



הנושא: עליזה בארץ המתמטיקה

הוכן ע"י: יונתן אחיטוב.

תקציר: פתרון בעיה המוצגת בספר עליזה בארץ הפלאות בעזרת בסיסי ספירה שונים.

מילות מפתח: כתב העת על"ה, על"ה 33, מספרים ופעולות, כפל, חיבור, בסיסי ספירה, עליזה בארץ הפלאות, חשבון מודולרי, שיטה עשרונית, משחקים.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 33, תשס"ה, עמודים, 43-44

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.



צימוקים

עליזה בארץ המתמטיקה

יונתן אחיטוב

בית הספר המקיף דנציגר, קרית שמונה
yonatan.ahituv@hotmail.co.il

איך פותרת ילדה קטנה חידה גדולה? בעיקר על ידי המבחן הבא:
נראה אם אני יודעת כל מה שידעתי פעם.

בהתנסחות פילוסופית יותר – הזיכרון והתודעה הפנימית הם הקובעים את הזהות העצמית.²

האם אך מקרי הדבר שהמבחן הראשון אותו מציבה עליזה בפני עצמה הוא דווקא בחשבון?³ הלא אביה הרוחני, סופר הילדים, שנודע בכינוי הספרותי לואיס קרול, היה בעצם פרופסור צ'רלס ל. דודג'סון (-1832 1898), שלימד מתמטיקה באוניברסיטת אוקספורד במשך למעלה ממחצית יובל שנים! ואמנם, בשני ספריו, 'עליזה בארץ הפלאות' ו'מעבר למראה ומה מצאה שם עליזה', חבויים לא מעט רמזים מתמטיים.

נשוב לעליזה ולמבחן בחשבון:

נראה:

ארבע כפול חמש הם שתיים עשרה,

וארבע כפול שש הם שלוש עשרה,

וארבע כפול שבע הם –

בחיי! בקצב כזה לעולם לא אגיע עד

עשרים!"

(עליזה בארץ הפלאות, פרק שני)



ואכן נשאלת השאלה: מדוע לא תגיע עליזה עד 20 בקצב כזה?

² תפיסה זו מזכירה גם את דעתו של הרמב"ם בסוגיית הישארות הנפש, אך לא כאן המקום להאריך.
³ שני המבחנים המשעשעים הבאים הם בגיאוגרפיה ובדקלום.

נפלאות הרפואה המודרנית מאפשרות היום הן השתלות של מרבית אברי הגוף, והן שינוי המראה החיצוני כמעט ללא גבולות. אפשרויות אלה מעלות שאלה פילוסופית כבדת משקל: האם יש איזה גרעין עצמי בכל אדם, שממשיך ושומר את הזהות הקודמת שלו למרות כל אותם החלפות איברים ושינויים שעבר?

ילדה קטנה ומפורסמת התלבטה בשאלה מטרידה זו כבר לפני כמאה וארבעים שנה. לא מפני שהיתה פילוסופית גדולה, אלא מפני שחווה על גופה שינויים מהירים וקיצוניים מאד. זאת היתה עליזה (או אליסה או אליס – תלוי איזה תרגום לעברית יש בידכם), הגיבורה המפורסמת מארץ הפלאות של לואיס קרול. אחרי נפילתה לתוך מאורת הארנב היא מוצאת בקבוקון קטן המפתה אותה בתווית 'שתה אותי'. השיקוי הטעים והמופלא שבתוכו מכווץ אותה כמו טלסקופ עד לגובה של רבע מטר לערך. אחר כך היא מחסלת עוגה קטנה, עליה נכתב 'אכול אותי', ואז היא חוזרת ונפתחת כמו 'טלסקופ גדול', עד שקומתה יותר משלושה מטרים! מצבים מתחלפים אלה, כמו גם העולם המוזר אליו נקלעה, מעוררים בה את השאלה הקיומית הגדולה:

האם החליפו אותי בלילה? האם אני היא אותה אחת שהתעוררה הבוקר? ... אבל אם אינני אותה אחת, השאלה הבאה היא: אז מי אני בכלל?¹ אהה! זאת החידה הגדולה!



¹ הטרמה של קוני למל!

הסבר ראשון⁴

עד שלא הנהיגה אנגליה את השיטה העשרונית, נחלקה הלירה שטרלינג ל-20 שילינג, וכל שילינג ל-12 פני. יחידת האורך יארד נחלקה ל-3 רגלים, וכל רגל ל-12 אינצ'ים. ממילא נדרש כל אנגלי לדעת היטב את כפולות ה-12, וילדים קטנים, אבוי, נאלצו לשנן את לוח הכפל עד 12! הנה לפנינו ארבע השורות הראשונות בלוח כפל כזה. עליזה, משום מה, פנתה דווקא לכפולות ה-4, לכן השארנו את השורות הראשונות ריקות:

| | | | | | | | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 2 | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 3 | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 4 | ... | ... | ... | 12 | 13 | | | | | | |

נא למלא את המשבצות הריקות ולהשלים את המכפלות ב'קצב של עליזה'.

