הנושא: ביטויים אלגבריים וטיפול בהם בהקשר של פתרון משוואות ואי-שוויונים

הוכן ע"י: אלכס חייט.

תקציר: במאמר מוצגים עיקרי החשיבה האלגברית בהקשר של טיפול בביטויים המרכיבים משוואות ואי-שוויונים. מודגש במיוחד הטיפול במשוואות המכילות שורשים ופרמטרים המשפיעים על תחום ההצבה.

מילות מפתח: כתב העת עלי"ה, עלי"ה 34, אלגברה, טכניקה אלגברית, ביטוי אלגברי, זהות, משוואה, אי שוויון, פתרון משוואות, תחום הצבה, פסוק אמת, נעלם, פרמטר, משתנה, משוואה אי-רציונאלית, מספרים ופעולות, פעולות חשבון, חזקות ושורשים.

החומר פורסם במסגרת: עלי"ה 34, תשס"ה 2005, עמוד 64-69.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 6 עמודים.

תכנים בתכנית

ביטויים אלגבריים וטיפול בהם
בהקשר של פתרון משוואות ואי-שוויונים

אלכסנדר חייט
khait@vms.huji.ac.il
המרכז להוראת המדעים, האוניברסיטה העברית, ירושלים

פתח-דבר

משיחותיי עם מורים למתמטיקה נראה לי שחסר טקסט המתמצת את עיקרי החשיבה האלגברית בהקשר של טיפול בביטויים המרכיבים משוואות ואי-שוויונים. מטרתי היא להשלים את החסר ולהציג את החשיבה האלגברית בהקשר הנזכר על בסיס חומר מצומצם ככל האפשר, אך עשיר דיו כדי להבהיר את הנקודות המהותיות. המאמר מיועד למורים (ולא לתלמידים) לכן הדוגמאות הן ברמה גבוהה יותר מאשר זו של תוכנית הלימודים. יחד עם זאת, חלק מהבעיות הנדונות במאמר מתפרקות לבעיות משנה, אשר יכולות לשמש כדוגמאות עצמאיות, פשוטות יותר מהבעיות המקוריות. המאמר מתרכז בשיטת פתרון שהיתרון שלה בכלליותה. כאשר מדובר בבעיות ספציפיות, קיימות לעתים שיטות אחרות, אשר עשויות להיות יעילות יותר לאותם מקרים.[1]

רוב הדוגמאות במאמר זה הן בנושא פתרון משוואות אי-רציונליות. ברצוני להדגיש שהנושא נבחר לא בגלל חשיבות מיוחדת שאני מייחס לו , אלא מפני שמשוואות כאלו מאפשרות להציג את השיטות של טיפול בביטויים אלגבריות באופן מרוכז.

ביטויים אלגבריים

בביטוי אלגברי מופיעים שלושה סוגים של עצמים: מספרים, פרמטרים, ונעלמים. על העצמים האלה אפשר להפעיל את הפעולות הבאות: חיבור, חיסור, כפל, חילוק, חזקה (לרוב, שנייה ברמת ביה״ס העל יסודי), ושורש (לרוב, ריבועי, ברמת ביה״ס העל יסודי).

[1] נציין במיוחד את שיטת 'הניחוש האינטליגנטי'. הפילוסופיה העומדת מאחוריה הפוכה מזו המוצגת במאמר הנוכחי. ר' Khait, A.(2004) "Intelligent guesses and numerical experiments as legitimate tools for secondary school algebra". *Teaching Mathematics and its Applications*, 22 (1), 33-40.

הפעולות האלו מקשרות בין רכיבים יסודיים ובונות מהם ביטוי מורכב אחד, למשל:

$$a+b,\ ax^2+bx+c,\ \sqrt{x-4},$$
$$\sqrt{x^2-x+10},\ \frac{\sqrt{x+a}}{ab-8}$$

נהוג לסמן נעלמים על-ידי האותיות האחרונות של האלפבית הלועזי: x,y,z (גם u,v,w) ואילו פרמטרים – על-ידי האותיות הראשונות: a,b,c,d (אך גם: m,n,p,q). אין זה חוק אלא נוהג, ובכל מקרה של אי-בהירות יש לציין במפורש מה מסמלת כל אות, פרמטר או נעלם. יתר על כן, פרמטר בבעיה יכול לקבל תפקיד של נעלם בבעיית עזר נלווית לה, כפי שנראה בדוגמאות בהמשך.

