הנושא: בעיה בהסתברות – פתרונה הגיאומטרי ותוצאתה המפתיעה

הוכן ע״י: אבי סיגלר.

תקציר: במאמר מוצגת בעיה בהסתברות, המזכירה את בעיית המקל השבור, אשר פתרונה נשען על שיקולים גיאומטריים.

מילות מפתח: כתב העת על״ה, על״ה 34, הסתברות, הסתברות גיאומטרית, הנדסה, גיאומטריה, הנדסת המישור, גיאומטרית המישור, מקום גיאומטרי, משולש, משולש שווה צלעות, מדידות, שטח, שטח משולש, דמיון משולשים, מרובע חסום, בר חסימה, מעגל, קשת, מחוג, זווית היקפית, מרכז המשולש, שטח גזרה, משפט פיתגורס, ממוצע גיאומטרי, π, קירוב.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 34, תשס״ה 2005, עמוד 56-58.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

בעיה לעניין

בעיה בהסתברות
פתרונה הגיאומטרי ותוצאתה המפתיעה

אבי סיגלר
ביה"ס הטכני של חיל-האויר, חיפה

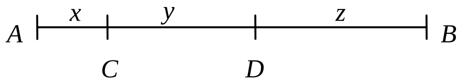
בעיית המקל השבור היא בעיה מוכרת: *מקל נשבר לשלושה חלקים. מהי ההסתברות שניתן יהיה לבנות משולש משלושת חלקיו?*

הבעיה נפתרת תוך שימוש בשיקולים גיאומטריים פשוטים ויפים והתוצאה היא: $P=\frac{1}{4}$. ניתן לנסח שאלות דומות, הנבדלות זו מזו בדרך בחירת נקודות השבירה של המקל, אשר גם הן נפתרות בעזרת אותו מודל גיאומטרי ולהן תוצאות אחרות[1].

הבעיה ופתרונה הגיאומטרי שיוצגו במאמר זה, דומה ותוצאתה מפתיעה.

הבעיה

מקל AB נשבר לשלושה חלקים:

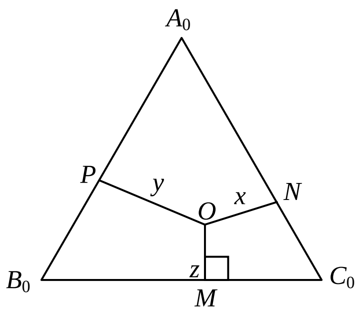


$$DB\equiv z, CD\equiv y, AC\equiv x$$

מהי ההסתברות שיתקיים הקשר: $x\cdot y\geq z^2$?

פתרון

ניזכר בתכונה הידועה של משולש שווה-צלעות, לפיה: *סכום המרחקים של כל נקודה פנימית למשולש משלוש צלעותיו, הוא קבוע ושווה לאורך הגובה של המשולש.*



ציור 1

כיון שסכום האורכים של חלקי המקל השבור שווה לאורך המקל המקורי, קרי: $x+y+z=AB$, אפשר לייצג כל מצב אפשרי של שבירת המקל לשלושה חלקים, על-ידי נקודה O בתוך משולש שווה-צלעות $A_0B_0C_0$, אשר גובהו שווה לאורך המקל המקורי, והמרחקים של הנקודה מצלעותיו: B_0C_0, C_0A_0 ו- A_0B_0 הם y,x,z בהתאמה.

שאלה ראשונה:

מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות O, עבורן מתקיים הקשר: $xy=z^2$?

פתרון לשאלה הראשונה:

נוכיח ראשית את דמיון המשולשים: $\Delta NOM\sim\Delta MOP$

היות ובכל אחד מהמרובעים $MONC_0$ ו- $MOPB_0$, יש זוג זוויות נגדיות ישרות, הרי שסכום מידותיהן של שתי הזוויות הנגדיות הנותרות, גם הוא שווה ל- 180 מעלות. מתכונה זו ניתן להסיק כי שני המרובעים הם ברי-חסימה במעגל וכי: $\angle NOM=\angle POM=120°$.

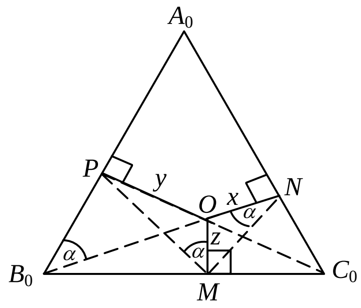
לפי הנתון: $xy=z^2$, לכן: $\frac{x}{z}=\frac{z}{y}$ והמשולשים דומים זה לזה.

[1] תיאור מדויק של הבעיות ושל פתרונותיהן בשילוב יישומון נמצא באתר:
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Probability/TriProbability.shtml#1

מדמיון המשולשים נובע שוויון הזוויות המתאימות, כלומר: $\angle ONM = \angle OMP \equiv \alpha$, אולם היות והמרובעים $MONC_0$ ו- $MOPB_0$ ברי-חסימה במעגל מתקבל גם שוויון בין זוויות הקפיות הנשענות על קשתו שוות:

$$\angle OMP = \alpha = \angle OB_0P \;;\; \angle ONM = \alpha = \angle OC_0M$$

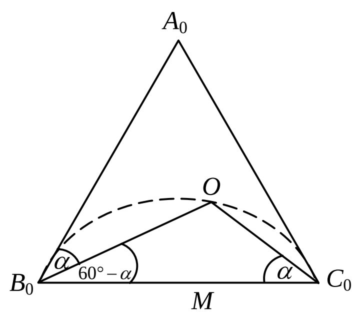
ולכן: $\angle OC_0M = \alpha = \angle OB_0P$



ציור 2

כך, חשבון זוויות במשולש ΔB_0OC_0 מוביל למסקנה: $\angle B_0OC_0 = 120^\circ$.

