הנושא: **פרישת גליל קטום**

הוכן ע"י: רוזה לייקין.

תקציר: במאמר מזמינה המחברת את הקוראים למצוא את העקום התוחם פריסה של גליל קטום ומציעה חמש דרכים שונות לפתרון הבעיה.

מילות מפתח: הנדסה, גיאומטריה, גיאומטריית המרחב, גליל, גליל קטום, מעטפת, משיק, מערכת צירים.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 31, תשס"ד 2004, עמודים 69-66.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 4 עמודים.

בעיה לענין

פרישת גליל קטום

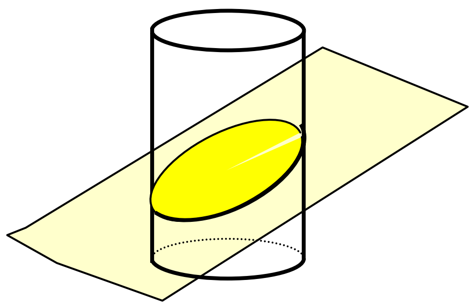
רוזה לייקין
הפקולטה לחינוך אוניברסיטת חיפה

במאמר מוצגת משימה ופתרונות לה. אני מזמינה אתכם, הקוראים, לפתור אותה בדרכים שונות ככל שתוכלו לפני שתמשיכו בקריאת המאמר. שלושה מהפתרונות, המופיעים במאמר הם פתרונות פורמאליים, המבוססים על כלים מתמטיים. שני הפתרונות האחרים שונים מהם. המשימה ניתנת לפתרון על ידי ילדים בגילאים שונים, אך היא מהווה אתגר גם למבוגרים. ילדים והוריהם יכולים לעסוק בה יחדיו ולהציע פתרונות יצירתיים.

אציין כי הפתרונות המובאים להלן לא כוללים את כל ההסברים הדרושים להוכחות מתמטיות פורמאליות, אלא מציגים רק את השלבים העיקריים.

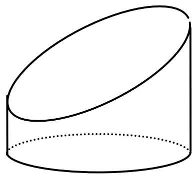
משימה

גליל ישר נחתך על ידי מישור משופע כמתואר בציור 1א. יש לצייר את פרישת הגליל הקטום המופיע בציור 1ב.



ציור 1א

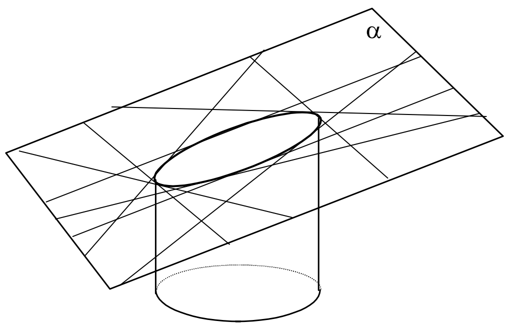
פרישת גליל ישר היא מלבן. לכן החלק התחתון של פרישת הגליל הקטום הוא חלק של מלבן. הבעיה העיקרית היא לאפיין את הקו העליון של הפרישה.



ציור 1ב

פתרון 1: גיאומטריה במרחב

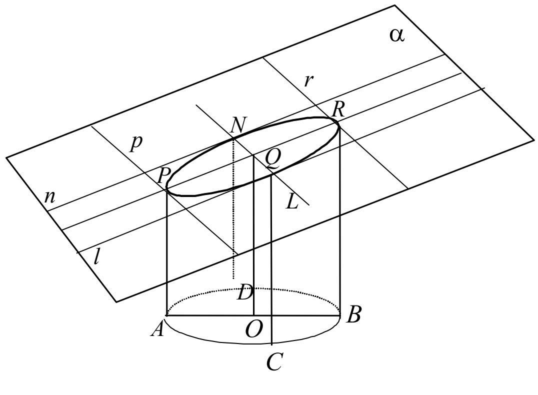
א. העקום התוחם את השפה העליונה של הגליל הקטום הוא אליפסה, לכן המשיקים למעטפת של הגליל הקטום המונחים במישור החותך α הם משיקים לאליפסה (ציור 2).



ציור 2

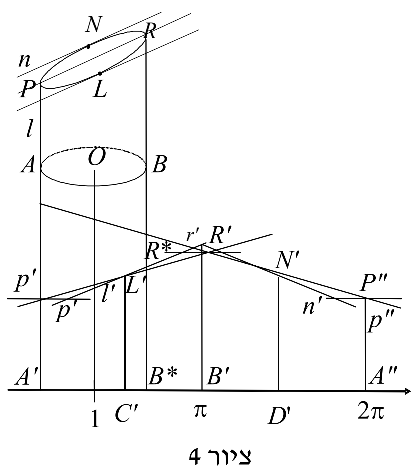
ב. נסמן ב- PR את ציר הסימטריה הארוך של האליפסה וב- NL את ציר הסימטריה הקצר שלה. ארבעה משיקים $(p,\ r,\ n,\ l)$ מתוך אלה שתוארו לעיל, עוברים דרך קצות צירי הסימטריה P,R,N,L בהתאמה. המשיקים: p ו- r מקבילים ל-NL, ולכן מקבילים לבסיס הגליל. המשיקים: n ו-l מקבילים ל- PR, ולכן השיפועים שלהם שווים

לשיפוע של המישור החותך α ביחס למישור הבסיס (ציור 3).



ציור 3

ג. נבנה את הפרישה של המעטפת. 'נפתח' את המעטפת לאורך הקטע AP. הנקודה P שעל הבסיס העליון של הגליל הקטום היא הקרובה ביותר לבסיסו התחתון של הגליל (הנקודה הנמוכה ביותר). נסמן על פרישת המעטפת את הקטע $A'A''$ המתאים להיקף הבסיס התחתון של הגליל. למען הנוחיות נצייר את הקטע במאוזן. הנקודות P' ו- P'' שעל הפרישה מתאימות לנקודה P שעל המעטפת. הנקודות A' ו- A'' שעל הפרישה מתאימות לנקודה A שעל המעטפת. הנקודות R', B', L', C', D' ו- N' שעל הפרישה מתאימות לנקודות R, B, L, C, D ו- N שעל הגליל הקטום. הגליל הקטום הינו סימטרי ביחס למישור PRA. פתחנו את המעטפת לאורך הקטע AP, ולכן הפרישה סימטרית ביחס לישר הכולל את הקטע $R'B'$ (ציור 4).



ציור 4

ד. אורך הקטע $A'A''$: ללא הגבלת הכלליות נניח כי אורך המחוג של בבסיס התחתון של הגליל שווה ליחידת אורך אחת. במקרה זה אורך הקטע $A'A''$ שווה ל- 2π יחידות אורך.

סימונים: B' היא נקודת האמצע של הקטע $A'A''$. הנקודה C' היא נקודת האמצע של הקטע $A'B'$ והנקודה D היא נקודת האמצע של קטע $A''B'$.

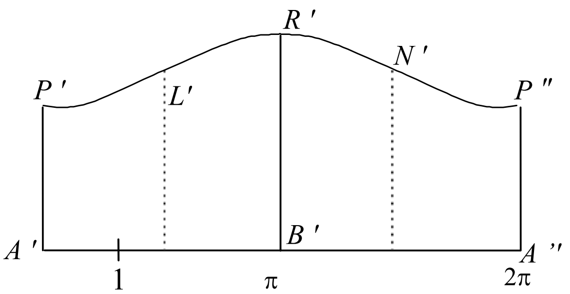
אורכי הקטעים האנכיים:

$$C'L' = D'N' = (A'P' + B'R')/2,$$
$$A'P' = A''P'' = AP, \quad B'R' = BR$$

שיפועים – על פי סעיף ב לעיל: הישרים p ו-r מקבילים לבסיס הגליל. לכן הישרים: p', p'' ו- r', שהם משיקים לפרישת הגליל בנקודות המתאימות, הם ישרים מאוזנים, המקבילים ל- $A'A''$.

המשיקים n ו-l מקבילים למישור החותך α. $A'B' = AB$, ו- $B'R' = BR$. השיפוע של הקטע $P'R'$ מגדיר את שיפועו של העקום העליון של הפרישה. הנקודה L' $(l' \| P'R')$ סימטרית ל- N' ביחס ל- $B'R'$ לכן n' סימטרי ל- l' ביחס ל- $B'R'$ (ציור 4).

ציור 5 מציג את תוצאת הבניה:



ציור 5

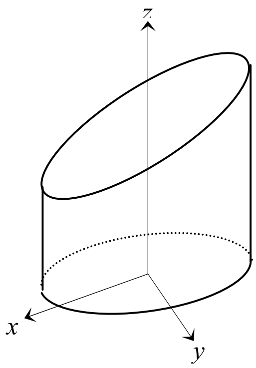
פתרון 2: גיאומטריה אנליטית במרחב, פונקציות

א. נמקם את הגליל הקטום במערכת צירים (ציור 6): נניח, ללא הגבלת הכלליות, כי משוואת המעטפת של הגליל הישר היא $x^2+y^2=1$ ומשוואת המישור החותך היא $Ax+z+C=0$ עבור $A \neq 0$.

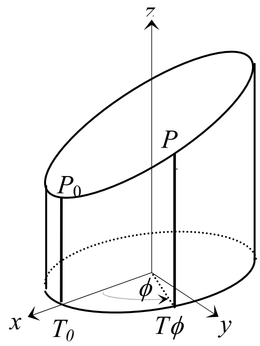
ב. נסמן ב- T_0 את הנקודה על ציר ה-x השייכת למעטפת, ב- ϕ היא זווית הסיבוב של נקודה שעל המעגל התוחם את בסיסו התחתון של הגליל וב-

T_ϕ את הנקודה המתאימה לזווית זו. כך הנקודה T_ϕ היא: $(\cos\phi, \sin\phi, 0)$ (ציור 7). נסמן ב- P_ϕ את הנקודה הנמצאת 'מעלי' T_ϕ על קו החיתוך של הגליל עם המישור α. שיעורי נקודה זו הם: $(\cos\phi, \sin\phi, C-A\cos\phi)$ P_ϕ.

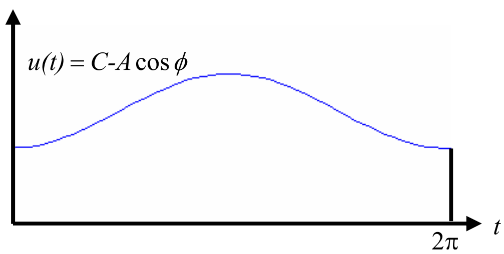
ג. נסמן את אורך הקשת $T_0\,T_\phi$ ב-t. על מעגל היחידה מתקיים: $\phi = t$. העקום העליון של הפרישה הינו פונקציה המבטאת את אורך הקטע $T_tP_t = T_\phi P_\phi$ כתלות ב-t: $u(t) = T_tP_t$.
נבנה את פרישת המעטפת של הגליל הקטום במערכת צירים מישורית (t, u). מסעיף ב נובע כי עבור $t \in [0;2\pi]$ מתקיים:
$u(t) = C - A\cos t$ (ציור 8).



שרטוט 6



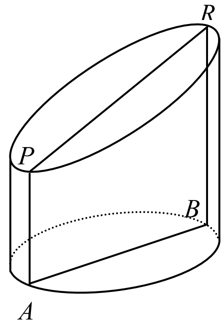
שרטוט 7



שרטוט 8

פתרון 3: גיאומטריה פרוייקטיבית, פונקציות

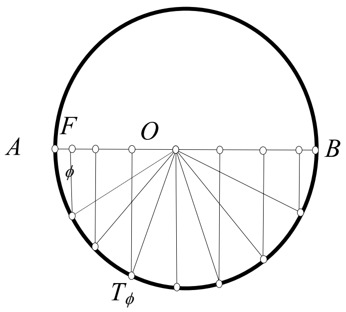
נתבונן בשני היטלים של הגליל הקטום:
האחד – מעגל – הוא ההיטל בכיוון המקביל. השני – טרפז – הוא ההיטל בכיוון המאונך למישור APB, כאשר P היא הנקודה על הבסיס העליון של הגליל הקטום הקרובה ביותר לבסיסו (ציור 9).



ציור 9

נתבונן בהיטל הראשון (ציור 10):
ללא הגבלת הכלליות נניח כי המעגל הוא מעגל היחידה. נסמן ב- T_ϕ את הנקודה המתקבלת מסיבוב הנקודה A בזווית ϕ על המעגל התוחם את הבסיס התחתון של הגליל, כלומר סביב ההיטל המעגלי. נסמן ב- F_ϕ את ההיטל של T_ϕ על AB.
המרחק AF_ϕ הוא פונקציה של הזווית ϕ:

$$AF_\phi = 1-\cos\phi$$

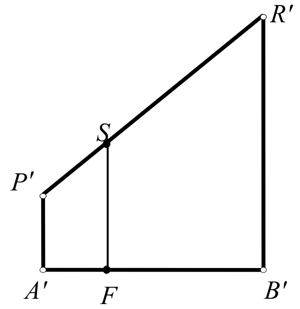


ציור 10

נתבונן בהיטל השני (ציור 11):
נסמן ב- F נקודה על $A'B'$ (ההיטל של AB) וב- S את הנקודה 'המתאימה' לה על $P'R'$. אם שיפוע המישור החותך הוא a, אז אורך הקטע FS הוא פונקציה של המרחק $A'F$.

נסמן: $A'F = x \quad ; \quad A'P' = b$

אז: $FS(x) = ax + b$

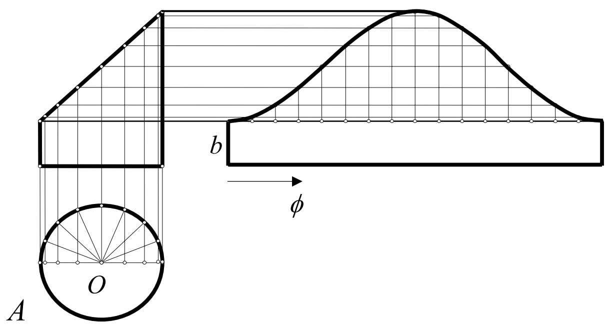


ציור 11

העקום העליון של פריסת הגליל הקטום הוא הגרף של ההרכבה של שתי הפונקציות: AF_{ϕ} ו- $FS(x)$ (ציור 12).

משוואת הקו העליון של המעטפת היא:

$a(1-\cos\phi)+b$ או $(a+b)-a\cdot\cos\phi$



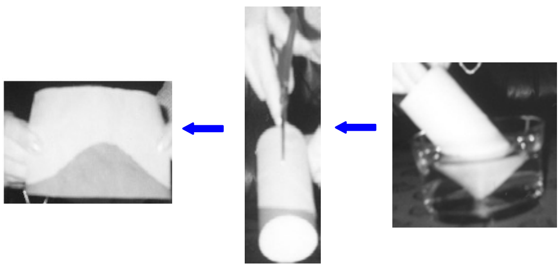
ציור 12

פתרון 4: לא פורמאלי

עיטפו נר (עבה) בנייר. חיתכו את הנר יחד עם הנייר בחתך מישורי משופע. פיתחו את פריסת הנייר. התוצאה היא כמובן פרישת המעטפת של הגליל הקטום.

פתרון 5: עוד פתרון לא פורמאלי

בנו מקרטון גליל ישר. הקפידו לבחור קרטון שאינו סופג את המים במהירות. (ניתן להשתמש, למשל, בגליל שנשאר ממגבות נייר). הכניסו את הגליל לקערה עם מים 'באופן משופע' ביחס למישור פני המים. הוציאו את הגליל מהמים ופירשו אותו. הקו המפריד בין החלק הרטוב של המעטפת לבין החלק היבש שלה הוא הקו העליון של פרישת הגליל הקטום.



ציור 13

על הקשרים וההבדלים בין הפתרונות

לאנשים שונים סגנונות חשיבה שונים והעדפות שונות בפתרון של בעיות מתמטיות. יש כאלה שמעדיפים כלים גיאומטריים ויש כאלה שמעדיפים כלים אלגבריים. חשיפה לפתרונות שונים מרחיבה אופקים ומקשרת בין תחומים שונים במתמטיקה. כך, על ידי קישור בין פתרון גיאומטרי (פתרון 1) לבין פתרונות אנליטיים, שהוצגו במאמר זה, ניתן לגלות תכונות של פונקציות טריגונומטריות (sin ו-cos) כמו למשל: שיפוע הגרף בנקודות קיצון ונקודות פיתול של הפונקציה, זאת ללא שימוש בנגזרת. על ידי השוואה בין פתרונות 2 ו-3 ניתן לראות כיצד בעיה מרחבית ניתנת לפתרון 'מישורי', כלומר מתאפשר קישור בין גיאומטריה אנליטית במרחב לבין גיאומטריה אנליטית במישור. פתרון לא פורמאלי מציג כיצד ניתן ליצור את הגרפים של הפונקציות סינוס וקוסינוס בחיי היום-יום. אם תכניסו את גליל הקרטון למים בזווית של 45 מעלות ביחס לפני המים או תחתכו את הנר בחתך בעל שיפוע של 45 מעלות ביחס לבסיס, תקבלו תבנית של הגרפים.