ביטויים אלגבריים מתפקדים בשפה המתמטית כשמות עצם. משפט מלא בשפה לא יכול להיות מורכב משם עצם אחד בלבד, וגם לא ממספר שמות עצם ללא קישורים ביניהם. כדי שמשפט יהיה מלא הוא צריך לכלול מרכיבים נוספים, ובעיקר איזושהי 'קביעה' על אודות העצם, או העצמים. תבנית של משפט טיפוסי (sentence) בהקשר הנדון במאמר זה בנויה משני ביטויים ויחס ביניהם יחד עם מילות הקדמה המכילות כמתים (״לכל...״ או ״קיים...״). קביעת קיומו של יחס בין הביטויים היא טענת המשפט. היחסים הם משני סוגים:

- שוויון; רישום: $A=B$, כאשר A ו-B ביטוים אלגבריים.
- אי-שוויון: ביטוי אחד גדול (או: גדול-או-שווה מביטוי שני; רישום $A<B$ (או $A\le B$) כאשר A ו-B ביטוים אלגבריים.

אם השוויון הוא זהותי, מתאים לרשום בראש המשפט את המלים: ״עבור כל a ו-b ממשיים מתקיים:...״
לדוגמה: עבור כל a ו-b ממשיים מתקיים:
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

ללא התוספת של מילים מקדימות האמירה אינה שלמה. משפט כזה יכול להופיע כטענה כוללת, או

כמשימה. המשימה במקרה כזה יכולה להיות משימת הוכחה, שאכן תחום הערכים של הפרמטרים, עבורם מתקיים השוויון הוא כל הממשיים. ייתכן שהתלמידים יגיעו למסקנה שהתחום הוא אפילו רחב יותר וכולל את כל המרוכבים. לעתים קרובות בספרי לימוד המילים "עבור כל" לא מופיעות באופן מפורש.

בדומה לזהות שהיא *טענה* הקובעת ששוויון מתקיים עבור כל הערכים המספריים שניתן להציב במקום הפרמטרים, משוואה גם היא *טענה* המכילה שוויון אבל טוענת לקיום של ערכים מסוימים המקיימים אותו. למשל: קיימים x, y כך ש: $x+y=15$.

במשוואה אפשר לראות שאלה: האם קיימים ערכים של הנעלמים המספקים את המשוואה ואם כן מהם כל אותם ערכים. במשוואה עם פרמטר משימה טיפוסית היא עבור כל ערך של פרמטר למצוא את כל הערכים של המשתנים המספקים את המשוואה[2].

את ההבדל בין פרמטר לנעלם במשוואות ואי-שוויונים אפשר לתאר במונחים של ההבדל בין קלט לפלט. הפרמטר נתפש כערך מספרי קבוע הנתון מראש. במונחים של אלגוריתם הפותר את המשוואה או האי-שוויון, הפרמטרים מתפקדים כקלט. הערכים של הנעלמים מתקבלים כתוצאה מהפעלת האלגוריתם ומוחזרים כפלט[3]. ערך הנעלם המתקבל כפתרון עשוי להיות תלוי בפרמטרים. שינויים בערכי הפרמטרים מעבירים אותנו ממשוואה (או אי-שוויון) אחת לאחרת. אם נציב במשוואה או באי-שוויון במקום הנעלמים את הפתרון, נקבל תבנית המבטאת יחס (שוויון או אי-שוויון) בין מספרים או בין ביטויים עם פרמטרים.

דוגמה

נביט במשוואה: $ax-2=0$

נתייחס לשתי משימות:

האחת: הצבה של ערכים שונים במקום הפרמטר לצורך קבלה של משוואות שונות:

$$a=1 \Rightarrow x-2=0; \qquad a=(-1) \Rightarrow (-x)-2=0$$

$$a=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}x-2=0; \qquad a=0 \Rightarrow (-2)=0$$

בהמשך לנאמר קודם, בביטוי האחרון אפשר לראות משוואה (בנעלם x) שאין לה פתרון. זאת דוגמה המדגישה את ההבדל בין קריאת התבנית כשאלה בהקשר של משוואה לעומת קריאתה כטענה.