הסבר שני

כאן חייבים אנו בהקדמה מתמטית. הנה, אנו נוהגים לכתוב מספרים בשיטה העשרונית. כלומר, הספירה הימנית ביותר מייצגת אחדות, ואילו הספירה השנייה מימין מקבלת את ערכה על-ידי כפל ב-10. לדוגמה, $72 = 7 \times 10 + 2$, $49 = 4 \times 10 + 9$. באופן כללי, די לנו בעשר הספרות מ-0 עד 9. מספרים הגדולים מ-9 נכתבים בעזרת ספרות אלה בלבד, אלא שכל ספירה מקבלת את ערכה לפי מיקומה בתוך המספר. ככל שהספירה שמאלית יותר, ערכה גדול יותר – הוא למעשה גדל פי עשרה במעבר מקום אחד שמאלה. למשל, במספר 558, ערך הספירה האמצעית הוא חמש עשרות, ואילו ערך השמאלית – חמש מאות. מסתבר שיש מידה מסוימת של שרירותיות בבחירת המספר 10 כבסיס הספירה. אילו, דרך משל, היו לנו רק ארבע אצבעות בכל יד, מסתבר שהיינו סופרים וכותבים מספרים לפי בסיס הספירה 8. במקרה כזה, ככל שהיינו נעים שמאלה לאורך המספר, היה ערך כל ספירה גדל פי שמונה, ולא פי עשרה! בשיטה זו היינו מייחסים למספר '72' את הערך $7 \times 8 + 2$, ואילו ל-'49' לא היתה שום

⁴ שני הסברים מופיעים בספר:

The Annotated Alice, the Definitive Edition (1990, Lewis Carroll. M. Gardner-editor, Penguin Books)

הספר תורגם לעברית ויצא לאור בשני חלקים, 'אליס בארץ הפלאות' (1997) ו'מעבר למראה ומה אליס מצאה שם' (1999). המתרגמת, רינה ליטוין, הוסיפה הערות משלה, אבל משום מה גרעה את ההסבר השני שמביא גרדנר. אולי סברה שהקהל הישראלי אינו בשל לתחכום מתמטי כזה.

משמעות, כי לא היינו משתמשים אלא בשמונה הספרות מ-0 עד 7. מאידך גיסא, אילו היו לנו, למשל, שבע אצבעות בכל יד, אפשר שהיינו כולנו משתמשים בבסיס ספירה 14, ואז היינו מייחסים ל-'72' את הערך $7 \times 14 + 2$, ואילו ערכו של '49' היה $4 \times 14 + 9$. והנה A. L. Taylor אחד מפרשני לואיס קרול כתב, שהתרגילים אותם חישה עליזה **כן נכונים**, אבל בבסיסי ספירה אחרים.

ואמנם בשיטה העשרונית: $4 \times 5 = 20$, אבל אם ניקח את 18 כבסיס ספירה, תקבל התוצאה '12' של עליזה את הערך הנכון, שהרי לפי בסיס 18 (שצריך להיות רשום כמובן בסמל אחר), $12 = 1 \times 18 + 2$. כך גם בשיטה העשרונית: $4 \times 6 = 24$, אבל אם ניקח את 21 כבסיס ספירה, תקבל התוצאה '13' של עליזה ערך נכון, שהרי לפי בסיס 21, $13 = 1 \times 21 + 3$. ואילו היתה עליזה משלימה את התרגיל השלישי, היתה אומרת:

וארבע כפול שבע הם ארבע עשרה

שהרי לפי בסיס 24, $14 = 1 \times 24 + 4$, כלומר עשרים ושמונה. מכאן מתברר ש'הקצב של עליזה' הוא – הגדלת בסיס הספירה ב-3 בכל פעם שהכופל גדל ב-1. המשיכו להגדיל את בסיס הספירה ואת הגורמים במכפלה 'באותו קצב':

| התרגיל | המכפלה (בסיס 10) | בסיס הספירה (של עליזה) | המכפלה לפי הבסיס (של עליזה) |
|----------------|------------------|------------------------|-----------------------------|
| $4 \times 5 =$ | 20 | 18 | 12 |
| $4 \times 6 =$ | 24 | 21 | 13 |
| $4 \times 7 =$ | 28 | 24 | 14 |
| | 32 | 27 | |
| | 36 | 30 | |
| | 40 | 33 | |
| | 44 | 36 | |
| | 48 | 39 | |
| | 52 | 42 | |

מה קורה בשורה האחרונה? עליזה היתה אמורה לקבל 20 לפי בסיס 42, אבל חישוב קל מראה שמספר זה הוא בבסיס עשר 84 (!!!) ולא 52 – התוצאה הנכונה. הנה כי כן, לעולם לא תגיע עליזה ל-20 בקצב זה. כה עצוב!

כאן המקום להציב כמה שאלות נוספות:
האם אפשר להמשיך 'לוח כפל' כזה כלפי מעלה? אם כן, לאילו נכפלים? האם לכך התכוונה עליזה? האם לכך התכוון לואיס קרול? והאם זה כל-כך חשוב?!