הנושא: שימוש בכלים טכנולוגיים לבניות גיאומטריות באמצעות מחוגה בלבד

הוכן ע״י: עבוד אליאס.

תקציר: שני תהליכי בנייה מתוארים במאמר, שניהם בסיסיים ביותר כאשר מותר השימוש בסרגל (ללא שנתות) ובמחוגה בלבד. אלא שכאן מותר השימוש במחוגה בלבד. המחבר ממליץ על החלפת המחוגה המסורתית בתוכנות של גיאומטריה דינאמית, המדמות את השימוש במחוגה.

מילות מפתח: כתב העת על״ה, על״ה 34, גיאומטריה, הנדסה, גיאומטרית המישור, הנדסת המישור, בנייה גיאומטרית, בניות, מחוגה, משפט מצ׳רוני, הוכחה, הוכחת קיום, משולש, משולש שווה- צלעות, משולש שווה- שוקיים, מרכז הכובד, מרכז כובד של משולש שווה צלעות, מעגל, אמצע קטע, מעגל, מחוג, נקודת חיתוך, משולשים חופפים, מרובע, מעוין, אלכסון, עזרי הוראה, מחשב.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 34, תשס״ה 2005, עמוד 59-63.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 5 עמודים.

ale34-13

שימוש בכלים טכנולוגיים לבניות גיאומטריות באמצעות מחוגה בלבד

אליאס עבוד*
eabboud@beitberl.ac.il
המכון האקדמי הערבי, בית ברל
המכללה האקדמית הערבית , חיפה

מבוא

נושא הבניות הגיאומטריות באמצעות סרגל ומחוגה הוא עתיק יומין, אך מעורר את הסקרנות עד עצם היום הזה. היוונים השתמשו בסרגל (ללא שנתות) ובמחוגה לבניית ישרים ומעגלים, לחציית קטע, חציית זווית, העברת אנך לישר בנקודה עליו, העברת אנך לישר מנקודה מחוץ לו ובניית מצולעים משוכללים. ההנחה היסודית בבניה באמצעות סרגל ומחוגה היא, כי ניתן לבנות קטע ולקבוע את אורכו כיחידה אחת, ואז מקטעים נתונים ניתן לבנות גם קטעים חדשים. מובן כי יש מגבלות לשני כלים אלה. למשל: בהינתן קוביה, לא ניתן לבנות קטע שיתאים לצלעה של קוביה, אשר נפחה גדול פי שניים מנפח הקוביה הנתונה; לא ניתן לחלק זווית לשלושה חלקים שווים; בהינתן עיגול, לא ניתן לבנות קטע שיתאים לצלע ריבוע השווה לו בשטחו – אלה הן שלוש בעיות הבניה הקלאסיות מימי היוונים (ר' [3]) .

בשנת תשס"ב נערך על-ידי "קשר חם" בית-ספר קיץ בטכניון שעסק בחידושים בהוראת הגיאומטריה. במסגרתו נכללה הרצאה של פרופ' דוד צילג מהפקולטה למתמטיקה בטכניון, בנושא 'סרגל ומחוגה' (ר' [1]). פרופ' צילג הדגיש בהרצאתו את שלוש בעיות הבניה הקלאסיות והתייחס אל 'הפרת הכללים' שעשה ארכמידס כאשר השתמש בסרגל שמסומנות עליו שתי נקודות בכדי לחלק זווית לשלושה חלקים שווים.

בהרצאה גם הודגש המשפט, המתחבר למאמר זה באופן ישיר, של האיטלקי מצ'רוני (Mascheroni) משנת 1797, הטוען כי "כל מה שאפשר לבנות בעזרת סרגל ומחוגה ניתן לבנות בעזרת מחוגה בלבד" (ר' [6]).

ההוכחה של משפט מצ'רוני היא הוכחת קיום, היא אינה מספקת דרך קונסטרוקטיבית לכל בניה, כך שלכל בעיה יש למצוא את התהליך באופן עצמאי.