השניה: מציאת פתרון למשוואה הכללית, כתלות בפרמטר. לאחר מציאת פתרון כזה, הצבתו במשוואה נותנת פסוק אמת: $ax-2=0\,, a\neq 0 \Rightarrow a\cdot\frac{2}{a}-2=0$

שאלות הנשאלות בהקשר של ביטויים אלגבריים

בהקשר לתבנית המציגה יחס בין שני ביטויים אלגבריים מקובל לשאול שני סוגים של שאלות:

1. מהם התחומים בהם הביטויים הם בעלי משמעות? כלומר מהם הערכים של הפרמטרים ושל הנעלמים שעבורם יש משמעות לשני הביטויים המרכיבים את היחס?[4] התשובות לגבי הנעלמים עשויות להיות תלויות בפרמטרים.
2. מהו הפתרון של המשוואה או האי-שוויון המוצג על-ידי התבנית, כלומר מהם הערכים של הנעלמים שעבורם מתקיים היחס הנתון בין שני הביטויים.

שיטת הפתרון שבה נדון במאמר זה מתבססת על מתן תשובה לשאלה הראשונה לפני דיון בשאלה השניה, כלומר נמצא את הערכים של הפרמטרים והנעלמים שעבורם יש לביטויים משמעות[5] לפני שנדון ביחס בין הביטויים.

טיפול בשאלה הראשונה

נדון בשני המקרים שבהם לביטוי אלגברי אין משמעות[6]:

א. כאשר אחד מן האיברים שבביטוי מחולק באפס.

ב. כאשר אחד מן האיברים שבביטוי הוא שורש ריבועי (שורש ממעלה זוגית) של מספר שלילי.

א. חוסר משמעות הנובע מחילוק באפס

נבחין בין שני מקרים:

1) לביטוי $5+\frac{2}{a-1}$ אין משמעות כאשר $a=1$ כיוון שבמקרה זה אחד מהאיברים בביטוי מחולק ב-0.

---

[2] נשים לב שגם התבנית הפשוטה: $b=b$, יכולה לקבל מעמד של זהות או מעמד של משוואה. כמשוואה בנעלם x קבוצת הפתרונות שלה היא כמובן קבוצת המספרים הממשיים. בשל כך היא גם זהות.

[3] ראייה של הפרמטרים כקלט ושל הנעלמים כפלט עוזרת להבהיר את ההבדלים בין שני סוגי העצמים ומכאן חשיבותה מבחינה דידקטית.

[4] השאלה הזאת מזכירה שאלה על תחום ההגדרה של פונקציות. הסיבה היא כי בשני הביטויים המרכיבים יחס אפשר לראות שתי פונקציות ולפרש את המשוואה כשאלה: 'מהם ערכי הנעלמים, שעבורם שתי הפונקציות מקבלות ערכים שווים?' מאידך, בהקשר הנוכחי אין שום צורך להתייחס לביטויים הנדונים כאל פונקציות.

[5] אפשר ללכת גם בדרך ההפוכה: קודם למצוא את הפתרונות ללא התחשבות במגבלות ורק אחר-כך להתייחס למגבלות. היתרון של השיטה המוצגת כאן היא שבמקרה והפתרון מורכב מכמה שלבים ויש פתרונות סרק, הפתרונות האלה מתבטלים בשלב מוקדם וכך נחסך מאמץ מיותר של גרירתם לשלב הסופי. אולם לעיתים ביצוע השלב הראשון הוא מסורבל בעוד ביצוע השלב השני, למרות שצצים בו פתרונות סרק, הוא משימה הרבה יותר פשוטה. מומלץ על-כן לשקול איזו שיטה כדאית לפי המקרה.

[6] במאמר זה לא נעסוק באי הגדרה של פונקציות מעריכיות, לוגריתמיות, טריגונומטריות ואחרות.

2) לביטוי $5+\frac{x}{x-a}$ אין משמעות כאשר $x=a$ כיוון שבמקרה הזה אחד מהאיברים בביטוי מחולק ב-0. בפרט, נשים לב כי לביטוי הזה אין משמעות כאשר $x=a=0$.

ב. חוסר משמעות הנובע מחישוב / הוצאת שורש של מספר שלילי

נבחין גם כאן בין שני מקרים:

1) לביטוי $(-b)+\sqrt{b^2-4ac}$ אין משמעות כאשר $b^2<4ac$, כי במקרה זה אחד מהאיברים בביטוי הוא שורש של מספר שלילי.

