\right]=3$.

שלושת הקדקודים בצבע ירוק הם: 9, 7, 4. המניפות שמרכזיהן בקדקודים אלה מהוות את החלוקה המבוקשת של התילות הנתון של המעושר. הקורא מוזמן ליישם אלגוריתם זה למצולע בשרטוט 1.

מידת הדיוק של ההערכה של צ'באטאל

מהדוגמא לעיל רואים כי שלושה שומרים יספיקו למילוי דרישות השמירה במוזיאון שריצפתו נתונה בשרטוט 11. יחד עם זאת קל לראות על-ידי שינוי התילות שאפשר במקרה זה להסתפק אף בשניים או באחד שיעמוד בקדקוד 8 למשל. נשאלת איפוא השאלה האם יש מצב שבו אין נחוצים שומרים במספר שנקבע כחסם-עליון ממשפט צ'באטאל?

ממשפט צ'באטאל נובע כי המדד של מצולע בעל n צלעות אינו עולה על $\left[\frac{n}{3}\right]$, כלומר:

$$m(P_n) \le \left[\frac{n}{3}\right] \qquad (5)$$

עבור כל מצולע P_n בעל n צלעות.

הטענה הבאה מראה כי בקבוצת כל המצולעים בעלי n צלעות, לא יכולה להתקיים הערכה אחרת בעלת חסם נמוך יותר מ-$\left[\frac{1}{3}\right]$ הואיל וקבלת שוויון ב- (5) היא אפשרות בת-קיימא. במלים אחרות האי-שוויון לעיל הוא ההערכה הטובה ביותר.

טענה

לכל מספר טבעי n, המקיים $(n \ge 3)$, קיים מצולע $\hat{P}_n$ בעל n צלעות שמדד התילותים שלו הוא בדיוק $\left[\frac{n}{3}\right]$:

$$m(\hat{P}_n) = \left[\frac{n}{3}\right]$$

<u>הוכחה</u>

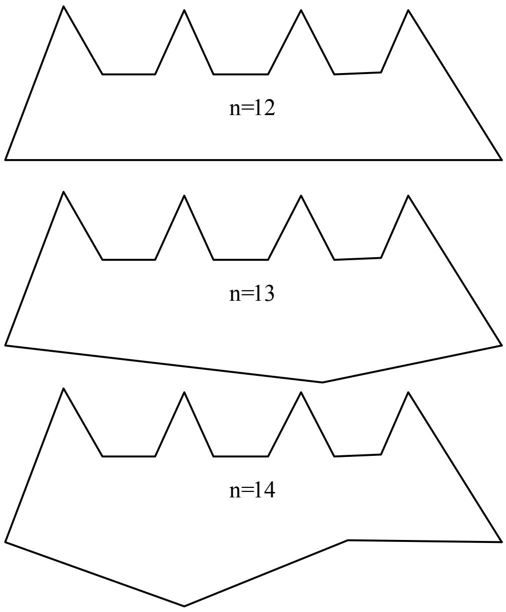
הטענה בודאי נכונה עבור $n = 3,4,5$. עבור כל n נתון, $n \ge 6$, ייתכן רק אחד משלושה מקרים: $n = 3k$ או $n = 3k+1$ או $n = 3k+2$. בהתאם למקרים אלה נבנה מצולע בן n צלעות המכיל k 'בליטות' נפרדות, כפי שמודגם בשרטוט 12 עבור:

$$n = 12,\ n = 13,\ n = 14 \Rightarrow k = 4$$

נסמן מצולע מסוג זה ב- $\hat{P}_n$. לאף שתים מה'בליטות' ב- $\hat{P}_n$ אין נקודה משותפת, לכן בכל תילות של המצולע, 'בליטות' שונות בהכרח שייכות למניפות שונות, כך שמספר המניפות בכל תילות של $\hat{P}_n$ אינו קטן מ- $k = \left[\frac{n}{3}\right]$. מכאן שמדד התילותים של $\hat{P}_n$ אינו קטן מ- $\left[\frac{n}{3}\right]$ כלומר $m(\hat{P}_n) \ge \left[\frac{n}{3}\right]$. לפי משפט צ'באטאל מדד התילותים של כל מצולע אינו עולה על שליש של מספר צלעותיו. לכן:

$$m(\hat{P}_n) = \left[\frac{n}{3}\right]$$

מ.ש.ל.



שרטוט 12

הפתרון המפורש לבעיה הכללית של השמירה במוזיאון

יהי

$$M_n = \underset{P_n \in \pi_n}{MAX} \{m(P_n)\}$$

כאשר π_n היא קבוצת כל המצולעים בעלי n צלעות. הראינו לעיל כי המקסימום אכן קיים והפונקציה M_n מציגה פתרון של הבעיה הכללית של שמירה במוזיאון. נזכיר כי בבעיה זו יש למצוא מספר מינימלי של שומרים המספיק לשמירה של *כל* מוזיאון, תהא אשר תהא צורת הרצפה שלו ובלבד שצורתו צורת מנסרה ישרה בעלת n קירות. כעת נראה שניתן להגיע לביטוי מפורש עבור M_n.

לפי משפט צ'באטאל:

$$m(P_n) \le \left[\frac{n}{3}\right]$$

לכן:

$$M_n \le \left[\frac{n}{3}\right] \qquad (6)$$

מצד שני, לפי הטענה האחרונה שהוכחנו לעיל קיים מצולע $\hat{P}_n$ שעבורו מתקיים:

$$m(\hat{P}_n) = \left[\frac{n}{3}\right]$$

הואיל ו- $M_n \ge m(\hat{P}_n)$, מהשוויון האחרון נובע כי:

$$M_n \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \quad (7)$$

מאי-שוויונים (6), (7) נובע כי:

$$M_n = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \quad (8)$$

שוויון (8) קובע כי *המספר המינימלי של שומרים אשר יספיק לשמירה של כל מוזיאון שהוא (חד קומתי ללא מחיצות פנימיות) שצורתו מנסרה ישרה, שווה לחלק השלם של שליש מספר הקירות במוזיאון.*

זהו הפתרון המפורש של הבעיה הכללית של השמירה במוזיאון.

הערה על בעיית השמירה במוזיאון

בעיית שמירת המוזיאון היא אחת מאותן הבעיות המיוחדות במדע אשר 'אינן מזדקנות' ומצטיינות ברב-גוניות, כלומר העניין בחקירתן אינו עובר במשך הזמן וניתן לטפל בהן מהיבטים שונים וברמות קושי שונות. במאמרנו הוצגה גרסה פשוטה יחסית של הבעיה בה למוזיאון יש צורת פאון והחקירה נעשית באמצעות קומבינטוריקה אלמנטרית.

ביוני 2000 פורסם מחקר על בעיית שמירה במוזיאון הנמצא בשטח פתוח - כמו פארק גדול ובו מספר רב של שבילים, כאשר השומרים נמצאים בצמתים - נקודות המפגש של השבילים [6].

המודל המתמטי לצורה זו של מוזיאון הוא גרף אשר קדקודיו מסמנים את קבוצת הקדקודים המינימלית ה'מכסה את הגרף' במובן שמקדקודים אלה ניתן לראות את כל יתר הקדקודים ואת כל השבילים. כדי שתוצאות החקירה יתאימו לגרפים של קונפיגורציות שונות, הגרף אקראי והחקירה מתבצעת בשילוב שיטות של תורת הגרפים, תורת ההסתברות ומדעי מחשב.

מקורות

1. Dembski, G., Editorial - ICMS is a Committee for all ICOM member interests. *ICOM International Committee for Museum Security (ICMS), Study Series,* 4/1997
2. Honsberger, R., Chvatal's Art Gallery Theorem. *Mathematical Gems II, Chapter 11, 104-110, MAA Inc.* 1976
3. Prasolov V., *Problems of Plane Geometry*, Part 2, Moscow, "Nauka", 1991 (In Russian)
4. Thefts reported to ICOM, *ICOM Newsletter*, No.1-2,1999
5. Thefts reported to ICOM, *ICOM Newsletter*, No.3,1999
6. Weight, M. and Hartmann, A. K., Number of Guards Needed by Museum: A Phase Transition in Vertex Covering of Random Graphs [Physical Review Letters, v.84, No. 26. pp. 6118-6121].