נציין כאן שיש מחברים שהגבילו את הכלים באופן שונה או החליפו אחד מהם בכלי אחר וכך הצליחו לקבל תוצאות מעניינות (ר' [2], [4]).

במאמר הנוכחי נתנסה בהגבלת כלי הבניה הגיאומטריים למחוגה בלבד. משמעות הדבר שבהינתן תנאי התחלה כלשהם אנו יכולים לבנות נקודות חדשות במישור המתקבלות על-ידי חיתוך מעגלים בלבד ולא ניתן לחבר בין הנקודות המתקבלות על-ידי ישר. מובן כי, נקודות חדשות יכולות להוות מרכזים של מעגלים חדשים, ושתי נקודות יכולות להגדיר מחוג של מעגל חדש.

היוזמה לכתיבת המאמר באה לאחר שאחד מעמיתי במכללת מאר אליאס-אעבלין הציג את השאלה המנוסחת להלן כבעיה I ועל כך נתונה לו תודתי. הוא ציין כי חברת אינטל מציגה שאלה זו למרואיינים במבחני הקבלה לעבודה. שאלה זו עוררה גם את סקרנותם של בעלי מקצוע אחדים, ביניהם נגר, בנאי וארכיטקט.

בעיה I מופיעה ב-[6], כאחת הבעיות ברשימה של בעיות בניה בעזרת מחוגה בלבד. הפתרון שנביא כאן שונה במקצת מהפתרון המוצג שם. הקוראים מוזמנים להשוות בין שניהם.

* המחבר מודה לעורכת על ההערות ששיפרו מאוד את הצגת המאמר.

להלן שתי הבעיות שנעסוק בהן:

בעיה I בהינתן שתי נקודות במישור, יש לבנות בעזרת מחוגה בלבד את נקודת האמצע של הקטע המחבר ביניהן.

בעיה II בהינתן שלוש נקודות במישור הנמצאות במרחקים שווים זו מזו, יש לבנות בעזרת מחוגה בלבד את מרכז הכובד של המשולש שווה-הצלעות, אשר קדקודיו הם הנקודות הנתונות.

במאמר יוצגו תהליכי בניה לפתרון שתי הבעיות ויתואר ביצוע הדמיה לתהליכים אלה בכלים טכנולוגיים. הכלים הטכנולוגיים יכולים להיות כל לומדה בגיאומטריה כמו למשל, משער גיאומטרי, הנדסה בתנועה, פיתגורס, SketchPad או wingeom אשר ניתן להוריד מהאינטרנט [5].
השימוש בכלים הטכנולוגיים מקל הן בשל הדיוק והן בשל מהירות הביצוע, אך ניתן גם לדבוק בכלי המסורתי – המחוגה. תיאור הבניות יעזור לבצע את העבודה באופן ידני.
יתרון נוסף של הכלי הטכנולוגי הוא קיום מעקב אחר הבניות. בחלק מהלומדות ניתן להפיק דיווח מפורט על שלבי הבניה שבוצעו.

מעתה ואילך כל הבניות שנבצע הן באמצעות מחוגה בלבד ולא נזכיר עוד הגבלה זו.

I. בניית נקודת האמצע של קטע

<u>תיאור התהליך</u>

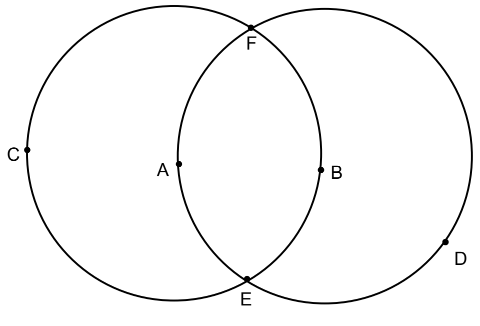
בהינתן שתי נקודות A, B:

- בונים את הנקודה K הנמצאת על הישר המכיל את הנקודות A, B ואשר מקיימת את המשוואה $AK = 2AB$.
- בונים משולש שווה שוקיים ΔABO שבו: $AO = BO = AK = 2AB$.
- נקודות האמצע של השוקיים במשולש ΔABO מהוות מרכזים של מעגלים במחוג AB אשר נחתכים (בנוסף לנקודה O) בדיוק בנקודת האמצע של הקטע המחבר בין שתי הנקודות A, B.