2) לביטוי $a+\sqrt{x-a}$ אין משמעות כאשר $x<a$, כיוון שבמקרה זה אחד מן האברים בביטוי הוא שורש של מספר שלילי.

כאשר לאחד מן האיברים בביטוי אין משמעות, אין משמעות לביטוי כולו.

טיפול בשאלה השניה

אחרי שמצאנו את תחומי התקפות של הביטויים בתבנית, כלומר מצאנו ערכים של נעלמים ופרמטרים שעבורם לביטויים יש משמעות, נחפש את הערכים של הנעלמים, שעבורם מתקיים היחס הנתון בין הביטויים. לשם כך נשנה את הביטויים בשני הצדדים של היחס באופן שהתבנית שתתקבל לאחר השינוי תהיה שקולה לתבנית המקורית. ממשיכים בתהליך הזה עד שמגיעים לערכים הנדרשים.

קיימים שלושה מקרים שבהם יש להיזהר במיוחד:

אזהרה א: כאשר כופלים שני אגפים של אי-שוויון במספר שלילי, הכיוון של האי-שוויון משתנה. לדוגמה: אם נכפיל את שני האגפים של האי-שוויון: $2<7$ ב-(-1) נצטרך להקפיד להפוך את כיוון הסימן של האי-שוויון, כדי לשמור על נכונות היחס: $(-2)>(-7)$.

אזהרה ב: מותר להעלות שני אגפים של משוואה או של אי-שוויון בריבוע רק אם ידוע שבשני האגפים נמצאים ביטויים בעלי אותו סימן (חיוביים או שליליים). אם שני הביטויים חיוביים אז כיוון האי-שוויון המתקבל אחרי ההעלאה בחזקה אינו משתנה: $4>3$ וגם: $16>9$; אם שני הביטויים באי-שוויון שליליים אז כיוון הסימן של האי-שוויון המתקבל אחרי העלאה בחזקה מתהפך: $(-4)>(-6)$ אולם $16<36$; אם אין וודאות שלשני הביטויים בשני האגפים של האי-שוויון יש אותו סימן, *אסור* להעלות אותם בחזקה זוגית, כי אי-אפשר לחזות מראש מה תהיה תוצאה של הפעולה הזאת: $3>(-2)$ וגם $9>4$; $3>(-4)$, אך $9<16$; $3>(-3)$ ואילו $9=9$.

אזהרה ג: כאשר במשוואה מופיע שורש ריבועי ללא כל סימן לפניו, הכוונה היא לשורש החיובי; אי-התחשבות בכלל הזה עשויה להביא לפתרונות סרק: למשל פתרון של המשוואה $\sqrt{x}-3=0$ הוא $x=9$. למשוואה $\sqrt{x}+3=0$ אין פתרון כי אסור להחליף $\sqrt{9}$ ב- (-3).

כאשר פותרים משוואה או אי-שוויון, חשוב מאד:

1) לא לאבד פתרון כלשהו, כי המטרה היא למצוא את כל אותם הערכים שניתן להציב במקום הנעלמים שמקיימים את המשוואה או האי-שוויון.

2) לבטל פתרונות סרק שנוגדים אחת מההגבלות המתקבלות במהלך הפתרון.

דוגמאות[7]

דוגמא I – דוגמא לשאלה מסוג ראשון

יש למצוא את כל הערכים של x שעבורם יש משמעות לביטוי: $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}+\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}}$

כדי שלביטוי זה תהיה משמעות יש לדרוש שהמכנה לא יתאפס ושכל הביטויים הנמצאים בתוך סימנים של שורשים ריבועיים לא יהיו שליליים. בלשון של תורת הקבוצות הדרישה שלכל תת-הביטויים תהיה משמעות *בבת אחת* פירושה שצריך למצוא את תחום החיתוך של אותם תחומים שעבורם ישנה משמעות עבור כל אחד מתת-הביטויים יחד עם התחום שבו המכנה שונה מאפס.

בדוגמה שלנו מחפשים חיתוך בין תחומים:

$x\ge(-1),\ x\le 1,\ x\ge(-5),\ x\ge 0,\ x\ne 0$

והפתרון הוא $0<x\le 1$.

הדוגמאות הבאות מתאימות לשאלות מהסוג השני.