מכאן, המקום הגיאומטרי של הנקודה O, עבורה מתקיים הקשר: $xy = z^2$ הוא קשת של מעגל ה'רואה' את הצלע B_0C_0 בזוית של 120°. (ציור מס' 3).



ציור 3

שאלה שניה:

היכן נמצא המרכז של מעגל זה, מהו אורך המחוג שלו?

פתרון לשאלה השניה:

מן המשפט ההפוך למשפט המוכר האומר כי הזוית בין מיתר למשיק שווה לזוית ההקפית הנשענת על אותו מיתר מצידו השני נקבל כי צלעות המשולש: A_0B_0 ו- A_0C_0 משיקות למעגל, שכן:

$$\angle OB_0C_0 = \angle OC_0N \;;\; \angle OC_0B_0 = \angle OB_0P$$

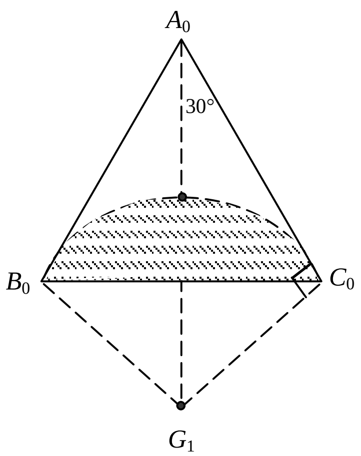
ברור גם שהמעגל עובר דרך 'מרכז המשולש' AB_0C_0 , כלומר דרך נקודת המפגש של חוצי-הזוויות שלו, שהם גם הגבהים, התיכונים והאנכים האמצעיים שלו, היות והזווית בין כל שנים מן הישרים הללו היא בת 120°. לכן מרכז המעגל ממנו רואים את הצלע B_0C_0 בזווית של 120° הוא מפגש האנך ל- A_0C_0 בנקודה C_0 (מחוג מאונך למשיק בנקודת ההשקה) עם האנך מ- A_0 ל- B_0C_0 (המחוג העובר דרך 'מרכז המשולש') – כמתואר בציור 4.

נסמן מרכז זה ב- G_1 (ציור 4) וכן נקבע: $G_1C_0 \equiv R$

נחפש את הקשר בין R לבין אורך המקל המקורי: $x + y + z$. אורך צלע המשולש $A_0B_0C_0$ הוא מצד אחד: $2R\cos 30^\circ = R\sqrt{3}$

ומצד שני: $\dfrac{x+y+z}{\sin 60^\circ}$

לכן נקבל: $R = \dfrac{2}{3}(x+y+z)$



ציור 4

פתרון הבעיה שהוצגה בתחילת המאמר:

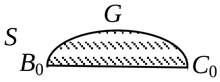
מרחב כל התוצאות האפשרויות של שבירת המקל לשלושה חלקים הוא כאמור פנים המשולש $A_0B_0C_0$ ושפתו. מרחב התוצאות הרצויות $xy \ge z^2$ מורכב מן המקטע המעגלי $B_0\,G\,C_0$ (המקווקו בציור 4) ומשפתו.

לכן ההסתברות המבוקשת היא:

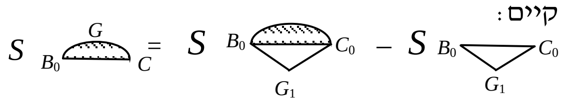
$$P(xy \ge z^2) = \frac{S\ \text{שטח}}{S(\Delta A_0B_0C_0)\ \text{שטח}}$$

נחשב תחילה את שטח המשולש: אם צלעו כאמור $R\sqrt{3}$, שטחו הוא: $S_{A_0B_0C_0} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

נחשב את שטח המקטע המעגלי :



קיים :



משום שמידת הזווית $B_0G_1C_0$ היא $120°$, שטח הגיזרה $B_0G_1C_0$ הוא בדיוק שליש משטח עיגול שאורך מחוגו R, כלומר $\frac{\pi R^2}{3}$. שטח המשולש $B_0G_1C_0$ שווה לשטח המשולש B_0GC_0 ושווה בדיוק לשליש משטח המשולש $A_0B_0C_0$, כלומר $\frac{\sqrt{3}R^2}{4}$.

לכן שטח המקטע המעגלי הוא :

$$R^2\left(\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12}\right)=R^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

לכן :

$$P(xy\ge z^2)=\frac{\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}}=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}=\frac{4\pi\sqrt{3}-9}{27}\approx 0.47$$

מדוע התוצאה מפתיעה ?

פתרון הבעיה הושג באמצעים אלמנטריים, תוך שימוש במשפטים גיאומטריים (דמיון משולשים, משפט פיתגורס, משפט הזווית בין משיק למיתר, הזווית ההיקפית ומעגל ה׳ראיה׳, שטח משולש, שטח מעגל, שטח גיזרה ושטח מקטע). במושג ההסתברות החלו לטפל פרמה ופסקל במאה ה-17. היוונים, שלא הכירו במושג ההסתברות, יכלו לפתור את הבעיה שהוצגה כבר לפני 2300 שנה.

התוצאה מפתיעה בזכות נוכחותו הבלתי צפויה של π. התנאי האלגברי $xy\ge z^2$, המזכיר ממוצע גיאומטרי, הוליד תוצאה הקשורה ב-π, הוא היחס בין הקף המעגל לקוטרו. ניתן לכן לבצע ניסוי פיזיקלי ולקבל קרוב של π. אם נשבור מקל AB לשלושה חלקים AC, CD, DB, מספר רב מאוד של פעמים ונספור את מספר המקרים בהם $AC\cdot CD\ge DB^2$, נוכל לקבל קירוב טוב מאוד של π.