נעבור כעת על תהליך הבניה צעד אחר צעד ובו זמנית נסח ונוכיח את המשפטים הגיאומטריים הנדרשים להצדקת הבניה. הקורא מתבקש להשלים חלק מהפרטים החסרים.

שלב 1

סמנו שתי נקודות שונות במישור A, B ובנו את המעגל C בעל מרכז A ומחוג AB ואת המעגל D בעל מרכז B ומחוג AB. קבעו את נקודות החיתוך E, F (ציור 1).

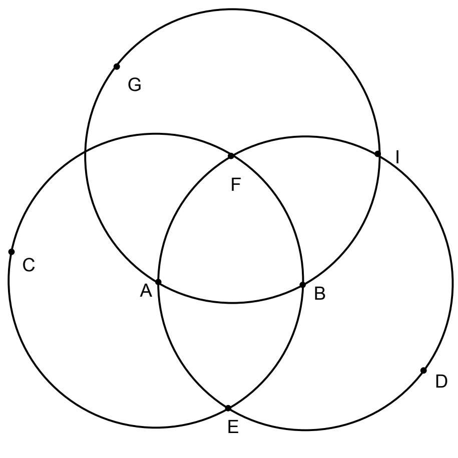


ציור 1

בשלב זה תקבלו שתי נקודות חדשות F, E שכל אחת מהן יוצרת משולש שווה צלעות עם הנקודות A, B. הצדיקו!

שלב 2

בנו את המעגל G בעל מרכז F ומחוג AB וקבעו את נקודת החיתוך החדשה I של המעגלים D ו- G (ציור 2).

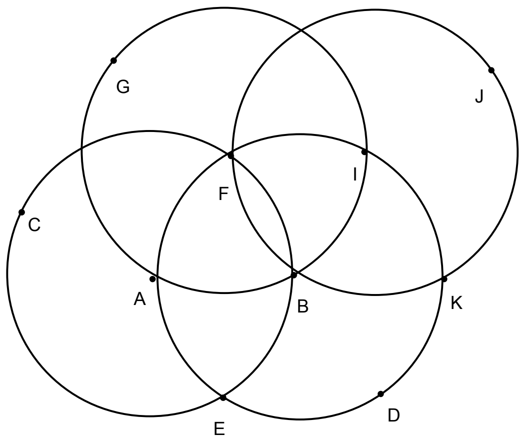


ציור 2

הנקודה I יוצרת משולש שווה צלעות עם הנקודות B, F החופף למשולש ABF. הוכיחו!

שלב 3

בנו את המעגל J בעל מרכז I ומחוג AB וקבעו את נקודות החיתוך החדשה K של המעגלים שעליהם הנקודות D ו- J (ציור 3).



ציור 3

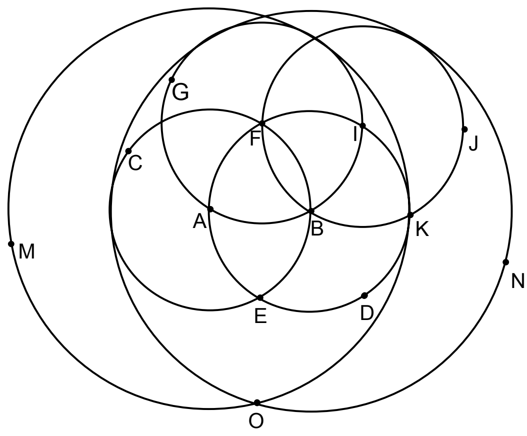
שוב: הנקודה K יוצרת משולש שווה צלעות עם הנקודות I ו- B החופף לשני המשולשים הקודמים ABF, BIF.

<u>משפט 1</u> הנקודה K נמצאת על הישר העובר דרך AB ומקיימת: $AK = 2AB$.

הוכיחו משפט זה !