דוגמה II

נפתור את המשוואה: $\sqrt{x+4}=x+1$

ראשית נבדוק עבור אילו ערכים של x יש משמעות לביטויים המרכיבים אותה. כיוון שבאגף השמאלי

---

[7] מומלץ לפתור את התרגילים באופן עצמאי קודם העיון בפתרונות. למרות שנדמה לעיתים שקל יותר לעקוב אחרי מהלך פתרון כתוב, הדבר אינו בהכרח נכון. כדי לעקוב אחרי פתרון של פותר אחר נדרש ריכוז רב יותר מאשר זה הנחוץ כדי להגיע לפתרון לבד. התחושה שיכבה אני לומד' היא מדומה. אני ממליץ לקוראים ליישם את הגישה הזאת גם בכיתות, כי האשליה של לימוד פסיבי היא מאד נפוצה ומזיקה.

מופיע שורש ריבועי יש לדאוג שהביטוי שמתחת לשורש לא יהיה שלילי: $(-4) \le x$.

אחרי שמצאנו עבור אילו ערכים של x לביטויים שבמשוואה יש משמעות, נחפש מבין הערכים הללו את אלה שעבורם מתקיים השוויון. לשם כך נעלה את שני האגפים בריבוע. כאן יש להיזכר באזהרות ב ו-ג: באגף שמאל מצוי ביטוי אי-שלילי, לכן יש לדרוש שגם באגף ימני יימצא ביטוי אי-שלילי, כלומר: $(-1) \le x$.

ובכן קיבלנו שתי מגבלות שחייבות להתקיים *ביחד*: $(-4) \le x$ וגם $(-1) \le x$.

המגבלה השנייה חזקה מהראשונה (אם $(-1) \le x$ אז בהכרח $(-4) \le x$) לכן יש למצוא את הפתרונות של המשוואה $x+4=(x+1)^2$ אשר מקיימים את התנאי $(-1) \le x$ או בכתיבה מתמטית מקובלת:

$$x+4=(x+1)^2 , x \ge (-1)$$

נקבל:

$$x^2+x-3=0 , x \ge (-1)$$

מפתרון המשוואה הריבועית נקבל:

$$x^2+x-3=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{(-1)\pm\sqrt{13}}{2}$$

נבדוק את כל אחד מהפתרונות האלה מול ההתניה. מתקיים:

$$\frac{(-1)-\sqrt{13}}{2}<(-1); \quad \frac{(-1)+\sqrt{13}}{2}>(-1)$$

בתהליך התקבל פתרון סרק, אותו יש לפסול. למשוואה יש פתרון אחד.

הערה: במקרה שבמהלך פתרון משוואה יש צורך להעלות שני אגפים בריבוע, לעתים נוח יותר לדלג על מציאת ההתניה לפתרונות, ולהתחיל מיד במציאת הפתרונות של המשוואה לאחר העלאה בריבוע. לבסוף יש לבדוק האם כל אחד מהפתרונות המתקבלים בתהליך הזה הוא פתרון סרק או לא. מוצע לנהוג כך, כאשר למציאת ההתניה נדרש פתרון של מערכת אי-שוויונים מסובכת.

דוגמה III

נפתור את המשוואה:

$$\frac{1}{x-a}=\frac{1}{\sqrt{2x}} \qquad (1)$$

ראשית נבדוק מהם הערכים של הפרמטר והנעלם עבורם יש משמעות לביטויים שבמשוואה.
היות ובביטוי שבאגף שמאל מופיע פרמטר, אפשר לצפות שתחום התקפות של הביטוי יהיה תלוי בפרמטר.
ובכן יש לבדוק שבביטויים לא יופיע חילוק ב-0 וגם לא יופיעו שורשים מסדר זוגי של מספרים שליליים.

מהאגף השמאלי של השוויון מקבלים את המגבלה: $x \ne a$ ומהאגף הימני נקבל: $x \ne 0 , x \ge 0$. משני האגפים ביחד, היות ואגף ימין הוא חיובי, נקבל כי גם אגף שמאל צריך להיות חיובי לכן נדרוש גם: $x > a$.

