הנושא: **התנסות בביצוע פעילויות חקר**

הוכן ע״י: משתלמים בתוכנית להכשרת מורי-מורים למתמטיקה מטעם ״קשר חם״.

תקציר: במסגרת תוכנית להכשרת מורי-מורים למתמטיקה, שהתקיימה בשנה״ל תשס״ב, הכינו המשתלמים פרוייקטים אישיים. כל אחד מהם בחר בעיה מתמטית שגרתית מתוך ספר לימוד כלשהו (או מתוך מקור זמין אחר), והרחיב אותה באמצעות המודל: ׳מה אם לא?׳. התמקדות באחת השאלות הובילה כל אחד מהם למסקנה מפתיעה.

מילות מפתח: שיטות וגישות הוראה, שיטת חקר, פרויקט אישי, מודל מתמטי, ׳מה אם לא?׳, הכללה, הנדסה, גיאומטריה, הנדסת המישור, גיאומטרית המישור, משולש, מרובע, ריבוע, מקבילית, מצולע משוכלל, מעגל, שטח, גיאומטריה אנליטית, מקום גיאומטרי, פרבולה, מעגל, היפרבולה, אלגברה, טכניקה אלגברית, תבנית מספר, פירוק לגורמים, שבר אלגברי, חילוק רב-איבר בדו-איבר, פונקציות, פונקציה ממעלה ראשונה, פונקציה לינארית, סדרות, סדרת הפרשים, סטטיסטיקה, חציון, עזרי הוראה, מחשב, לומדה.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 30, אביב תשס״ג, 2003, עמודים 35-27.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 9 עמודים.

ale30-5

התנסות בביצוע פעילויות חקר

משתלמים בתוכנית להכשרת מורי-מורים
למתמטיקה מטעם המרכז הארצי "קשר חם"

הקדמה[1]

בשלושים השנים האחרונות נשמעו קריאות רבות הנוגעות לשינויים שיש לבצע בהוראת המתמטיקה בבתי הספר. אחד מביטויה הוא המסמך אשר חובר על-ידי הארגון הלאומי של מורי המתמטיקה בארה"ב (NCTM, 1991, 2000). במסמך זה מוצגים חמישה 'סטנדרטים' להוראת מתמטיקה העוסקים בנושאים: פתרון בעיות, שכילה והוכחה, תקשורת בכיתה, קישוריות בין נושאים וייצוגים. בחלק העוסק בפתרון בעיות מוצגת הגישה לפיה יש להרבות בביצוע פעילויות חקר הנשענות על שאלות שהתלמידים עצמם העלו.

תוכניות רבות המיועדות לסייע למורים בהתפתחותם המקצועית מתייחסות להמלצה זו, ובמסגרתן מעודדים מורי-המורים את המורים לשלב פעילויות חקר בהוראה בכיתותיהם. מנסיוננו, מורים רבים נמנעים מכך. מקורה של הימנעות זו טמון, בין היתר, בחוסר הבטחון של המורים ביתרונות של למידה מסוג זה. בנוסף, מרבית המורים אינם מכירים את התהליכים הקוגניטיביים והריגושיים המעורבים בלמידת חקר. על סמך ניתוח של שיחות, שהתקיימו עם משתלמים בתוכניות להכשרת מורי-מורים למתמטיקה מטעם המרכז הארצי למתמטיקה "קשר חם", הבנו שאם המשתלמים עצמם לא יחוו תהליך אמיתי של חקר וגילוי, הרי שהסיכוי שיישמו גישה זו בכיתתם הינו קטן.

במסגרת תוכנית ההכשרה שהתקיימה בשנה"ל תשס"ב הכינו המשתלמים פרוייקטים אישיים. כל אחד מהם בחר בעיה מתוך ספר לימוד כלשהו (או מתוך מקור זמין אחר), והרחיב אותה באמצעות המודל של Brown & Walter (1990) - 'מה אם לא?', אשר התברר כמודל יעיל מאד להעלאת שאלות חקר רבות הנובעות מתוך שאלה נתונה אחת. המשתלמים התבקשו לנסות להגיע להכללה כלשהי, ולגלות משהו שלא היה ידוע להם קודם. במהלך ההשתלמות הציגו מדי פעם המשתלמים בפני עמיתיהם את שאלות החקר שהעלו ואת הממצאים שאליהם הגיעו, ונעזרו זה בזה בהעלאת שאלות חקר נוספות, ובהוכחת השערות שעלו מתוך הממצאים.

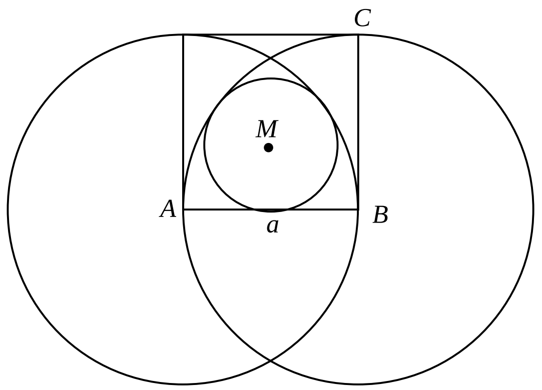
להלן תוצגנה ארבע מעבודותיהם של המשתלמים, ולסיום תוצג הרפקלציה שלהם על התהליך שעברו ועל תרומתו להתפתחותם כמורים למתמטיקה.

ריבוע, קשתות ומעגל חסום

מיכל חזן, אורט מעלות

בספרו של בני גורן 'הנדסה חלק ב, מופיעה השאלה הבאה (עמ' 385):

ABCD הוא ריבוע שצלעו a. הנקודות A ו – B הן, בהתאמה, המרכזים של רבעי מעגל שהרדיוס שלהם הוא a. מעגל שמרכזו M משיק לשני רבעי המעגל ולריבוע (ר' שרטוט 1).
הבע באמצעות a את רדיוס המעגל M.



שרטוט 1

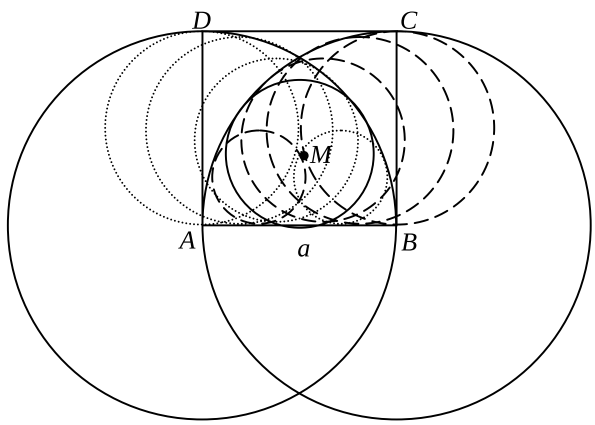
[1] ההקדמה והסיכום נכתבו ע"י עטרה שריקי ובת-שבע שכטר, מנחות התוכנית להכשרת מורי-מורים למתמטיקה

ניתוח נתוני הבעיה מעלה את התכונות הבאות:

1. נתון מצולע;
2. המצולע בעל ארבע צלעות;
3. המצולע משוכלל;
4. נתונים שני מעגלים;
5. מרכזי המעגלים מונחים על שני קודקודים סמוכים של הריבוע;
6. אורכי הרדיוסים של המעגלים שווים לאורך צלע הריבוע;
7. נתון מעגל החסום על-ידי שני המעגלים ועל-ידי צלע הריבוע.

את שבע התכונות ניתן לשלול במגוון דרכים, ונשאיר זאת לקוראים. להלן אתאר ממצא שקבלתי בעקבות שלילת תכונה מספר 7:

בעקבות פתרון הבעיה המקורית, ותוך כדי 'קשקושים' בתהליך הפתרון, ראיתי שניתן לשרטט קבוצה של מעגלים אשר כולם ישיקו לצלע הריבוע ולמעגל שמרכזו בנקודה A, ובאופן דומה ניתן לשרטט קבוצה של מעגלים שישיקו לצלע הריבוע ולמעגל שמרכזו בנקודה B (ר' שרטוט 2). המעגל שמרכזו בנקודה M מהווה את חיתוך שתי הקבוצות.

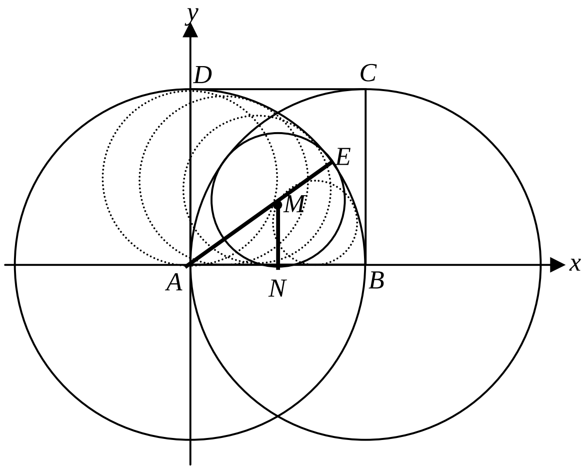


שרטוט 2

תחילה נראה היה לי שמרכזי המעגלים בכל אחת מהקבוצות מונחים על קו ישר. כאשר ניסיתי למצוא את המקום הגיאומטרי עליו מונחים מרכזי המעגלים, קבלתי שהם אינם נמצאים על קו ישר. הכלים בהם השתמשתי היו כלים של גיאומטריה אנליטית (ר' שרטוט 3):

מערכת הצירים נבנתה כך שהצלע AD מונחת על ציר y והצלע AB מונחת על ציר x.

לצורך הדגמת תהליך מציאת המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים, ניעזר במעגל שמרכזו בנקודה M, ונסמן ב- (x_0, y_0) את שיעוריה. נשרטט את הישר AM, ונסמן ב- E את נקודת החיתוך שלו עם המעגל שמרכזו ב – A. דרך הנקודה M נבנה אנך לציר x, ונסמן ב- N את נקודת החיתוך שלהם.



שרטוט 3

לפי משפט פיתגורס: $AM^2 = AN^2 + NM^2$

היות ומתקיים:

$AB = AE = a \; ; \; AN = x_0 \; ; \; MN = y_0$

נקבל: $(a - y_0)^2 = {x_0}^2 + {y_0}^2$

כלומר: $a^2 - 2ay_0 + {y_0}^2 = {x_0}^2 + {y_0}^2$

מכאן: $y = -\dfrac{1}{2a}x^2 + \dfrac{a}{2}$

כלומר, המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים לצלע AB ולמעגל שמרכזו ב- A הוא קשת של פרבולה שזוהי משוואתה. המוקד של פרבולה זו נמצא בנקודה A והמדריך שלה הוא ישר עליו מונחת הצלע CD.

באופן דומה ניתן למצוא את משוואת הפרבולה המהווה את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים לצלע AB ולמעגל שמרכזו בנקודה B.

למעשה, קבלנו דרך קונסטרוקטיבית לבניית פרבולה באמצעות ריבוע ושני מעגלים.[2]

[2] דרכים קונסטרוקטיביות נוספות ניתן למצוא בדוד (2002), שריקי ודוד (2001).

חילוק רב-איבר בדו-איבר ללא שארית

ילנה לויט, המכינה התורנית ממ"ד, חדרה
רכזת ארצית למתמטיקה בפרוייקט 'מופת'

לפני למעלה משנתיים השתתפתי בהשתלמות למורים למתמטיקה במסגרת "מופת", קבוצה לקידום ההוראה, שבה הציג המרצה מספר בעיות. אחת מהן הייתה:

מצאו את כל ערכי n שעבורם $(n-6)$
מחלק את $(n-2)(n-3)$

במבט ראשון נראית הבעיה שגרתית ולא מסקרנת. ניתן לאפיין בה את התנאים הבאים:

1. נתונה תבנית מספר (להלן – תבנית מס' 1) המורכבת ממכפלה של שני דו-איברים;
2. נתונה תבנית מספר מסוג דו-איבר (להלן – תבנית מס' 2);
3. המשתנה בכל דו-איבר זהה;
4. מעלת המשתנה המופיע בכל דו-איבר היא 1;
5. הפעולה בין האיברים בכל דו-איבר הוא חיסור;
6. המחסר המופיע באחת התבנית המרכיבות את תבנית מס' 1 הוא 3;
7. המחסר המופיע באחת התבנית המרכיבות את תבנית מס' 1 הוא 2;
8. המחסר המופיע בתבנית מס' 2 הוא 6;
9. מחלקים את תבנית מס' 1 בתבנית מס' 2;
10. מחפשים ערכים של המשתנה עבורם המנה היא מספר שלם.

המשתלמים בהשתלמות מצאו דרך מיידית לפתור את הבעיה:

$$\frac{(n-2)(n-3)}{n-6}=\frac{n^2-2n-3n+6}{n-6}=$$
$$=\frac{n^2-5n-n+n+6}{n-6}=\frac{n^2-6n+n+6}{n-6}=\frac{n(n-6)}{n-6}+\frac{n+6}{n-6}$$

$n-6$ מחלק את $n(n-6)$, לכן נשאר לבדוק את התבנית $\frac{n+6}{n-6}$.

$$\frac{n+6}{n-6}=\frac{n-6+6+6}{n-6}=1+\frac{12}{n-6}$$

לכן נשאר לבדוק באיזה תנאי $m=\frac{12}{n-6}$ הוא מספר שלם. אולם, $n=\frac{12}{m}+6$, ולפיכך m יכול לקבל אחד מהערכים: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$ בלבד.

טבלה 1 מראה את ערכי n בהתאם לערכי m האפשריים:

m	$-m$	$n(m)$	$n(-m)$
1	–1	18	-6
2	–2	12	0
3	–3	10	2
4	–4	9	3
6	–6	8	4
12	–12	7	5

טבלה 1

ניתוח הפתרון

העובדה שבמסגרת ההשתלמות ניתן מקום נרחב לקיום דיון מתמטי על הבעיות הניעה אותי להתבונן לעומק בערכי n שהתקבלו. התבוננתי בסדרת הערכים לאחר שנרשמה בסדר עולה:

-6, 0, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 18

לסדרה שהתקבלה התכונות הבאות:

- החציון הוא: $\frac{5+7}{2}=6$, ומספר זה הוא גם המחסר בדו-איבר: $(n-6)$.
- סכום כל זוג מספרים שמקומם סימטרי ביחס לחציון (סכום המספר הראשון והמספר האחרון, סכום המספר השני והמספר לפני האחרון וכן הלאה) שווה ל- 12. או: $n(m)+n(-m)=12$

מה עוד ניתן למצוא בסדרה זו? נתבונן בסדרת ההפרשים שלה:

$18-12=\mathbf{6}$; $12-10=\mathbf{2}$; $10-9=\mathbf{1}$; $9-8=\mathbf{1}$;
$8-7=\mathbf{1}$; $7-5=\mathbf{2}$; $5-4=\mathbf{1}$; $4-3=\mathbf{1}$; $3-2=\mathbf{1}$;
$2-0=\mathbf{2}$; $0-(-6)=\mathbf{6}$

לסדרת ההפרשים שהתקבלה התכונות הבאות:

- החציון הוא 2.
- המספרים בסדרה סימטריים ביחס לחציון.

הבעיה המשיכה ללוות אותי, ובהמשך הצלחתי לגלות תכונה מעניינת נוספת:

- נסמן:

$$x=\frac{(n(m)-2)(n(m)-3)}{n(m)-6}$$
$$y=\frac{(n(-m)-2)(n(-m)-3)}{n(-m)-6}$$

ונחשב את הסכום של x ו- y (ר׳ טבלה מס׳ 2).

$n\ (m)$	$n\ (-m)$	x	y	$x + y$
18	-6	20	-6	14
12	0	15	-1	14
10	2	14	0	14
9	3	14	0	14
8	4	15	-1	14
7	5	20	-6	14

טבלה 2

מתוך הטבלה ניתן לראות שהסכום של x ו- y תמיד שווה ל- m.

המשך חקירה וגילוי

לאחר שנפגשתי במסגרת התוכנית להכשרת מורי מורים למתמטיקה במודל ׳מה אם לא?׳, התעורר אצלי עניין להמשיך ולחקור את הבעיה הנתונה, להעלות השערות ולהציע שאלות חקר חדשות.

כל אחד מתנאי הבעיה ניתן לשינוי בדרכים רבות. לדוגמא: תנאי 1 ניתן לשינוי כך שתבנית מס׳ 1 תהיה מורכבת ממכפלה של יותר משני דו-איברים, או משני דו-איברים שיש ביניהם פעולה אחרת (חיבור, חיסור, וכד׳). בתנאי 1 ובתנאי 2 ניתן לשנות את התבניות לחד-איבר או לרב-איבר. מובן שניתן לשנות בכל אחת מהתבניות את המשתנה עצמו, ולהפוך אותו לביטוי אלגברי (או, למשל, טריגונומטרי) אחר. את תנאי 10 ניתן לשנות באמצעות דרישה לקבלת שארית מסוימת שונה מאפס.

להלן אדגים ממצאים שהתקבלו כתוצאה משינוי תנאים 7 – 8.

בתנאי הבעיה הנתונה אמנם לא מוזכרת במפורש העובדה שהמספר המופיע בתבנית $(n-6)$ הינו מכפלת המספרים שבתבנית $(n-2)(n-3)$, אולם נראה די ברור שכך נבנתה תבנית מספר זו. לכן, עניין אותי לדעת האם גם בתבניות אחרות הבנויות בהתאם לתנאי זה אקבל ממצאים דומים. תחילה בדקתי מקרה פרטי נוסף: ניסיתי למצוא את כל ערכי n שהופכים $(n-15)$ מחלק את $(n-5)(n-3)$.

מפתרון הבעיה, באופן דומה לפתרון הבעיה המקורית, התקבל: $m=\frac{120}{n-5}$ ו- $n=\frac{120}{m}+15$

נסמן: $x=\frac{(n(m(-5)(n(m)-3)}{n(m)-15}$

$y=\frac{(n(-m)-5)(n(-m)-3)}{n(-m)-15}$

חקירת המקרה הפרטי, שבוצעה באופן דומה לחקירת הבעיה המקורית, העלתה את הממצאים הבאים:

- החציון של סדרת ערכי n הרשומים בסדר עולה הוא 15, שהינו המחוסר של הדו-איבר $(n-15)$.
- סכום כל זוג מספרים שמקומם סימטרי ביחס לחציון הוא: 30. או: $n(m)+n+(-m)=30=2\cdot 15$
- החציון של סדרת ההפרשים של ערכי n הוא 2.
- איברי סדרת ההפרשים סימטריים ביחס לחציון.
- $x+y=44$

בשלב זה נראה היה שניתן להכליל את הבעיה, ולכן ניסחתי את הבעיה הכללית באופן הבא:

מצאו את כל ערכי n שהופכים $(n-ab)$
מחלק את $(n-a)(n-b)$
כאשר a, b הם מספרים שלמים, $a\geq b$

פתרון:

$$\frac{(n-a)(n-b)}{n-ab}=\frac{n^2-an-bn+ab}{n-ab}=$$

$$=\frac{n^2-(a+b)n-kn+kn+ab}{n-ab}=$$

$$=\frac{n[n-(a+b+k)n]+kn+ab}{n-ab}$$

$n-ab$ מחלק את $n[n-(a+b+k)n]$ אם מתקיים: $a+b+k=ab$

כלומר: $ab-a-b=k$

נתבונן בתבנית המספר: $\frac{kn+ab}{n-ab}$

ונבצע כמו קודם:

$$\frac{kn+ab}{n-ab}=\frac{kn+ab+kab-kab}{n-ab}=\frac{k(n-ab)}{n-ab}+\frac{ab(1+k)}{n-ab}$$

$n-ab$ מחלק את $k(n-ab)$.

כל ערכי n המבוקשים הם פתרונות של המשוואה: $m=\frac{ab(1+k)}{n-ab}$, כלומר: $n=\frac{ab(1+k)}{m}+ab$

הפתרונות המתקבלים הם:

$m=1,b,a,1+k,ab,b(1+k),a(1+k),ab(1+k)$

ובהתאמה נקבל גם את ערכי $-m$. נחשב את ערכי $n(m)$ ו- $n(-m)$:

$$n(m)=abk+2ab\,,a(1+ab-a)\,,b(1+ab-b),$$
$$2ab\,,a+b-1,a+ab\,,b+ab\,,ab+1$$
$$n(-m)=-abk\,,2ab-a(1+ab-a)\ ,2ab-b(1+ab-b)\,,0\,,$$
$$2ab-(a+b-1),-a+ab\,,-b+ab\,,ab-1$$

מתקבל שהחציון של סדרת הנתונים של ערכי n הרשומים בסדר עולה הוא ab:

$$(ab-1+ab+1)/2=ab$$

ובכל אחד מהמקרים הסכום $n(m)+n(-m)=2ab$

בנוסף - החציון של סדרת ההפרשים של ערכי n הוא 2, איברי סדרת ההפרשים סימטריים ביחס לחציון.
נסמן גם כאן:

$$x=\frac{(n(m)-a)(n(m)-b)}{n(m)-ab}$$

$$y=\frac{(n(-m)-a)(n(-m)-b)}{n(m)-ab}$$

ומתקבל: $x+y=2ab+2k$

נשאיר לקוראים להשלים את הפרטים הטכניים החסרים בהוכחת המקרה הכללי.

סיכום

בעיית חילוק רב-איבר בדו-איבר מהווה דוגמה לפעילות חקר וגילוי שניתן לבצע עם תלמידי כיתות ח בנושאים הקשורים לפעולות אלגבריות על תבניות מספר (כינוס איברים דומים, כפל חד-איבר בתבנית מספר, כפל רב-איבר בתבנית מספר, חילק רב-איבר ברב-איבר), ובנושאים הקשורים לפירוק לגורמים, פתרון משוואות, שברים אלגברים (מציאת קבוצת ההצבה של שברים אלגבריים, צמצום שברים אלגבריים). בכיתה ז ניתן לשלב את הפעילות, כאשר לומדים את הנושא של מרחק בין שני מספרים, תוך שימת דגש על תכונות הסדרות שהתקבלו. בעיני רבים מהתלמידים הנושאים הללו נתפשים כטכניים, נושאים שבהם נדרש רק לזהות את האלגוריתם המתאים. הבעיה שהוצגה מהווה דוגמה לבעיה שפתרונה מפתיע. עיסוק בפעילויות מסוג זה יכול לתרום לשינוי הדימוי של המתמטיקה אצל התלמידים ואולי אף לכך שהם יתמידו בחיפוש אחר קשרים והכללות, תוך פיתוח הידע המתמטי שלהם.

על נקודות, ישרים ועקומים אחרים ועל המרחקים שביניהם

יאסר טרביה, מקיף טובא

הבעיה הבאה הינה בעיה שגרתית בגיאומטריה אנליטית:

נתונות שתי נקודות במישור
$A(3,0)$; $B(-3,0)$. מצא את המקום
הגיאומטרי של הנקודות במישור שמרחקן
מהנקודה A גדול פי 2 ממרחקן מהנקודה B.

פתרון: נסמן ב- $C(x,y)$ נקודה המקיימת את התנאי המבוקש. מתקיים:

$$\frac{|AC|^2}{|AB|^2}=\frac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2}=2^2=4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2=4(x^2+6x+9)+4y^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+10x+9=0\Rightarrow(x+5)^2=16$$

התקבלה משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $(-5,0)$ ואורך מחוגו 4 יחידות.

לבעיה הנתונה התכונות הבאות:

1. נתונות שתי נקודות;
2. שיעורי הנקודות הם $A(3,0)$; $B(-3,0)$
3. מחפשים מקום גיאומטרי של נקודות במישור;
4. הנקודות השייכות למקום הגיאומטרי צריכות לקיים $\frac{|AC|}{|AB|}=2$.

את תכונה 1 ניתן לשלול על-ידי כך שהנתון יכלול, למשל, נקודה וישר, שני ישרים, נקודה ועקום כלשהו, שני עקומים מסוגים שונים, ועוד. את תכונה 2 ניתן לשלול על-ידי שינוי שיעורי הנקודות (ניתן לשנות את אחד השיעורים של אחת הנקודות, ולהמשיך באופן מדורג). את תכונה 4 ניתן לשלול בכמה אופנים. ניתן לחפש יחס מרחקים השונה מ- 2, וניתן לחפש קשרים אחרים בין המרחקים (מכפלת המרחקים, סכום המרחקים, הפרש המרחקים, סכום ריבועי המרחקים, ועוד).

נתחיל משלילת תכונה 4, וננסח את השאלה הבאה:

נתונות שתי נקודות במישור
$A(3,0)$; $B(-3,0)$. מצא את המקום
הגיאומטרי של הנקודות במישור שמרחקן
מהנקודה A גדול פי m ממרחקן מהנקודה B.

פתרון:

$$\frac{|AC|^2}{|BC|^2}=\frac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2}=m^2$$

$$x^2-6x+9+y^2=m^2x^2+6m^2x+9m^2+m^2y^2$$

$$(m^2-1)x^2+(6m^2+6)x+(m^2-1)y^2+9(m^2-1)=0$$

$$x^2+\frac{6(m^2+1)}{m^2-1}x+y^2+9=0$$

$$\left[x+\frac{3(m^2+1)}{m^2-1}\right]^2+y^2=-9+\frac{9(m^2+1)^2}{(m^2-1)^2}$$

$$\left[x+\frac{3(m^2+1)}{m^2-1}\right]^2+y^2=\frac{36m^2}{(m^2-1)^2}$$

התקבלה משוואת מעגל שמרכזו בנקודה

$$\left(\frac{-3(m^2+1)}{m^2-1},0\right)$$

ואורך מחוגו: $R=\frac{6m}{|m^2-1|}\quad ;\quad (m\neq\pm1)$

נדגים כעת אפשרות לשלילה של תכונה 1:

נתונה הנקודה $A(3,0)$ והישר $l: x=-3$.
מצא את המקום הגיאומטרי של
הנקודות במישור שמרחקן מהנקודה A
גדול פי 2 ממרחקן מהישר l.

על-פי הגדרות חתכי החרוט בעזרת אקסצנטריות[3], נצפה שתתקבל משוואה של היפרבולה. יחד עם זאת, בעיה זו מספקת הזדמנות לחקור את הקשר שבין יחס המרחקים הנתון לבין משוואתה של ההיפרבולה.

נסמן ב- $C(x,y)$ נקודה המקיימת את התנאי המבוקש. נקבל:

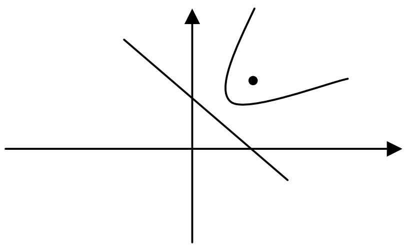
$$\frac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^3}=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+10x-\frac{y^2}{3}+9=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$$

באופן דומה נחקור את המקרים בהם יחס המרחקים הוא גודל כלשהו בין 0 ל-1, ונקבל קשר בין הפרמטרים של משוואת האליפסה לבין שיעורי המוקד ומשוואת המדריך שלה. המקרה של פרבולה הוא פשוט, ומוכר מתוך תכנית הלימודים בגיאומטריה אנליטית.

מובן שניתן להמשיך ולשלול את תכונה 1, כך שהישר l לא יקביל לאחד הצירים. במקרה זה נקבל פרבולה הממוקמת במערכת הצירים, לדוגמא, באופן הבא:



מה יתקבל אם נשלול את תכונה 4, כך שתתקבל הבעיה הבאה:

נתונות שתי נקודות במישור $A(3,0)\ ;\ B(-3,0)$.
מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות
במישור אשר סכום ריבועי מרחקיהן מהנקודות
A ו-B שווה ל- m.

נקבל:

$$|AC|^2+|BC|^2=m$$

$$(x-3)^2+y^2+(x+3)^2+y^2=m$$

$$x^2+y^2=m/2-9$$

קבלנו מעגל שמרכזו בראשית הצירים ואורך מחוגו:
$R=\sqrt{m/2-9}$

הקוראים מוזמנים להכליל את הבעיה לכל שתי נקודות A ו- B.

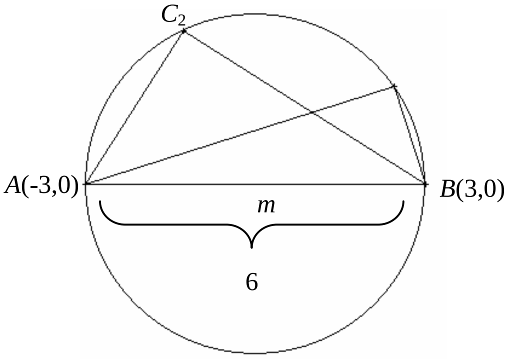
כדאי לשים לב כי המעגל מתקבל רק במקרה בו:

$$m/2-9>0\quad\Leftrightarrow\quad m>18$$

ואם $m=36$ מתקבל מבחינה גיאומטרית המצב הבא:

---

[3] את חתכי החרוט – מעגל, פרבולה, אליפסה והיפרבולה ניתן להגדיר כמקומות גיאומטריים של נקודות במישור, שיחס מרחקיהן מנקודה נתונה (המוקד) לישר נתון (המדריך) הוא קבוע. יחס זה נקרא 'אקסצנטריות', ומסומן באות e. כאשר $0<e<1$ מתקבלת אליפסה, כאשר $e>1$ מתקבלת היפרבולה, כאשר $e=1$ מתקבלת פרבולה, כאשר $e=0$ מתקבל מעגל (להרחבה ר' שריקי ודוד, 2001).



במצב המתואר סכום ריבועי המרחקים של נקודה C כלשהי מהנקודות A ו- B שווה לריבוע המרחק בינהן. כלומר, המשולש ABC הוא משולש ישר זווית. כך הקטע AB מהווה את קוטר המעגל החוסם את המשולש. לכן, הנקודה C נעה על מעגל שמרכזו מונח על אמצע הקטע AB, ואורך מחוגו מחצית מאורך הקטע. מעניין לגלות כי עבור ערכים אחרים של m מתקבלים מעגלים אשר הקטע AB הוא קטע חלקי לקוטרם או גדול ממנו.

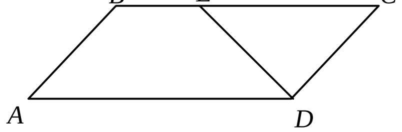
בעיה זו מצביעה על כך שניתן להמשיך ולחקור בכיוונים שונים, ולהעלות שאלות מגוונות המביאות למציאת קשרים מעניינים. ניתן להמשיך ולחקור, למשל, מקרים שבהם מחפשים אחר מקומות גיאומטריים של נקודות המרוחקות מרחק שווה (או יחס מרחקים שונה מ- 1) משני ישרים שונים (מומלץ להתחיל מישרים מאונכים זה לזה). הקוראים מוזמנים להציע שאלות חקר נוספות הקשורות למקומות גיאומטריים, ולנסות למצוא אותם.

מקבילית ומשולש

מהא חאטום, אורט רונסון, דליית אל-כרמל

את הבעיה הבאה ניתן למצוא בספרי גיאומטריה רבים, בפרק העוסק בנושא המקבילית:

נתונה מקבילית ABCD. E היא נקודה על הצלע BC, המחלקת את הצלע ביחס של 1:2 כמתואר בשרטוט. מה ניתן לומר על הקשר שבין שטח המרובע BEDA לבין שטח המשולש ECD?



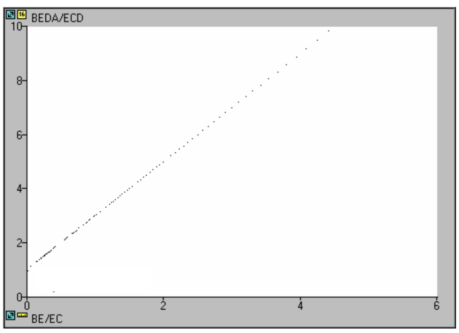
קל להראות ששטח הטרפז כפול משטח המשולש (נסמן $BE = x$. מכאן: $AD = 3x$; $EC = 2x$ הגובה של שני המצולעים זהה).

להלן רשימה של תכונות הבעיה הנתונה:

1. נתון מצולע;
2. המצולע הוא מרובע;
3. המרובע הוא מקבילית;
4. נתונה נקודה על אחת הצלעות;
5. הנקודה מחלקת את הצלע ביחס של 1:2;
6. משרטטים קטע בין הנקודה לבין אחד מקודקודי המקבילית השייך לצלע הנגדית;
7. מחפשים יחס בין שטח הטרפז לבין שטח המשולש.

את תכונה 1 ניתן לשלול על-ידי כך שנתון עקום אחר, כגון – מעגל או פרבולה. שלילת תכונה 2 פירושה שינוי מספר הצלעות של המצולע, ושלילת תכונה 3 פירושה שינוי סוג המרובע. את תכונה 4 ניתן לשלול על ידי שינוי מיקום הנקודה: מחוץ/בתוך המקבילית או על אחד מקודקודיה. התכונה החמישית ניתנת לשלילה על-ידי שינוי יחס החלוקה ל- $m:n$ כלשהו. שלילת תכונה 6 יכולה להתבצע, למשל, על-ידי שרטוט קטע המחבר בין הנקודה לבין נקודה על אחת הצלעות שאינה מכילה אותה. לבסוף, במקום לחשב יחסי שטחים ניתן לחשב, למשל, יחסי היקפים.

בפעילות שלהלן נתמקד תחילה בשלילת התכונה החמישית. כלומר, הנקודה E נעה על הצלע BC, ויוצרת סדרה של משולשים וטרפזים שיש לחשב את היחסים בין השטחים שלהם. החישוב מתבצע בקלות כאשר נעזרים בלומדה של גיאומטריה דינמית. בעזרת הלומדה ניתן גם ליצור גרף המקשר בין יחס השטחים המבוקש לבין יחס האורכים של הקטעים BE/EC. השימוש בגרף מסייע לקבל בו זמנית את הקשר עבור יחסים שונים. הזזת הנקודה E לאורך הצלע BC הניבה את הגרף הבא:



הקשר המתקבל נראה כקשר ליניארי. קשרים ליניאריים הם תמיד, בעיני, קשרים מעניינים ומפתיעים. היות וקל למצוא משוואה של קו ישר, הרי שממצא ויזואלי זה הניע אותי להוכיח את הדברים באופן אלגברי.

נסמן: $EC = a\ ;\ BE = ka\ ;\ AD = (k+1)\,a$

מכאן:

$$S_{EDC} = \frac{ah}{2}\ ;\ S_{BEDA} = \frac{[ka+(k+1)a]h}{2} = \frac{a\,(2k+1)\,h}{2}$$

נקבל שהיחס בין שטח הטרפז לבין שטח המשולש הוא:

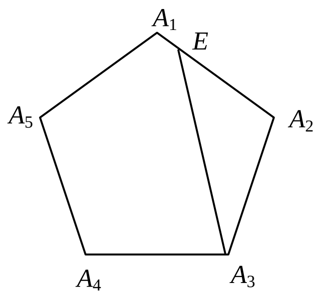
$f(k) = 2k+1$

והוכחנו שהקשר הינו ליניארי.

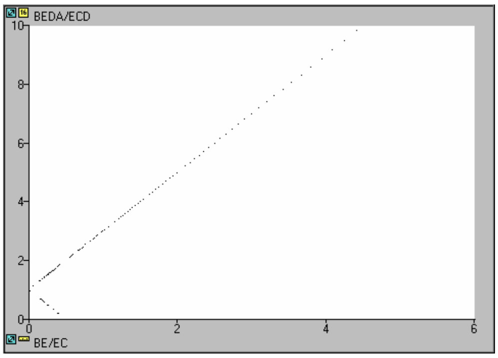
לאחר שקיבלתי ממצא זה, החלטתי לשלול, בנוסף, גם את תכונה 2, ולבדוק מה קורה במצולעים אחרים. למרות שהמקבילית אינה מרובע משוכלל, בחרתי להתמקד במצולעים משוכללים, כדי להקל על התהליך החקירה[4].

להלן נסכים שאת קדקודי המצולע המשוכלל בעל n הצלעות נסמן בעזרת $A_1,...,A_n$, הנקודה E תנוע על הצלע A_1A_2, ונחבר אותה לקודקוד A_3.

כאשר נתון מחומש משוכלל, נקבל משולש ומחומש, כמתואר בשרטוט:



בעזרת הלומדה נבדוק מהו הקשר בין יחס השטחים של המצולעים המתקבלים לבין היחס בין אורכי הקטעים, במקרה של מחומש משוכלל . הקשר שהתקבל מתואר בשרטוט:



כפי שניתן לראות, גם במקרה זה מתקבל קשר ליניארי, מה שמעלה את ההשערה שבכל מקרה שבו נתון מצולע משוכלל בעל n צלעות, $A_1,...,A_n$ ונקודה E נעה על הצלע A_1A_2 מתקבל קשר ליניארי בין יחס שטחי המצולעים המתקבלים (שטח המצולע $EA_3A_4,...,A_nA_1$ ושטח המצולע EA_2A_3) לבין יחס הקטעים $A_1E\,/\,EA_2$.

להלן נוכיח השערה זו:

נסמן ב- a את אורך הקטע A_2E , ב- ka את אורך הקטע A_1E (מכאן שאורך כל אחת מצלעות המצולע המשוכלל היא $(k+1)a$).

נסמן ב- S את שטח המצולע $A_1, A_2,...A_n$, ב- S_1 את שטח המשולש EA_2A_3 וב- S_2 את שטח המצולע $EA_1A_nA_{n-1}...A_3$.

נמצא את היחס $S_2\,/\,S_1$ כפונקציה של k, או את היחס: $(S-S_1)\,/\,S_1$.

היות והמצולע משוכלל, הרי שמידת כל אחת מזוויותיו היא:

$$\angle A_1 = \angle A_2 = ... = \angle A_n = \frac{180°(n-2)}{n} = 180° - \frac{360°}{n}$$

בנוסף:

$$S_1 = \frac{1}{2}a \cdot a(k+1)\cdot \sin(180° - \frac{360°}{n}) =$$
$$= \frac{1}{2}a^2(k+1)\cdot \sin(\frac{360°}{n})$$

וכן:

$$S = \frac{(k+1)^2 \cdot a^2 \cdot n}{4\tan\frac{180°}{n}}$$

מכאן:

[4] מובן שאת הממצא הקודם ניתן להחיל על ריבוע, שהוא מרובע משוכלל, בהיותו מקרה פרטי של מקבילית.

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{S}{S_1}-1=\frac{2(k+1)^2\cdot a^2\cdot n}{4\tan(\frac{180^\circ}{n})a^2(k+1)\cdot\sin(\frac{360^\circ}{n})}-1=$$

$$=\frac{n}{2\tan(\frac{180^\circ}{n})\cdot\sin(\frac{360^\circ}{n})}[k+1]-1=$$

$$=\frac{n}{4\sin^2(\frac{180^\circ}{n})}\cdot[k+1]-1$$

ואכן קבלנו פונקציה של קו ישר. כלומר, הקשר בין היחסים של אורכי הקטעים לבין היחסים של שטחי המצולעים המתקבלים הוא קשר ליניארי.
נשאיר לקוראים לבדוק את המקרה הכללי, שבו המצולעים אינם משוכללים.

סיכום - רפלקציה של המשתלמים

במבט לאחר על התהליך שעברו, התייחסו המשתלמים לשלושה היבטים עיקריים:

1. הקושי הראשוני לעבוד עם מודל לא מוכר ולהעלות שאלות חקר חדשות.
2. ההפתעה שבגילוי עובדות לא מוכרות.
3. הסיפוק המלווה את ההכרה ביכולת האישית לגלות עובדות חדשות.

"כשחושבים על 'גילוי' בתחום המתמטיקה, מקשרים זאת, בדרך-כלל, למתמטיקאי מפורסם או למרצה בכיר באוניברסיטה. מעולם לא חשבתי על כך שאנחנו, כמורים למתמטיקה, יכולים לגלות משהו".
חששות וספקות הינם חלק בלתי נפרד מתהליך של עשייה מתמטית שאינו מוכר. במהלך העבודה על הפרוייקט האישי נשמעו לא פעם אמירות כגון: *"מה אם לא אצליח להגיע לשאלה מעניינת?"*, *"מה אם אגיע לממצאים לא מעניינים?"*, *"מה יקרה אם לא אוכל להסביר את מה שגיליתי?"*, וכד'. בהמשך הפכו חששות אלה לסקרנות גדולה בנוגע לממצאים אפשריים כמו גם לתחושה של *"סיפוק והתלהבות מהתוצאות המפתיעות שגיליתי, אשר הביאו לי בטחון וגאווה"*. עיקר הסיפוק אותו ביטאו המשתלמים נבע מיכולתם לגלות ולהכליל אוסף של ממצאים: *"גיליתי שביכולתו של כל מורה למתמטיקה לעבוד בדרך אחרת, דרך שבה הוא עצמו* מנסח את השאלות, ולא מסתמך רק על שאלות מתוך *הספרים, דרך שבה המורה עצמו חושב על אפשרויות שונות, מעלה השערות, מנסה להוכיח או להפריך אותן, או אף להישאר רק עם השערה שלא מצליחים להוכיחה".*
העבודה על הפרוייקט תרמה גם לשינוי התפיסה של מקצוע המתמטיקה והוראתו בעיני המשתלמים. לדעתם, עבודה בשיטה זו עשויה לתרום להעלאת ההנעה בקרב התלמידים, לפיתוח החשיבה המתמטית ולשינוי הדימוי של המקצוע.
היות והממצאים, כמו גם הדרך שבה יש להוכיח אותם, אינם ידועים מראש, הרי ששיטת החקר והגילוי מסייעת ליצירת חיבור טבעי בין תחומים שונים של המתמטיקה, שלא כמו בשגרת ההוראה, אשר במהלכה מתבצעת הפרדה מלאכותית בין התחומים.
יחד עם זאת, לדעתם, נשארו נקודות פתוחות רבות בהקשר זה, כגון – כיצד ליצור את המסגרת המתאימה לשילוב עבודות של חקר ופרוייקטים אישים? כיצד להעריך את העבודות הללו? כיצד ללוות את התלמידים במהלך עבודתם? ועוד. התייחסות לשאלות אלה דורשת מסגרת נפרדת, אולם אין ספק שהתנסות אישית מהווה תנאי מקדים הכרחי לכך שמורים ישקלו לעבוד עם תלמידיהם בדרך זו.

רשימת ספרות

דוד ח. (2002): הפרבולה כצורה גיאומטרית, *על"ה 29*, עמ' 29-22.

שריקי ע. דוד ח. (2001): הפרבולה וחתכי חרוט אחרים, *"קידמה" – קידום ידע בדידקטיקה ובמתמטיקה, אוגדן למורה*, קשר חם – המרכז הארצי לקידום, שיפור ורענון החינוך המתמטי, הטכניון.

Brown S.I. & Walter M.I. (1990): *The art Of problem posing*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

NCTM (1989): *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, Virginia.

NCTM (1991): *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics.

אתר האינטרנט של ה – NCTM: www.nctm.org