שלב 4

בנו את המעגלים: M בעל מרכז A ומחוג AK ו-N בעל מרכז B ומחוג AK והגדירו את נקודות החיתוך O, P שלהם (ציור 4).

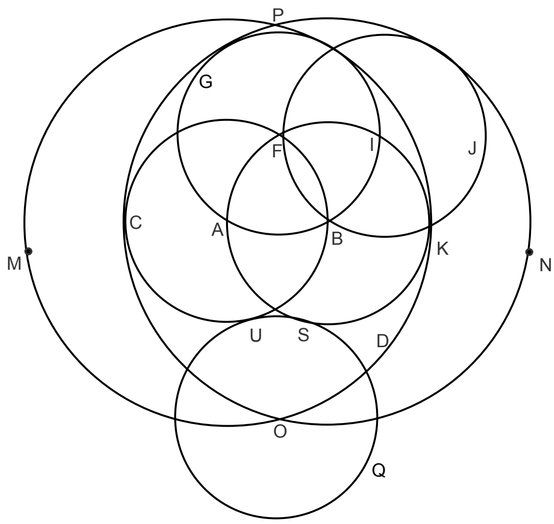


ציור 4

על-סמך משפט 1, הנקודה O יוצרת משולש שווה שוקיים OAB שבו אורך השוק שווה לפעמיים אורך הבסיס AB. האם אתם מבחינים בעובדה זו?

שלב 5

בנו מעגל Q בעל מרכז O ומחוג AB וקבעו את נקודת ההשקה S של המעגלים Q ו-D ונקודת ההשקה U של המעגלים Q ו- C (ציור 5).

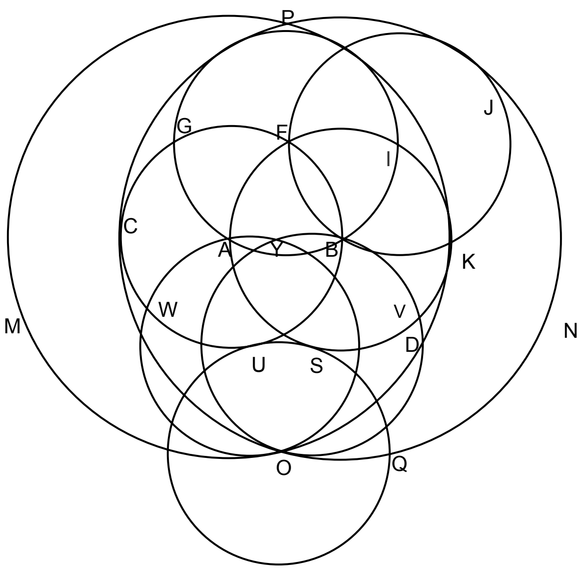


ציור 5

הנקודות U, S הן נקודות האמצע של השוקיים במשולש OAB. נא לנמק!

שלב 6

בנו את המעגל V בעל מרכז S ומחוג AB ואת המעגל W בעל מרכז U ומחוג AB. שני המעגלים נחתכים בנקודה O ובנקודה חדשה Y (ציור 6).



ציור 6

הגענו למטרה שלנו!!!

<u>משפט 2</u> Y היא נקודת האמצע של הקטע AB.

הוכחה: המרובע $OUYS$ הוא מעוין (ציור 6) (מדוע?), האלכסונים במעוין מאונכים זה לזה וחוצים זה את זה. כלומר OY הוא אנך אמצעי לקטע US. מצד שני, נקודת האמצע Y' של הבסיס AB יוצרת מעויין $OUY'S$, מפני ש- U, S הן נקודות האמצע של השוקיים OA ו- OB במשולש OAB. יוצא אפוא ששתי הנקודות Y, Y' נמצאות על האנך לקטע US ושתיהן יוצרות מעוין עם שלוש הנקודות U,O ו- S . אך יש נקודה אחת ויחידה כזו, לכן $Y'=Y$. דהיינו, Y היא נקודת האמצע של הקטע AB.