אנו דורשים שכל שלושת התנאים יתקיימו בבת אחת, כלומר אנו מחפשים את תחום החיתוך של התחומים שבהם מתקיים כל תנאי בנפרד. נקבל:

(2) $x > a$ וגם $x > 0$

אם $a \le 0$, נקבל: $x > 0$ ואם $a > 0$ נקבל: $x > a$.

נעלה את שני האגפים של המשוואה בריבוע:

$$(3) \qquad \frac{1}{(x-a)^2}=\frac{1}{2x} , x>0 , x>a$$

נכפול במכנים ונגיע למשוואה, השקולה למשוואה המקורית, בתחום התקפות שקבענו:

$$x^2-2ax+a^2=2x \Rightarrow x^2-2(a+1)x+a^2=0$$

למשוואה הזאת עשויים להיות שני פתרונות:

$$(4a) \qquad x=a+1+\sqrt{2a+1}$$

$$(4b) \qquad x=a+1-\sqrt{2a+1}$$

הערה קטנה: בין שני הפתרונות יש לשים מילית 'או', כי x לא יכול להיות שווה לשני ערכים שונים בו-זמנית.

הפתרונות תלויים בפרמטר. יש עוד לוודא שהם אינם פתרונות סרק. לשם כך יש לבדוק:

1) עבור אילו ערכים של הפרמטר לפתרון עצמו יש משמעות.

2) האם בתחום הגדרתם, הפתרונות האלה מתיישבים עם המגבלות המופיעות ב-(3).

נבצע את שתי הבדיקות:

1) במקרה הנתון הדרישה היחידה היא שהמספר מתחת לשורש לא יהיה שלילי, כלומר:

$$(5) \qquad 2a+1 \ge 0 \Rightarrow a \ge (-1/2)$$

מכאן שעבור $a<(-1/2)$ אין לביטויים (4) משמעות.

אם למשוואה (1) יש פתרון, הוא הפתרון (4), לכן המסקנה היא שכאשר הפרמטר $a<(-1/2)$ אין פתרון למשוואה (1).

2) השלב הבא בטיפול בפתרון (4) הוא בדיקת ההתאמה של הפתרון הזה לדרישות המופיעות ב-(3), כלומר עבור כל אחד משני הפתרונות (4) יש לבדוק עבור אילו ערכים של a (מאלה שמצאנו ב-(5)) הוא עומד במגבלות שהן תנאי לכך ש-(4) הוא אכן פתרון של המשוואה (1). כדי למצוא את הערכים האלה יש לפתור שתי מערכות של אי-שוויונים (מערכת עבור כל אחד משני הפתרונות):

$$\begin{cases} (6a) & a+1+\sqrt{2a+1}>0 \\ (6b) & a+1+\sqrt{2a+1}>a \end{cases} ; \begin{cases} (7a) & a+1-\sqrt{2a+1}>0 \\ (7b) & a+1-\sqrt{2a+1}>a \end{cases}$$

כדי שיתקבל הפתרון (4a), הדרישות (6a) ו-(6b) צריכות להתקיים *ביחד*, כמו כן כדי שיתקבל הפתרון (4b) הדרישות (7a) ו-(7b) צריכות להתקיים ביחד; כל אחת מהדרישות (6) ו- (7) מתייחסות לפתרון אחר, לכן אין תלות ביניהם.

את שתי הדרישות (6) ו-(7) יש לבדוק רק עבור $(-1/2) \le a$.

קל לראות שהדרישות (6) מתקיימות עבור כל $(-1/2) \le a$ לכן אם התנאי הזה מתקיים, למשוואה (1) יש פתרון אחד לפחות (הפתרון (4a)) נשאר לבדוק עבור אילו ערכים של a מתקיימים התנאים (7).

יש לפתור מערכת אי-שוויונים המורכבת מאי-שוויונים (7) ו-(5).

כדאי לשים לב: אמנם בבעיה המקורית חיפשנו פתרון עבור הנעלם x, אולם הגענו לשלב בפתרון בו a הוא בתפקיד הנעלם.

כדי למצוא את הפתרון יש לפתור כל אי-שוויון בנפרד ולמצוא את תחום החיתוך בין הפתרונות.

עבור (7a) $(a+1)^2 > 2a+1 \Rightarrow a^2 > 0$

(מותר להעלות את האי-שוויון הזה בריבוע בזכות (5)).

