הנושא: **מצא את הטעות**

הוכן ע"י: פיוטר סמובול ומרק אפלבאום.

תקציר: המאמר מציג פתרון שגוי לבעיית ערך קיצון הלקוחה מבחינת בגרות, ובכך מזָמן התמודדות עם קונפליקט. במאמר מוצג גם פתרון הקונפליקט.

מילות מפתח: הוראת המתמטיקה, שגיאות, טעות, אנליזה, חשבון דיפרנציאלי, בעיות מינימום ומקסימום, בעיות קיצון, בעיית מקסימום, נגזרת, טריגונומטריה, פונקציה טריגונומטרית, התרת משולשים, החלפת משתנה, בחינת בגרות.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 30, אביב תשס"ג, 2003, עמודים 45-47.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

ale30-7

מצא את הטעות

פיוטר סמובול
אוניברסיטת בן-גוריון בנגב, באר-שבע

מרק אפלבאום
המכללה לחינוך ע״ש קיי, באר-שבע

מבוא

מציאת טעות בפתרון תרגיל היא משימה לא קלה, בודאי לא לתלמידים. משימה כזו היא כמעט בלתי אפשרית במקרים בהם הטעות נובעת מכשל בהבנה.

התנסות במציאת טעויות יכולה לתרום להעמקת ההבנה של החומר הנלמד כמו גם לפיתוח חשיבה ביקורתית. אי לכך אנו ממליצים לשלב בהוראה משימות של חיפוש טעויות ב'פתרונות' (שגויים) מוכנים מראש. אנו משתמשים בתרגילים 'פתורים' ממבחני בגרות, בהם מוסתרת טעות, הגורמת לקונפליקט קוגניטיבי. במאמר שלפניכם דוגמה למשימה מסוג זה.

נציין שבעבודתנו אנו משלבים גם פתרונות נכונים וגם פתרונות שגויים. למעשה, אנו מציגים לתלמידים מספר משימות בתרגיל אחד:

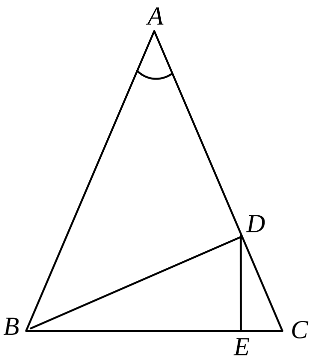
א) לבדוק האם יש טעות בפתרון,
ב) אם נמצאה טעות - לתקן את הטעות,
ג) להסביר את מקורה של הטעות,
ד) להכין המלצות לתלמידים אחרים,
ה) אם אין טעות בפתרון, יש להציע דרך אחרת לפתרון.

המשימה

נא לבדוק את הפתרון הבא לבעיה (מס' 6) שהופיעה בבחינת בגרות של קיץ תשנ״ז:

נתון משולש שווה שוקיים ABC. BD הוא הגובה לשוק AC ו- ED הוא אנך לבסיס BC. x הוא גודל הזווית BAC $(\measuredangle BAC = x)$. אורך השוק של המשולש הוא a.

מה צריך להיות הערך של x כדי שאורך הקטע BE יהיה מקסימלי? (אינך חייב למצוא את הערך של x, די שתמצא את ערכה של פונקציה טריגונומטרית שלה.)



איור 1

פתרון:

$$\Delta ABC: \quad BD = a\cdot\sin x$$

$$\measuredangle DBE = \frac{\pi - x}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{x}{2}$$

$$DE = DB\cdot\sin x/2, DE = a\cdot\sin x\cdot\sin x/2$$

נתבונן בפונקציה:

$$\begin{cases} y = \sin\cdot x\cdot\sin x/2 \\ 0 < x < \pi \end{cases}$$

נמצא עבור אילו ערכי x, $0 < x < \pi$, היא מקבלת ערך מקסימלי. נשתמש באלגוריתם ידוע ונקבל:

$$y'(x) = \cos x\cdot\sin x/2 + 1/2\sin x\cdot\cos x/2$$

$$y'(x) = \cos x\cdot\sin x/2 + \sin x/2\cdot\cos^2 x/2$$

$$y'(x) = \left(\cos x + \cos^2 x/2\right)\cdot\sin x/2 =$$

$$= \left(3\cdot\cos^2 x/2 - 1\right)\cdot\sin x/2$$

כעת אם:

$$(0 < x < \pi) \Leftrightarrow (0 < x/2 < \pi/2) \Rightarrow (\sin x/2 > 0)$$

לכן האפסים והסימנים של $y'(x)$ תלויים אך ורק באפסים ובסימנים של הביטוי:

$$A=\left(3\cdot\cos^2 x/2-1\right)$$

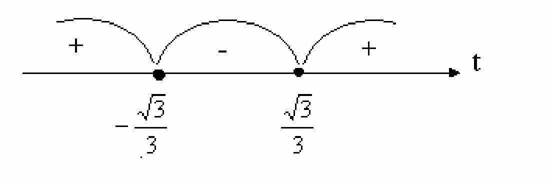
נסמן $t=\cos x/2$. מכאן, אחרי הצבה, נקבל:

$$A=\left(3\cdot\cos^2 x/2-1\right)=3\cdot t^2-1$$

$$(y'(x)=0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(t^2=\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(t_1=\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(t_2=\cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$



איור 2

באיור 2 אנו רואים את הסימנים של הנגזרת של הפונקציה לפי משתנה t.