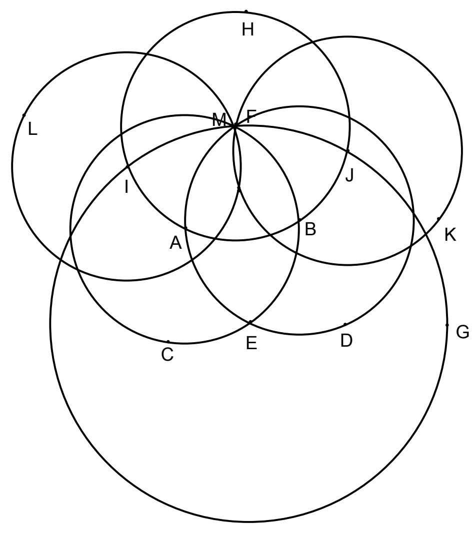
II. בניית מרכז הכובד של משולש שווה צלעות

<u>תיאור התהליך</u>

בהינתן שתי נקודות A, B במישור נקבע משולש שווה צלעות אחד ויחיד עד כדי חפיפה. נבנה קדקוד שלישי של המשולש ונחפש את מרכז הכובד שלו:

- בונים את המעגלים: C בעל מרכז A ומחוג AB ו- D בעל מרכז B ומחוג AB. קובעים את נקודות החיתוך E, F של שני המעגלים C, D.
- בונים את המעגלים: G בעל מרכז E ומחוג FE ו-H בעל מרכז F ומחוג AB. קובעים את נקודות החיתוך I, J של שני המעגלים G, H.
- בונים את המעגלים: K בעל מרכז J ומחוג AB ו-L בעל מרכז I ומחוג AB. קובעים את נקודות החיתוך M, N של שני המעגלים K, L.

בציור 7, הנקודה M היא מרכז הכובד של המשולש שווה הצלעות אשר קדקודיו הם A, B, F:



ציור 7

המשפטים ההנדסיים לאימות הבניה

<u>משפט 3</u>

תהיינה נתונות שתי נקודות A, B במישור. תהיינה F, E שתי נקודות החיתוך של המעגל C, בעל מרכז A ומחוג AB, והמעגל D, בעל מרכז B ומחוג AB. תהיינה I, J שתי נקודות החיתוך של המעגל H, בעל מרכז F ומחוג AB והמעגל G, בעל מרכז E ומחוג EF. אם נבנה את שני המעגלים K, בעל מרכז J ומחוג AB והמעגל L, בעל מרכז I ומחוג AB אזי, הם יחתכו בשתי נקודות, אחת מהן היא F והשניה M היא מרכז הכובד של המשולש ΔABF.

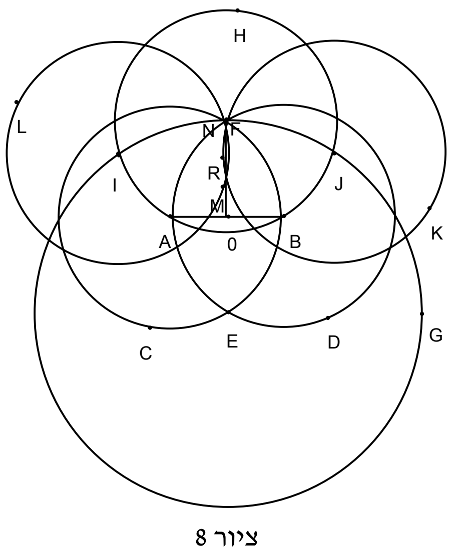
הוכחה: אחת משתי נקודות החיתוך היא F מפני ש- I, J נמצאות על המעגל H ולכן מרחקן מ-F שווה ל- AB. כלומר המעגלים K, L עוברים שניהם בנקודה F (ציור 7). נראה כעת כי M היא מרכז הכובד של המשולש ΔABF. לשם כך אנו נראה כי M נמצאת על האנך האמצעי של AB במשולש ΔABF ומחלקת אותו ביחס $1:2$.

המרובע $EIFJ$ הוא דלתון ולכן FE הוא אנך אמצעי של הקטע IJ. מצד שני, המרובע $MIFJ$ הוא מעויין ולכן FM הוא אנך אמצעי של IJ.