הדרישה $a^2 > 0$ מתקבלת עבור כל a שונה מ-0. לכן נוכל להחליף תנאי בתנאי: $a \ne 0$

עבור $(7b)$ נקבל: $1 > \sqrt{2a+1}$

תנאי זה יחד עם (5) מתקיים עבור $0 > a > (-1/2)$ וזה התחום בו הפתרון $(4b)$ אינו פתרון סרק. ובכן התשובה המלאה:

1) כאשר $a < (-1/2)$ אין פתרון.

2) כאשר $0 > a > (-1/2)$ קיימים שני פתרונות:

$$(4a) \quad x = a+1+\sqrt{2a+1}$$

$$(4b) \quad x = a+1-\sqrt{2a+1}$$

3) כאשר $a \ge 0$ קיים פתרון יחיד:

$$(4a) \quad x = a+1+\sqrt{2a+1}$$

לשם הדגמה לצורך בביטול פתרון סרק עבור $a > 0$ נציב במשוואה (1) $a = 1$ נקבל:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

נציב במשוואה הזאת את הפתרון $(4b)$ שבו $a = 1$ והערך שיתקבל עבור הנעלם יהיה: $x = 2-\sqrt{3}$. נקבל באגף שמאל מספר שלילי ובאגף הימני מספר חיובי.

דוגמא IV

יש לפתור את המשוואה:

$$(1) \quad \frac{1}{x+3} = \frac{1}{\sqrt{ax}}$$

מהמשוואה מקבלים מייד שתי מגבלות:

$ax \ne 0 \, , x \ne (-3)$

בנוסף לזה יש לדאוג שצד שמאל יהיה חיובי, לכן:

$x > (-3)$

הדרישה $ax \ne 0$ גורמת לכך שהפתרון מסתעף לשתי אפשרויות:

$a > 0, x > 0$ (i)

$a < 0, x < 0$ (ii)

נדון בשני המקרים בנפרד.

(i)

$$(2) \quad \frac{1}{x+3} = \frac{1}{\sqrt{ax}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(x+3)^2} = \frac{1}{ax}; \; a > 0 \; , \; x > 0$$

$$(3) \quad (x+3)^2 = ax; \; a > 0, x > 0$$

$$x^2 + (6-a)x + 9 = 0; \; a > 0 \; , \; x > 0$$

$$(4a) \quad x_1 = \frac{a-6+\sqrt{(6-a)^2-36}}{2}$$

$$(4b) \quad x_2 = \frac{a-6-\sqrt{(6-a)^2-36}}{2}$$

נבדוק מהם הערכים של a שעבורם הביטוי שמתחת לשורש אינו מקבל ערך שלילי.

$$(5) \quad (6-a)^2 - 36 \ge 0 \Rightarrow a^2 - 12a \ge 0$$

$$(6) \quad a \le 0 \text{ או } a \ge 12$$

נדון בהתאמה בין הפתרונות האלה לבין המגבלות. האפשרות $a \le 0$ לא מתיישבת עם המגבלה המופיעה ב-(2), כך נקבל $a \ge 12$.

עבור כל אחד משני הפתרונות (4) נבדוק אם הם עונים על הדרישה $x > 0$.

עבור הפתרון $(4a)$

$$\frac{a-6+\sqrt{(a-6)^2-36}}{2} > 0 \; , \; a \ge 12$$

בהתניה $a \ge 12$ האי-שוויון מתקיים.

עבור הפתרון $(4b)$:

$$\frac{a-6-\sqrt{(a-6)^2-36}}{2} > 0 \; , \; a \ge 12$$

$$\Downarrow$$

$$a-6 > \sqrt{(a-6)^2-36}$$

גם אי-שוויון זה מתקיים בהתניה $a \ge 12$. ובכן $(4a), (4b)$ מהווים פתרונות של המשוואה אם $a \ge 12$.

(ii) כל השלבים עד לקבלת הפתרונות זהים לאלה שבמקרה הקודם. יש לבדוק את היתכנותם אל מול ההתניה:

$a < 0\ ,\ x < 0$

$$(4a^*)\qquad x_1 = \frac{a-6+\sqrt{(6-a)^2-36}}{2}$$

$$(4b^*)\qquad x_2 = \frac{a-6-\sqrt{(6-a)^2-36}}{2}$$

מ-(5) נקבל ש- $a < 0$ מספק תנאי לקיום השורש בפתרונות $(4a^*)$, $(4b^*)$.