מכאן בנקודה $t_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ לפונקציה ישנה נקודת מקסימום מקומי. במקרה זה:

$$\left(\cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\Leftrightarrow(x=\alpha\approx 4.37rad)$$

וזה נוגד את תנאי השאלה.

כאשר $x=\beta\approx1.91(rad)$ אנו מקבלים נקודת מינימום מקומי של הפונקציה:

$$\begin{cases} y=\sin x\cdot\sin x/2 \\ 0<x<\pi \end{cases},$$

שגם זה נוגד את תנאי השאלה.

בדיקה על-ידי שימוש בנגזרת שנייה:

$$y'(x)=f(t)=(3\cdot t^2-1)$$

$$\begin{cases} y''(x)=f'(t)=(3\cdot t^2-1)'=6\cdot t>0 \\ t=\cos\frac{x}{2}>0 \\ 0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

כלומר ב- $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ יש נקודת מינימום!

גם עובדה זו מצביעה על כך שאין ערך של x בתחום, הפותר את הבעיה.

בהצלחה במציאת הטעות!

דיון

מציאת הטעות לא הייתה משימה קלה לתלמידים. חלקם העירו כי, אם ישנה טעות, היא 'מוסתרת' בהחלפת המשתנה $t=\cos\frac{x}{2}$, בודדים המשיכו והגיעו למסקנות: כיוון שהפונקציה $y=\cos x/2$ יורדת עבור $0<x<\pi$ אז עבור $t>t_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$ נקבל שהנגזרת של הפונקציה:

$$\begin{cases} y=\sin x\cdot\sin y=\cos x/2 \\ 0<x<\pi \end{cases}$$

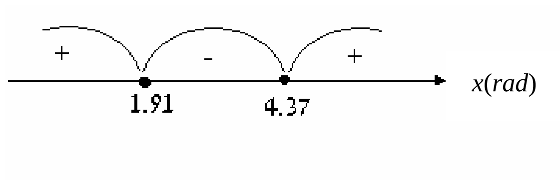
היא אכן חיובית. אך במסגרת של תחום הקיום של הפתרון, זה מתאים לערך של x, $x<\beta\approx1.91(rad)$.

מכאן נקבל:

א) עבור: $x<\beta\approx1.91(rad)$
הפונקציה: $\begin{cases} y=\sin x\cdot\sin x/2 \\ 0<x<\pi \end{cases}$ עולה.

ב) עבור: $x>\beta\approx1.91(rad)$
הפונקציה: $\begin{cases} y=\sin x\cdot\sin x/2 \\ 0<x<\pi \end{cases}$ יורדת.

ג) עבור: $x=\beta\approx1.91(rad)$ לפונקציה יש נקודת מקסימום מקומי.



איור 3

ובזה פתרנו את הבעיה.

הטעות נבעה מכך שהפונקציה $y=\cos x/2$, אשר ירדה בתחום $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$, הוחלפה בפונקציה $y=t$ עולה באותו תחום.

בבדיקה ע"י נגזרת שנייה נפלה טעות נוספת, הקשורה לנגזרת של פונקציה מורכבת.

נכון היה:

$$\begin{cases} y''(x) = f'(t)\cdot t'_x = \\ \quad = (3\cdot t^2 - 1)'\cdot\left(-\sin\dfrac{x}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2} = 3\cdot t\cdot\left(-\sin\dfrac{x}{2}\right) < 0 \\ t = \cos\dfrac{x}{2} > 0, \\ 0 < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

מסקנה

אם במהלך פתרון בעיה מתבצעת החלפת משתנה, יש לנסח את הבעיה מחדש בהתאם לשינוים (תחום ההגדרה, תחומי העלייה והירידה וכו').
במקרה שלנו ניסוח חדש ייראה כך:

$$\begin{cases} y = \sin x\cdot\sin\dfrac{x}{2} = 2\cdot\sin^2\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2} = \\ = 2\cdot\left(1-\cos^2\dfrac{x}{2}\right)\cdot\cos\dfrac{x}{2} = 2\cdot\left(t-t^3\right) \\ 0 < x < \pi \\ t = \cos\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

ויש למצוא עבור אילו ערכי t הפונקציה מקבלת ערך מקסימלי.

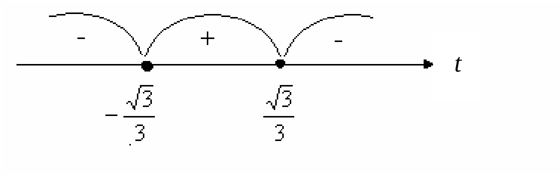
מכאן

$$g'(t) = 1 - 3\cdot t^2$$

ונקודות הקיצון תהיינה: $(\max)\ t_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ו- $(\min)\ t_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ערך זה אינו מתאים לתנאי הבעיה.

כלומר: $t_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \cos\dfrac{x}{2}$ היא נקודת מקסימום.



איור 4

סיכום

ניסיוננו הרב בשיטת העבודה שתיארנו לעיל, מאפשר לנו להעלות את ההשערה הבאה: עבודה מסוג זה תורמת רבות לפיתוח תלמיד חוקר עצמאי, מעוררת מוטיבציה, נותנת הזדמנות נהדרת לתלמידים להשתתף בדיון, לבסס ולנמק את טענותיהם, ולהיות קפדניים באיסוף הטעויות וניתוחן. כמו כן, שימוש בשיטת עבודה זו יכול לתמוך במניעת חזרה על טעויות דומות בעתיד.