מכאן נובע כי M נמצאת על EF (מדוע?).

המרובע $AFBE$ הוא מעוין ולכן EF אנך אמצעי לקטע AB. דהיינו, M נמצאת על האנך האמצעי של AB!

להמשך ההוכחה נעזר בגיאומטריה האנליטית. נשכן את ציור 7 במערכת צירים x-y שבה נקודת האמצע O של הקטע AB היא ראשית הצירים (ראה ציור 8).



ציור 8

בהנחה שאורך הקטע AB הוא a נובע כי שיעורי הנקודות A, B הם $(-a/2\,,0)$ ו- $(a/2,0)$ בהתאמה.

המשולש FOB הוא ישר זווית, בו אורך הניצב OB הוא $a/2$ ואורך היתר FB הוא a. לפי משפט פיתגורס נובע כי אורך הניצב OF הוא $y_F=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ (בידקו).

J היא נקודת החיתוך של שני המעגלים G ו-H. לכן, שיעורי הנקודה J מתקבלים מפתרון שתי המשוואות המייצגות שני מעגלים אלה.

המעגל G: מרכזו בנקודה: $E(0,-\frac{\sqrt{3}}{2}a)$, ואורך מחוגו: $EF=2y_F=\sqrt{3}a$. כלומר משוואת המעגל G היא:

$$x^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2=3a^2$$

מצד שני המעגל H: מרכזו בנקודה: $F(0\,,\frac{\sqrt{3}}{2}a)$

ואורך מחוגו a. משוואת המעגל H היא:

$$x^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2=3a^2$$

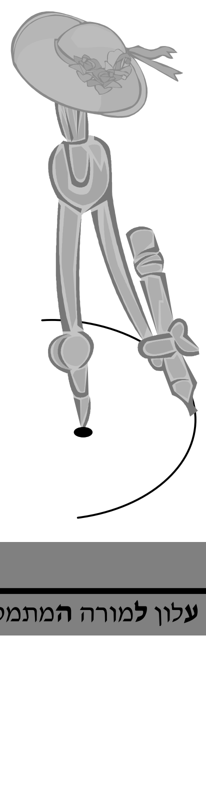
חילוץ y משתי המשוואות האחרונות נותן (וודאו!):

$$y_J=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

M נמצאת על OF שהוא אנך אמצעי לקטע AB ולכן שיעורי M הם $(0,t)$. נביע כעת את t כפונקציה של a.

המרובע $IFJM$ הוא מעוין ולכן אלכסוניו ניצבים זה לזה וחוצים זה את זה. נסמן ב-P את נקודת המפגש של שני האלכסונים, אזי:

$$y_P=y_J=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$$



אך P היא נקודת האמצע של הקטע MF ולכן:

$$y_P=\frac{y_M+y_F}{2}$$

מכאן נובע כי:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}a=\frac{t+\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2}$$

ובאופן שקול:

$$y_M=t=\frac{\sqrt{3}}{6}a$$

על כן:

$$\frac{y_M}{y_F}=\frac{1}{3}$$

יוצא אפוא כי M מחלקת את התיכון OF ביחס 1:2 ולכן היא נקודת המפגש של שלושת התיכונים במשולש. זוהי, כמובן, נקודת מרכז הכובד במשולש שווה הצלעות.

מקורות

1. Arthur Baragar, Constructions Using a Compass and Twice-nothched Straightedge, Amer. Math. Monthly, 109 (2002), no.2, 151-164 .
2. I.N. Herstein , Topics in Algebra , 2 nd edition John Wiley & sons , Inc., New York, 1975.
3. Peter Y. Woo, Straightedge Constructions, Given a Parabola, College Math. J. 31 (2000), no.5, 362-372
4. http://math.exeter.edu/rparris
5. http://www.cut-the knot.com/do_you_ know/compass.shtml
6. דוד צילג, סרגל ומחוגה, "קשר חם", המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים-טכניון, תשס"ב.