עבור כל אחד משני הפתרונות נבדוק האם הם עונים על הדרישה $x < 0$.

$$\frac{a-6+\sqrt{(a-6)^2-36}}{2} < 0\ ,\ a < 0$$

בהתניה $a < 0$ האי-שוויון מתקיים.

ובכן $(4a^*)$, $(4b^*)$ מהווים פתרונות של המשוואה כאשר $a < 0$.

<u>ולסיכום הפתרון של דוגמא זו:</u>

- כאשר $0 \le a < 12$ אין פתרון.
- כאשר $a \ge 12$ או $a < 0$ קיימים שני פתרונות

$$x_{1,2} = \frac{a-6\pm\sqrt{(6-a)^2-36}}{2}$$

דוגמא V

יש לפתור את המשוואה: $(1)\quad \sqrt{ax+3} = \sqrt{x+b}$

מהמשוואה מקבלים מייד שתי מגבלות:

$ax+3 \ge 0\ , x+b \ge 0$

פתרונן מחייב הבחנה בין שלושה מקרים: עבור a חיובי, שלילי או שווה ל-0.

במגבלות אלו נעלה את שני האגפים בריבוע:

$$(2)\quad ax+3 = x+b$$

$$(a-1)x = b-3$$

I. $a = 1$

I_1 $b = 3 \Rightarrow x \ge (-3)$

I_2 $b \ne 3 \Rightarrow$ אין פתרון

II. $a \ne 1$

$x = (b-3)/(a-1)$

נבדוק התאמת הפתרון למגבלות:

$$\begin{cases} a\dfrac{b-3}{a-1}+3 \ge 0 \\ \dfrac{b-3}{a-1}+b \ge 0 \end{cases}$$

II_1. $a > 1$

$ab \ge 3$

II_2. $a < 1$

$ab \ge 3$

<u>ולסיכום הפתרון של דוגמא זו:</u>

1. $a = 1$
   - $1.1\ b = 3 \Rightarrow x \ge (-3)$
   - $1.2\ b \ne 3 \Rightarrow$ אין פתרון
2. $a < 1$
   - $2.1\ ab \ge 3 \Rightarrow x = (b-3)/(a-1)$
   - $2.2\ ab < 3 \Rightarrow$ אין פתרון
3. $a < 1$
   - $3.1\ ab \le 3 \Rightarrow x = (b-3)/(a-1)$
   - $3.2\ ab > 3 \Rightarrow$ אין פתרון

סיכום

הוראת האלגברה בבתי-הספר עברה שינוים משמעותיים במהלך העשורים האחרונים. הדגש הוסט מפיתוח מיומנות של טכניקה אלגברית לבניית מודלים אלגבריים ולפתרון בעיות מילוליות. מגמה זו החלה עוד בשנות השישים של המאה שעברה, די זמן לפני עידן המחשבונים והמחשבים האישיים, והתעצמה עם הופעת תוכנות נגישות לכל, אשר חלקן אף מבצעות את המניפולציות האלגבריות בעצמן[8]. משימות כמו אלה שהופיעו במאמר זה היו חלק מתוכנית הלימודים במחצית הראשונה של המאה העשרים ומופיעות למכביר בספרי לימוד מהתקופה ההיא. לימודי המתמטיקה ברמה על-תיכונית היו מבוססים ועדיין מבוססים על ההנחה שהתלמידים שולטים היטב בטכניקות אלגבריות. שינויים בהדגשים בהוראת האלגברה נעשו לעיתים בהנחיה של מתמטיקאים, אשר חשו בצורך בפיתוח מיומנות חשיבה מתמטית בנוסף למיומנויות הטכניקה. אולם קשה מאד לתפוס את המקל בני קצותיו. המיומנות הטכנית נפגעה וכך נוצרה בעיה חמורה בהתאמה בין ההוראה בבית הספר התיכון לבית ההוראה במוסדות להשכלה גבוהה.

אני מקווה שמאמר זה יתרום להגברת המודעות של מורים לצורך בשליטה בטכניקות אלגבריות ויעזור להם לשפר אותן ולהקנותן לתלמידיהם.

[8] השינויים האלה נראים היטב בספרים המציגים את הצד התיאורטי של הוראת אלגברה בבתי ספר, ראה למשל:
Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (eds) (1996), Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland.