# הנושא: "הוכחות" שקופות
# Transparent P-Proofs

הוכן ע"י: נצה מובשוביץ-הדר.

תקציר: במאמר מציגה המחברת את יתרונותיהן הדידקטיים של "הוכחות שקופות" – הוכחות המטפלות במקרים פרטיים באופן הניתן להכללה ברורה.

מילות מפתח: הוכחה, הוכחות, הוכחה שקופה, הוכחה ישירה, הוכחה על-ידי הבאה לסתירה, משפט, משפטים, משפטי תכונה, משפטי קיום, משפטי יחידות, משפטים אוניברסאליים, מספר ראשוני, אינדוקציה מתמטית, מספר זוגי, מספר אי-זוגי, חזקות.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 31, תשס"ד 2004, עמודים 29-35.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 7 עמודים.

ale31-6

# "הוכחות" שקופות

## Transparent P-Proofs

**פרופ' נצה מובשוביץ-הדר**[1]
הטכניון, חיפה

**השערות ומשפטים במתמטיקה**

השערה והוכחה הן שני עמודי התווך שעליהם נשענת המתמטיקה.

השערה שהוכחה, נקראת כידוע משפט או טענת-אמת.

השערה שהופרכה נקראת כידוע טענת-שקר.

יש כמובן השערות רבות, שעדיין איננו יודעים להוכיחן ואף לא להפריכן. מספרן, יש אומרים, גדול ממספר ההשערות שכבר הוכחו והופרכו גם יחד. אלה נותנות תעסוקה מלאה לקהיליית המתמטיקאים שעל-פי מקצועה היא קהילייה המייצרת השערות מתמטיות וטורחת להוכיח אותן או להפריכן.

יש כמובן משפטים מתמטיים רבים ושונים. ברמה העקרונית ניתן למיין אותם לארבעה סוגים שאותם אפרט מיד: משפטי תכונה, משפטי קיום, משפטי יחידות ומשפטים אוניברסליים.

יש גם הוכחות רבות ושונות וסביבן די הרבה מבוכה בשאלת ההקניה שלהן לדור הצעיר. על כך נרחיב בהמשך.

1. <u>משפטי תכונה</u>

אלה הם משפטים הקובעים שלעצם מסוים יש תכונה מסוימת.

לדוגמא: $2^{2976221}-1$ הוא מספר מֶרסֶן בעל 895,932 ספרות[2].

מספר זה שנמצא על-ידי גורדון ספנס (Gordon Spence) ואושר על-ידי דוד סלובינסקי (David Slowinski), בקיץ 1997 הוא אחד האחרונים שהתגלה[3].

2. <u>משפטי-קיום</u>

אלה הם משפטים הטוענים שקיים לפחות עצם מתמטי אחד בעל תכונה מסוימת.

לדוגמא:

קיימת מפה שאפשר לצבוע אותה בשני צבעים בלבד, כך שכל שתי מדינות בעלות קו-גבול משותף יהיו צבועות בשני צבעים שונים (אף כי לא כל מפה ניתנת לצביעה בשני צבעים בלבד).

דרך טובה כדי להוכיח משפט קיום היא להצביע על עצם בעל התכונה או לבנות אותו. במקרה שלנו: לוח השחמט הוא דוגמא טובה.

אגב, יש דוגמאות רבות אחרות. העובדה שיש יותר מעצם אחד בעל התכונה איננה סותרת כמובן את טענת הקיום, שהרי אם קיימים שניים, אז אחד בודאי קיים. הדרך של מציאת העצם או בנייתו והוכחת קיומו על ידי הצבעה עליו, נקראת *הוכחה קונסטרוקטיבית*. הוכחה בונה או בלועזית instantiation.

---

[1] מאמר זה נשען על הרצאה שניתנה בכנס השנתי של איגוד המורים למתמטיקה בישראל בשנת 1997

[2] מספר מרסן הוא מספר ראשוני בעל הצורה $2^n-1$ כאשר $n$ עצמו גם הוא מספר ראשוני. המספרים הראשוניים $2^2-1, 2^3-1, 2^5-1, 2^7-1$ הם מספרי מרסן. לא כל המספרים בעלי הצורה הנ"ל הם ראשוניים. עד היום ידועים פחות מ-40 מספרי מרסן אבל לא ידוע אם יש מספר סופי או אינסופי של מספרי מרסן. גילוי של מספר מרסן חדש הוא חדשה מרעישה בקהילייה המתמטית. מספר מרסן נקראים על שמו של הנזיר הצרפתי Marin Mersenne, שהיה תיאולוג, פילוסוף ומתמטיקאי וחי בין השנים 1468-1588. הודות לנסיעותיו הרבות הוא שימש בימיו כ'קו תקשורת' בין מלומדים אירופאים כמו דקארט, גליליי, פרמה, פסקל והיגנס.

[3] מספר מרסן הגדול ביותר הידוע הנכון לינואר 2002 הוא $2^{13466917}-1$. הוא נמצא בנובמבר 2001 על-ידי מיכאל קמרון, סטודנט קנדי, אחד מ- 120,000 אנשים פרטיים המעורבים ב- GIMPS:the great internet Mersenne Prime Search. מידע נוסף נמצא באתר: www.utm.edu/research/primes

מעניין לציין שכדי להוכיח קיום *לא מוכרחים* להצביע על העצם. לפעמים אפילו לא ניתן להצביע עליו ובכל זאת ניתן להוכיח שהוא קיים. זאת כמובן *איננה* הוכחה קונסטרוקטיבית, אלא הוכחה בדרכים עקיפות המבטיחות את קיומו של עצם כנדרש מבלי שניתן להצביע על דוגמא.

למשל: אנחנו יודעים שקיים מספר ראשוני אחד לפחות שהצגתו בבסיס 10 כמקובל היא בעלת מיליון ספרות לפחות, למרות שאיננו יודעים להצביע אפילו על אחד כזה (עדיין...).

איך אנחנו יודעים את זה? - מתוך כך שאנחנו יודעים להוכיח, מעל לכל צל של ספק, שאין מספר ראשוני גדול ביותר, ולכן יש מספרים ראשוניים גדולים מאד ככל שיד הדמיון מרשה לנו להעלותם על דעתנו. לא רק בעלי יותר ממיליון ספרות, אלא אפילו בעלי למעלה מעשרה מיליון, ממאה מיליון, ... ממיליארד ספרות וגם יותר.

ההוכחה של הטענה שאין מספר ראשוני גדול ביותר, היא לטעמי מהיפות שבהוכחות במתמטיקה אלמנטארית.

ננסה להבין את הרעיון המרכזי בהוכחה הזאת.

ברור שעלינו לבנותה על הסכמה בדבר ההגדרה של מספר ראשוני ועל אי אלו אמיתות מתמטיות שיש להוכיחן באופן בלתי תלוי, כגון העובדה שכל מספר שלם חיובי גדול מ-1 הוא או ראשוני בעצמו או שהוא מתחלק במספר ראשוני.

נניח שיש מספר ראשוני הכי גדול ונראה לאן ההנחה הזאת מובילה אותנו. נניח למשל שהמספר הראשוני הכי גדול הוא 19. כלומר יש בדיוק שמונה מספרים ראשוניים, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ומעל עשרים אין אף לא מספר ראשוני אחד.

נישאר צמודים להנחתנו, גם אם אנחנו לא משוכנעים בנכונותה. מכאן ואילך נעשה אך ורק צעדים שנובעים ממנה ואין לנו כל ספק בנכונותם.

נבנה את המכפלה של כל הראשוניים הקיימים על-פי ההנחה:

$$2\times3\times5\times7\times11\times13\times17\times19$$

נוסיף למכפלה הזאת 1. המספר שהתקבל הוא:

$$2\times3\times5\times7\times11\times13\times17\times19+1=9{,}699{,}691$$

זהו מספר די גדול, בודאי גדול מעשרים, לכן לפי הנחתנו *הוא לא ראשוני*. מכאן שעליו להתחלק באחד המספרים הראשוניים. אבל הוא לא מתחלק באף אחד מהם, כי מנת החילוק שלו בכל אחד מהם משאירה שארית 1. מכאן נובע לפי ההגדרה, *שהוא מספר ראשוני*.

מתוך ההנחה, קיבלנו איפוא מספר שהוא גם ראשוני וגם לא ראשוני. זהו מצב אבסורדי שהמתמטיקה איננה סובלת. הדרך היחידה למנוע את קיומו היא להימנע מההנחה שהובילה אליו, כלומר להניח שיש מספר ראשוני אחד לפחות מעל 20.

הערה: אסור למהר ולהניח ש- 9,699,691 הוא ראשוני! דרך אגב, הוא לא ראשוני (הוא מתחלק ב-347 והמנה היא 27,953).

הואיל ואנחנו מכירים בכך ש-23 הוא מספר ראשוני - אולי 23 הוא הכי גדול? ואם לא הוא, אולי בכל זאת קיים מספר ראשוני הכי גדול כלומר קיים מספר שמעליו כל המספרים הם פריקים? זוהי השערה שיש לה אחיזה, שהרי ככל שהולכים המספרים וגדלים יש מתחתם מספר גדל והולך של מועמדים להיות מחלקים שלהם. לגמרי הגיוני לשער שממקום מסוים ואילך כבר אי אפשר למצוא אף מספר ראשוני. בעצם, די מפתיע שזה פשוט לא נכון. היה נוח מאד לו יכולנו להצביע על דרך דטרמיניסטית לבנות מספר ראשוני שגדול יותר ממספר כלשהו $n$. אבל למרבית הפלא אין כזאת.

*אין הוכחה קונסטרוקטיבית לטענה שיש מספר ראשוני גדול מכל מספר נתון.*

ההוכחה המלאה לטענה זאת, השקולה כמובן לטענה שיש מספר אינסופי של ראשוניים, היא בעקיפין על-ידי הבאה לסתירה, בדומה מאד לסתירה שאליה הגענו כשהנחנו שאין מספר ראשוני מעל עשרים.

הוכחה על-ידי הבאה לסתירה, הנקראת בלטינית reductio ad absurdum או כפי שאנחנו נוהגים לקרוא לה בארץ "הוכחה על דרך השלילה" (שם לא מוצלח במיוחד, וחבל) היא אחת השיטות שעוררו מחלוקת קשה בין המתמטיקאים במאה שעברה. היו כאלה שלא היו מוכנים להכיר בה כשיטה תקפה.

הוכחה על-ידי הבאה לסתירה היא אחת השיטות להוכחה הקשות ביותר לתפיסה בקרב תלמידים חסרי ניסיון מתמטי, אולי הקשה מכולן.

האם ה'הוכחה' שהבאנו, בהיותה שקופה במובן שיוסבר בהמשך, יכולה לסייע בידי תלמידי תיכון להבין ואולי אפילו לחבר בעצמם את ההוכחה המלאה? זוהי השאלה שחיפשתי לה תשובה ויצאתי לבדוק אותה. ההנחה שלי

היתה שחשוב מאד למצוא דרך להביא תלמידי תיכון להבנתן של הוכחות מתוך קריאתן או מתוך הקשבה להצגתן, וחשוב לא פחות לפתח אצלם את היכולת לחבר הוכחות ולהעלותן על הכתב בצורה מסודרת ומשכנעת כמקובל. הקוראים המכירים את ההוכחה המלאה למשפט זה יבינו כבר כאן שה׳הוכחה׳ שניתנה לעיל היא ׳שקופה׳ במובן זה שאפשר לראות מבעדה את ההוכחה המלאה, היות שהיא עוקבת צעד צעד אחרי ההוכחה המלאה. אבל במקום להניח על דרך השלילה שקיים מספר ראשוני *כלשהו* שהוא הגדול ביותר, ההנחה ב׳הוכחה׳ שניתנה היא קונקרטית יותר ומתייחסת למספר ראשוני *מסוים ומוכר*. מספר זה נבחר בכוונה כך שיהיה די קטן כדי שכל קודמיו יהיו גם הם בתחום המוכר לתלמיד, אף כי לא קטן מדי כדי שהמכפלה שלו בכל קודמיו תהיה מספר שראשוניותו או אי-ראשוניותו של המספר הקודם לה היא שאלה שהתשובה עליה איננה טריביאלית.

בהמשך נחזור לענין האומנות הדידאקטית הכרוכה בבניית הוכחה שקופה.

עד כאן ראינו שני סוגים של משפטים מתמטיים: משפטי תכונה ומשפטי קיום.

3. <u>משפטי-יחידות</u>

אלה הם משפטים הטוענים שיש *לכל היותר* עצם מתמטי אחד בעל תכונה מסוימת;

לדוגמא:

למערכת של שתי משוואות ליניאריות בלתי תלויות בשני נעלמים יש לכל היותר פתרון אחד.

או, השקול הגיאומטרי: לשני ישרים שונים במישור יש לכל היותר נקודה אחת משותפת.

משפטים אלה אמנם טוענים ליחידות אבל הם בעצם שייכים למשפחה הבאה - של משפטים אוניברסאליים.

4. <u>משפטים אוניברסאליים</u>

אלה הם משפטים הטוענים שחוקיות מסוימת, או תכונה מסוימת חלה באופן אוניברסאלי גורף על *כל* איבריה של קבוצה מסוימת של עצמים מתמטיים.

קודם ראינו את המשפט האוניברסאלי הטוען לתכונה של כל המערכות של שתי משוואות ליניאריות בלתי תלויות בשני נעלמים, או השקול לו, הטוען לתכונה של *כל* זוגות הישרים במישור.

הנה דוגמא נוספת, אשר שימשה אותי למחקר שרמזתי עליו לעיל ואתאר בהמשך: לכל מספר טבעי (שלם וחיובי) מתקיים:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$$

משפטים כאלה מנסים בדרך כלל להוכיח באינדוקציה שלמה. גם שיטת ההוכחה באינדוקציה שלמה היא בעייתית מבחינה דידאקטית. מחקרים רבים הצביעו על קשיים בתפיסת מהותה של דרך ההוכחה באינדוקציה שלמה. לתלמידים רבים לא ברור ההיגיון המסתתר מאחוריה והם חושבים שזה בעצם ׳טריק׳ ולא הוכחה של ממש כי ״מניחים את מה שצריך להוכיח״. איזו ׳הוכחה׳ לטענה זו ראויה לשם ׳שקופה׳? האם הוכחה שקופה יכולה לסייע בהבנת ההוכחה המלאה לטענה זו? לשאלות אלו נחזור בהמשך.

ראינו ארבעה סוגים של משפטים ועמדנו על ההבחנה בין השערה – טענה שטרם הוכחה, לבין משפט – טענה שהוכחה. משפט במתמטיקה הוא, אם כן, טענה שאין לנו כל פקפוקים לגביה, אין לנו שום ספק באמיתותה. זהו הביטחון שאותו מקנה לנו ההוכחה. זוהי הסיבה שבגללה אנחנו מייחסים חשיבות כה רבה להוכחה.

בית המשפט מסתפק בהוכחת אשמה מעל לספק סביר. במתמטיקה לא מסתפקים בכך. הוכחה מתמטית צריכה לתת בטחון מוחלט באמיתות הטענה.

לאחרונה התחילו מתמטיקאים להסתפק בהוכחות לא מוחלטות. אבל להבדיל מבתי המשפט, המתמטיקאים מקבלים הוכחה לא מוחלטת רק אם ניתן לקצוב באופן כמותי, בביטחון ומעל לכל ספק את מידת הסבירות של הוכחה כזאת. הוכחות בלתי מוחלטות עדיין לא מצאו את דרכן אל תוכנית הלימודים, אבל ראוי שנהיה ערים לקיומן.

## ניסוי ולקחיו

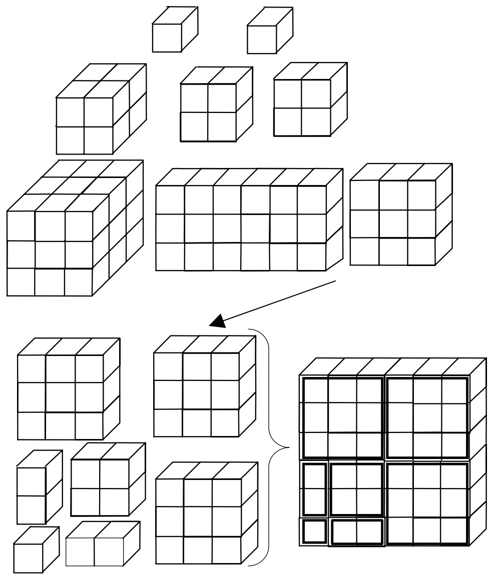
בעקבות התפתחותה של הגרפיקה הממוחשבת יש כיום נטייה להמחיש באופן ויזואלי טענות מתמטיות ולבסס את אמיתותן על מראה עיניים. אף כי בקרב המתמטיקאים אין עוררין על כך ש״רואים אינה ראָייה״ גוברת הנטייה בקרב העוסקים בהוראת המתמטיקה להשתמש בויזואליזציה כדי לסייע בהבנת הטענות המתמטיות. לעיתים, כשההוכחה עצמה קשה ומסורבלת, מסתפקים בשכנוע הויזואלי ולא מביאים בכלל את ההוכחה הפורמאלית, מחשש שהיא לא תוסיף ללומד מידע חדש ולעומת זאת היא עלולה לגרוע

מביטחונו העצמי ומאמונתו ביכולתו להצליח במתמטיקה. הויכוח בין הדוגלים בהוכחות פורמאליות על אף הקושי הכרוך בהבנתן, לבין הדוגלים ב׳הוכחות׳ יותר רכות, נטוש זה שנים אחדות ויש רבים הנוטים להקל בדרישה להוכחה ממצה ונקייה במיוחד ברמת בית הספר התיכון, ולהעדיף את חיזוק ההבנה האינטואיטיבית של הנימוקים שעליהם מבוססות הטענות המתמטיות השונות. מציאת האיזון הנכון בין הקניית השפה והפורמליזם המתמטי לבין ביסוס ההבנה האינטואיטיבית, הוא נושא למאמרים רבים שפורסמו בספרות בשנים האחרונות (חלק קטן מהם מופיע ברשימה הביבליוגרפית). אחת הדרכים להמחשת טיעונים מתמטיים זכתה לכינוי ״הוכחות ללא מילים״. אלה הן ׳הוכחות׳ בתמונות שכמעט ואין צורך להוסיף עליהן הסבר כי התמונות אמורות ״לדבר בעד עצמן״ ולסבר את ההיגיון של הבוחן אותן בדקדקנות. בספר בשם זה מצאתי ׳הוכחה׳ ללא מילים לטענה הבאה:

$$1^3+2^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$$

ההוכחה מובאת כאן ׳כלשונה׳:

Adapted from Alan L. Fry in:
Nelsen, B. Roger. Proofs Without Words - Exercises in Visual Thinking, Washington DC: The Mathematical Association of America, 1993 (p. 86)



ציור 1

בעלי השכלה תיכונית במתמטיקה שלא למדו אינדוקציה, שבפניהם הצגתי את ההוכחה של פריי, התקשו לראות את ההיגיון המסתתר מאחורי הטענה הנזכרת, משתקף דרך סידרת השרטוטים הנ״ל. הואיל וגם אני עצמי התקשיתי בכך, החלטתי לבחון אותה בצורה יותר מעמיקה וכתוצאה מכך הכנסתי בה שינוי לא גדול מבחינה חיצונית, אבל מהותי מכיוון שהוא הפך אותה ל׳שקופה׳. הראָייה לשקיפותה היתה שחלק ניכר מאלה שבחנו את הסדרה המתוקנת הגיעו להבנת ההוכחה המלאה עד כדי כך שהם יכלו להעלותה על הכתב בצורה כמעט מושלמת, למרות שהם לא למדו עדיין אינדוקציה. (פרטי הראיונות נמצאים בכתובים - (Movshovitz-Hadar, 1997). כדי להגיע לבניית ה׳הוכחה׳ השקופה היה עלי קודם כל להוכיח באופן פורמאלי מלא את הטענה ולבנות ברגישות את סידרת השרטוטים כך שההוכחה המלאה אכן תשתקף בעדה. הניסוי והניסיון שצברתי במהלכו מצביעים לדעתי על הדברים הבאים:

א. צדק ג׳ון ווב במאמרו מ-1994 כשטען שמורים למתמטיקה, כמו מתמטיקאים מקצועיים, חייבים לחוש בנוח בקריאה ובכתיבה של הוכחות פורמאליות מכל הסוגים.

ב. מורים ומפתחי תוכניות לימודים צריכים לפתח את הרגישות הנדרשת, כדי להבחין בין ׳הוכחה׳ שקופה לבין ׳הוכחה׳ ויזואלית או אחרת שאיננה ׳שקופה׳.

ג. נראה של׳הוכחות׳ שקופות יש פוטנציאל לימודי לא מבוטל. דרוש מחקר מעמיק שילמד אותנו מהי התועלת שאפשר להפיק משימוש ב׳הוכחות׳ שקופות בהוראת המתמטיקה בבית הספר התיכון וגם באוניברסיטה[4].

ד. אם יתברר שאכן יש ערך לימודי ל׳הוכחות׳ שקופות, אזי נחוץ יהיה לפתח אוסף של ׳הוכחות׳ שקופות לטענות מתמטיות שעל הוכחתן המלאה אנחנו נוטים לוותר ולא פחות חשוב מכך גם לטענות מתמטיות שאת הוכחתן המלאה אנחנו חושבים לחיונית להשכלתו התיכונית של התלמיד.

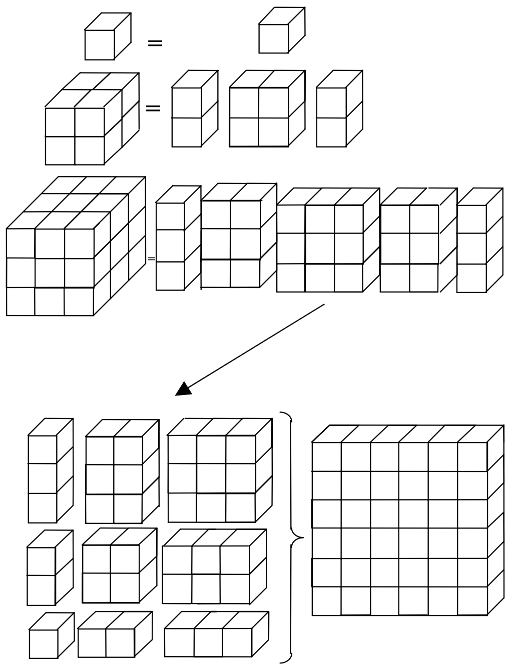
[4] בקיץ 2003, בסמוך לפרסום מאמר זה בעל״ה, הסתיים מחקר הדוקטורט של עליזה מאלק בנושא זה, וסוכם בחיבור שכותרתו: ׳הוכחות שקופות ככלי דידאקטי במתמטיקה׳.

הסדרה המתוקנת מופיעה בשני הציורים הבאים. ממנה ניתן לראות את המקרה הפרטי $n=4$ שבאופן אלגברי ניתן לביטוי כך:

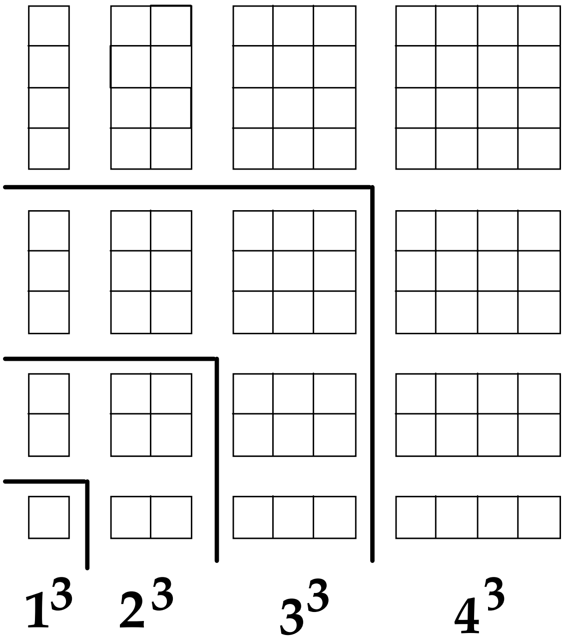
$$1^3+2^3+3^3+4^3=$$
$$(1+2+3)^2+4^3=$$
$$(1+2+3)^2+2\cdot 4\cdot(1+2+3)+4^2$$
$$\Downarrow$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=$$
$$(1+2+3)^2+4^3=$$
$$(1+2+3+4)^2$$

בניסוי שערכתי הראיתי רק את ציור 2 וחלק מהמרואיינים היו מסוגלים בעצמם להגיע לשרטוט דומה לזה המופיע בדף שלאחריו. על כל פנים מי שמצליח 'לראות' מהסידרה הנ"ל שבאופן דומה למשורטט בציורים 2, 3 אפשר להצדיק את המעבר מ-$n=4$ ל-$n=5$, יוכל מן הסתם להכלילו למעבר מכל ערך של $n$ לעוקב אחריו, או בלשון המקובלת בהוכחות באינדוקציה מ-$n=k$ ל-$n=k+1$ ואז נותר רק לוודא ש-$1^3=1^2$, כדי להסיק בהסתמך על האכסיומה הידועה של פיאנו, *שלכל* $n$ טבעי:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$$




ציור 2




ציור 3

**סיכום**

אם שואלים מישהו: מה זה משולש? קרוב לוודאי שהנשאל ישרטט דוגמא באוויר או על נייר ולא ייתן הגדרה פורמאלית בנוסח "קו שבור סגור המורכב משלושה קטעים". התשובה הזאת מובנת לשואל בשתי רמות. לשואל שיודע את התשובה ומבקש לתהות על ידיעתו של הנשאל, תשובה כזאת מבהירה שהנשאל יודע כנראה מה זה משולש גם אם הוא לא מסוגל לתת הגדרה פורמאלית. לשואל שאיננו יודע מה זה משולש, התשובה על-ידי דוגמא נותנת מידע הרבה יותר בהיר מההגדרה הפורמאלית. באופן דומה הוכחה על-ידי מקרה פרטי היא במקרים רבים הרבה יותר קומוניקטיבית ומשכנעת מההוכחה הפורמאלית המלאה.

במאמר קודם הגדרתי 'הוכחה שקופה' כך:
A transparent proof is a proof of a particular case which is "small enough to serve as a concrete example, yet large enough to be considered a non-specific representative of the general case... One can see the general proof through it because nothing specific to the case enters the proof." (Movshovitz-Hadar 1988).

כדי לסבר את האוזן הנה דוגמא פשוטה לשתי 'הוכחות' לאותה טענה. שתיהן אינן הוכחות מלאות. שתיהן נשענות על הוכחה של מקרה פרטי, אבל רק אחת מהן ראויה לתואר 'שקופה'.

טענה: סכום של שני מספרים אי זוגיים הוא מספר זוגי

'הוכחה' שקופה:

$$23 + 75 = (2 \cdot 11 + 1) + (2 \cdot 37 + 1) =$$
$$= 2 \cdot 48 + 2 = 2 \cdot 49$$

'הוכחה' לא שקופה:

$$23 + 75 = 23 + (23 \cdot 3 + 6) =$$
$$= 23 \cdot 4 + 6 = 46 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 49 \cdot 2$$

חשוב לשים לב לכך שאיננו עוסקים כאן ב'שיטת הגילוי' כי איננו עוסקים בתהליך המוביל לניסוח של השערה. אנו עוסקים בתהליך המוביל לניסוח הוכחה להשערה שכבר הועלתה בדרך כלשהי (בדרך כלל השערות הן תולדה של תהליך של ניסוי ובדיקה, ניסוי וטעייה, ניסוי וליטוש ההשערה).

מבעד לזכוכית החלון המגנה מרוח וגשם, אנחנו רואים בחוש הראִייה את הנוף הנשקף מהחדר ומתרשמים מיופיו.

דרך 'הוכחה' שקופה המגנה מקשיים, אנו חשים בחוש האחראי לכך, את תקפותה של ההוכחה, ומתרשמים מאמיתות הטענה.

'הוכחה' שקופה היא איפוא רעיון דידאקטי שאם נשכיל לממשו הוא יכול לסלול את הדרך להבנת הוכחות.

כדי להשלים את התמונה, הואיל והזכרנו 'הגדרות' על-ידי דוגמא שהן במובן מסוים שקופות, והתעמקנו ב'הוכחות' שקופות שהן הוכחות על-ידי דוגמא מייצגת, נזכיר כי רעיון השקיפות ניתן למימוש גם בפתרון בעיות מילוליות. במקום לקרוא לנעלם בשם $x$, מנחשים ערך מסוים של $x$, ובודקים את היתכנותו. חוזרים על כך פעמים אחדות. השיטה איננה מיועדת למציאת הפתרון על-ידי ניחוש. היא מיועדת להביא את התלמיד להבנה מעמיקה של ההקשרים בין הנתונים, דבר שמסייע בבניית המשוואות בשלב יותר מאוחר. (ר' Hadas and Hadar, 1982).

## רשימה ביבליוגרפית למעוניינים בקריאה נוספת


Alibert, Daniel and Michael Thomas (1991). "Research on Mathematical Proof". In Advanced Mathematical Thinking. Mathematical Educational Library, vol. 11. Edited by David Tall. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, pp. 215-230.

Alon Nogah and Joel Spencer (1992). The Probabilistic Method.. John Wiley & Sons, Inc.

Balacheff, Nicolas (1991). "The Benefits and Limits of Social Interaction: The Case of Mathematical Proof." In Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching. Mathematical Educational Library, vol. 10. Edited by Alan J. Bishop, Stieg Mellin-Olsen, and Joop Van Dormolen. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, pp. 175-194.

Billstein, Rick, Shlomo Libeskind and Johnny W. Lott. (1993):A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary Schoool Teachers. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Comp.

Boole, George (1848). The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning. London: Walton and Maberley.,

Boole, George (1854). An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical theories of Logic and Probabilities. Cambridge: Macmillan and Co.,. Reprinted by Dover Publications, Inc. 1951.

Brown, Stephen, I. and Marion I. Walter (1990). The Art of Problem Posing. 2nd edition. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Clements, Douglas, H. and Michael Batista. "Geometry and Spatial Reasoning". Chapter 18 in Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning. Edited by Douglas A. Grouws. Reston, VA: NCTM , 1992. pp. 420 - 464.

De-Villiers, Michael (1990). "The Role and Function of proof in mathematics." Pythagoras, 24, pp. 18-21.

Devlin, Keith (1995). "Editorial: Proof Beyond Reasonable Doubt." Focus - The Newsletter of the Mathematical Association of America. 15 (1), pp. 2-3

Fendel, Dan, and Diane Resek (1990). Foundations of Higher Mathematics - Exploration and Proof. Reading, MA: Addison Wesley Publishing Comp.

Fendel, Dan et al (1996). Interactive Mathematics Program - Three years of problem-based high school curriculum. Berkeley CA: Key Curriculum Press.

Goldreich Oded (1988). "Randomness, Interactive Proofs, and Zero-Knowledge--A Survey". In: The Universal Turing Machine: A Half Century Survey,. Edited by Rolf Herken. Oxford University Press, pp. 377--405.

Hadar, Nitsa (1977). "An Intuitive Approach to the Logic of Implication." Educational Studies in Mathematics, (8), pp. 413-438.

Hadass R. and Hadar N. (1982). "The trial and test method of solving story problems using calculators", Mathematics in School, January 82, pp. 32-34

International Congress on Mathematics Education, Seville, Spain, July 96. Published by AMESA, Centrahil, South Africa.

Nelsen, B. Roger (1993). Proofs Without Words - Exercises in Visual Thinking, MAA classroom resource materials, no. 1. Washington DC: The Mathematical Association of America.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). Professional Standards for Teaching Mathematics. Reston VA: NCTM.

Papert, Seymour (1980). Mindstorms. - Children, Computers, and Powerful Ideas. New York, NY: Basic Books, Inc.

Pimm David (1987). Speaking Mathematically - Communication in Mathematics Classrooms. London, Great Britain: Routledge Kegan Paul .

Polya, George (1954). Mathematics and Plausible Reasoning - A guide to the art of plausible reasoning. Vol. I: Induction and Analogy in Mathematics. Vol. II: Patterns of Plausible Inference. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rabin, Michael O. (1976). "Probabilistic Algorithms" in Algorithms and Complexity. Edited by J. F. Traub New-York, NY: Academic Press, pp. 21-39.

Schoenfeld, Alan H. (1990). "On Mathematics as sense-Making: An Informal Attack on the Unfortunate Divorce of Formal and Informal Mathematics." In: Informal Reasoning in Education. Edited by D. N. Perkins, J. Siegal, and J. Voss. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, pp. 311-343.

Senk, Sharon L. (1989). "Van-Hiele levels and achievement in writing geometry proofs." Journal for Research in Mathematics Education. 20, pp. 309-321

University Series in Undergraduate Mathematics (John Kelley and Paul Halmos Series editors), New-York, NY: Van Nostrand Co.

Tall David (ed.) (1991). Advanced Mathematical Thinking. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, pp. 3-20.

Webb, John H. (1994) "What's the Use of Mathematics?" University of Cape Town New Series No. 185, Inaugural Lecture. Cape Town, SA: UCT Printing department.

Whitehead, Alfred North and Bertrand Russell (1910-1913). Principia Mathematica (three volumes.). New York: Cambridge University Press.

Harel, Guershon (in Press). "Proof Schemes." in Research in Collegiate Mathematics Education. Edited by Ed Dubinsky, Alan Schoenfeld and Jim Kaput. Providence, RI: American Mathematical Society..

Hanna, Gila, and Ian Winchester (eds.) (1990 ):Interchange, Special Issue: Creativity, Thought and Mathematical Proof. 21 (1). Toronto, Canada: The Ontario Institute for Studies in Education.

Hanna Gila (1991). "Mathematical Proof", Chapter 4 in David Tall: Advanced Mathematical Thinking. Mathematical Educational Library, vol. 11. Edited by. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, pp. 54-61

Hanna, Gila, and Niels Jahnke (eds.) (1993). Educational Studies in Mathematics, Special Issue on Proof, 24 (4.(

Johnson-Laird P. N., and Ruth M. J. Byrne (1991). Deduction, Essays in Cognitive Psychology. Hilsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publ.

Kleiner Israel (1991). "Rigour and Proof in Mathematics: A Historical Perspective." Mathematics Magazine 64 (5), pp. 291-314.

Lakatos, Imres (1976). Proofs and Refutations. Great Britain: Cambridge University Press.

Lakatos, Imres (1986). What does a mathematical proof prove? In New Directions in the Philosophy of Mathematics. Edited by T. Tymoczko, Boston: Birkhauser,, pp. 153-162 .

Maher, Carolyn; and A. Martino (in press). "The Development of the Idea of Mathematical Proof: A five-year case study." Journal for Research in Mathematics Education. Reston, VA: NCTM.

Mandelbrot, Benoit (1992). Fractals, Computers and Mathematics Education. Proceedings of ICME-7 - the 7th International Congress on Mathematics Education. Quebec .

Manin, Yu. (1977).A Course in Mathematical Logic. New-York, NY: Springer-Varlag.

Mason, John with Leone Burton, and Kaye Stacey (1985). Thinking Mathematically. Menlo-Park, CA: Addison-Wesley Publishing Co.

Movshovitz-Hadar, Nitsa (1988a). "Stimulating Presentations of Theorems Followed by Responsive Proofs." For the Learning of Mathematics, 8 (2), pp. 12-30

Movshovitz-Hadar, Nitsa 1988b. "School Mathematics Theorems - an Endless Source of Surprise." For the Learning of Mathematics, 8 (3), pp. 34-40.

Movshovitz-Hadar (1997): "On Striking the balance between formal and informal proofs. " In: M. De-Villiers (Ed.): Proof and Proving - Why, when and how?. Proceedings of Topic Group 8, ICME-VIII - The 8th