



הנושא: השיחה המתמטית – שיח אחד או יותר?

הוכן ע"י:

חיותה רגב, שרה שמעוני.

תקציר:

במאמר מתואר מחקר איכותני, אשר בחן מזוויות שונות את המתרחש בשיח המתמטי הנערך בפועל בכיתה. מטרתו לשקף למורות ולסטודנטיות, המנהלות שיח כזה את הקורה בו דרך 'משקפיים' מקצועיים שונים, כדי שתוכלנה לבחון את המעשה ולשפרו.

מילות מפתח:

כתב העת על"ה, על"ה 34, מחקר, שיח מתמטי, שיטות וגישות הוראה, הוראה פרונטאלית, שיטת חקר, הוראה בכיתה הטרוגנית, הוראת מתמטיקה, הבנה, תורות למידה, ואן הילה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 34, תשס"ה 2005, עמודים, 35-43.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 9 עמודים.

השיחה המתמטית

שיח אחד או יותר?

שרה שמעוני
shsara@macam.ac.il

חיותה רגב
hayutaregev@013.net.il

מכללת לוינסקי לחינוך

רקע

המבוססת על מודל מנטאלי של למידה כ'בניית ידע' (ברונר, 1999). השיחה המתמטית מזכירה לרוב שיחה סוקראטית, שבה, בדומה לסוקראטס ותלמידיו, המורה מציגה בעיה ברמה גבוהה מעט מזו אליה הגיעו התלמידים ומזמינה מגוון רעיונות לפתרון. התלמידים מציעים פתרונות שונים ומתבקשים לנמקם ולהסביר, כיצד הגיעו אליהם.

החשיבה המתמטית נעה, במהלך השיחה, בין המרחב הקבוצתי לפרטי. כל שותף לשיחה מעלה למרחב הציבורי רעיונות והצעות וזוכה למשוב ישיר, כאשר עמיתיו מצטרפים לתפיסותיו בקול, או למשוב עקיף, כאשר הוא שומע רעיונות שונים משלו ומשווה את פתרונותיו אליהם. הרעיונות שהועלו זוכים אפוא לתיקוף, להעשרה, להרחבה, או נחשפים להצעות חלופיות, המפריכות אותם או מציגות פתרונות יעילים יותר. עם המידע, שהתהווה במרחב הקבוצתי חוזר המשתתף למרחב החשיבה הפנימי, התוך אישי, וכאן הוא מרחיב, מחדד, או משנה את הסכמות הקיימות שלו ו/או בונה סכמות חשיבה חדשות (בעקבות רומלהרט, 1989).

מטרת השיחות המתמטיות בדגם הסוקראטי היא לטפח הבנה 'רלציונית' - הבנה של ההיגיון מאחורי הדרכים לפתרון, של החוקיות המתמטית באירוע או בתופעה המוצגים, ולא להסתפק בהבנה אינסטרומנטאלית - הבנה המבוססת על שינון אלגוריתמים וחיזוק היכולת להציב בהם את המספרים המתאימים עד לרכישת הטכניקה של פתרון הבעיות (על-פי סקאמפ, 1991).

בשלוש השנים האחרונות, לאור תוצאות מבחני ה'מיצב' הארציים ומבחני ההישגים ההשוואתיים ברמה הבין-לאומית "Timss" (בתוך: זוובסקי, 2000, ובתוך בן אסולי וסחייק, 2003), אשר הראו כי ההישגים

בעשר השנים האחרונות חלו שינויים בהוראת המתמטיקה בבתי הספר בישראל, בעקבות תמורות בחינוך המתמטי בארה"ב ובאירופה. בתהליך הכשרת המורות¹ למתמטיקה בישראל, מרבים בהדרכת הסטודנטיות והמורות המשתלמות, בניהול שיח מתמטי, שבמרכזו העלאת טיעונים ומציאת הוכחות, הסברים וצידוקים, לפעולות המתמטיות ברוח הגישה הקונסטרוקטיביסטית.

שנים רבות, התבססה דרך ההוראה המקובלת על הדגמה ותרגול. המורה פתחה בהצגת דרכי פתרון לתרגילים, או לבעיות מתמטיות על הלוח, בפני הכיתה כולה. לאחר הדגמה והבהרת הכללים, או הנוסחאות נקראו, בדרך כלל, כמה תלמידים ללוח להתנסות בדרך הפתרון שהודגמה בפני עמיתיהם. משנסתיימה ההדגמה נערך תרגול של מספר תרגילים, או בעיות דומות לאלו שהוצגו על הלוח, באופן עצמאי בכיתה, ותרגול דומה נוסף ניתן כשיעורי בית.

כיום מצפים רוב העוסקים בחינוך מתמטי, להוראה, שבה המורה מציגה בעיות בפני קבוצות תלמידים, ואלו, בהנחייתה או בינם לבין עצמם, מתמודדים עם הבעיות המתמטיות ויוצרים ומגלים את האלגוריתמים ואת מערכות הכללים במהלך השיח (רגב ושמעוני, 2000).

השינוי בדרך ההוראה הוא ביטוי למעבר מתרבות של חשיפה-שינון, המבוססת על מודל מנטאלי של למידה, לפיו התלמיד מקבל את החומר המועבר לו מן המורה ביחידות קטנות ומבוקרות ולומדו על-ידי חיקוי של הנחיות המורה ובאמצעות שינון - "Practice makes perfect" - לתרבות של חשיבה עצמאית ושל גילוי,

¹ רוב המורים בבתי הספר הנם ממין נקבה ולכן נשתמש במאמר במגדר המתאים למציאות בשדה.

התלמידה : ארבע ועוד שש שווה עשר (וכותבת) :

המורה עוצרת את התלמידה ושואלת את התלמידים : האם זה נכון?

התלמידים (צועקים) : "כן", "לא".

המורה : מישהו רוצה להסביר, מדוע זאת דרך לא נכונה? תלמיד : ארבע ועוד שש שווה עשר, כותבים 1 כי אפס זה לא שווה כלום.

המורה : כולם מסכימים? הקשיבו היטב, אני מסבירה. כמה יחידות במספר 54 ?

תלמידים : ארבע.

המורה : כמה יחידות במספר השני?

תלמידים : שש.

המורה : מחברים את היחידות $10 = 6 + 4$, ממירים 10 יחידות לעשרת אחת ומקבלים עשרת אחת. את היחידות, 0, כותבים למטה במקום של היחידות, בתוצאה. אני

חוזרת: איפה כותבים את היחידות ?

התלמידים : למטה.

המורה : באיזה מקום?

התלמידים : במקום של היחידות.

שיעורים כאלה, שמתקיים בהם 'כאילו' דיון ואשר אינם, אלא גרסאות של שיטת ההדגמה והשינון, מצויים לרוב במערכת החינוך היסודית ועוד יותר בעל יסודית, ממש בימים אלו. לכן, הניסיון לתלות את הכישלון בשיטה 'חדשנית' זו או אחרת דורש בירור מקיף ויסודי, אשר יראה אם אכן נקלטה הוראה שמעמידה את השיח המתמטי במרכז והיכן זה מתרחש. כלומר, המטוטלת החינוכית הידועה עלולה שוב לנוע מן ההוראה המטפחת חשיבה וגילוי להוראה באמצעות חשיפה לאלגוריתמים ושינון, בשל הערפול שנוצר.

החיפוש אחר הסיבות לאי היקלטותה של הוראת המתמטיקה באמצעות שיח הוא הרקע למחקר הנוכחי. כאשר מנסים לחולל את השינוי המוזכר לעיל בקרב סטודנטיות להוראה ומורות בפועל, נתקלים במספר קשיים מרכזיים.

הקשיים במעבר משיטה לשיטה

בדרכי ההוראה הישנות היתה המורה צריכה להכין, קודם לשיעור עצמו, מספר בעיות, או תרגילים אופייניים להצגת הדרכים או הנוסחאות לפתרון על

במתמטיקה של תלמידי בתי"ס היסודיים וחיטבות הבינים, בישראל, מדורגים נמוך, ובתחתית הדירוג של ארצות המערב, התעורר בישראל ויכוח ציבורי סוער על מצב הוראת המתמטיקה.

הדיון, שהתנהל בין מתמטיקאים – אנשי אקדמיה, אנשי הממסד החינוכי העוסקים בחינוך מתמטי, כוחות ההדרכה בשדה ואנשי שדה בפועל, נטה לתלות את ההישגים הנמוכים במתמטיקה בכישלון של השיטות החדשניות בהוראת המתמטיקה אשר כביכול כבשו את השדה וכנראה, אינן מניבות את התוצרים הרצויים.

אנשי אקדמיה וממסד שונים קראו וממשיכים לקרוא לחזרה לשיטות 'הישנות' והטובות' של הדגמה ושינון, אשר לפי טענתם הוכיחו עצמן בעבר כמקדמות הישגים במתמטיקה. כך, למשל, צוטט פרופסור דה שליט, מתמטיקאי מהאוניברסיטה העברית: "הלוואי שהיו ילדינו אמונים על המתמטיקה, כפי שנלמדה לפני חמישים שנה ברוסיה או בצרפת..." (דה שליט, 2002).

חשוב לציין, כי טענה זו עלולה להתברר כמופרכת ביסודה לאו דווקא ברמה האידיאלית, אלא ברמה המעשית. בבתי ספר רבים המשיכו כל העת וממשיכים גם עתה ללמד בשיטות הישנות, וכל מאמציהם של אנשי החינוך המתמטי להכניס את המורות בשערי ההוראה באמצעות שיחות מתמטיות עלו בתוהו. להדגמת הטיעון, שהועלה לעיל, נציג שיעור שהתרחש בשנת תשס"ג, בכיתה ב, בבית ספר ממלכתי במרכז הארץ, אך ברצוננו להדגיש כי ניתן ללמוד מן הדיון גם ביחס לנעשה בכיתות גבוהות יותר.

"הקשיבו היטב, אני מסבירה"

המורה : היום נעבוד בנושא חיבור במאונך, ללא בדידים, אולי מישהו יודע, איך לפתור את התרגיל : (כותבת על

$$54 + 26$$

הלוח)

(מספר תלמידים מצביעים, המורה פונה לאחת התלמידות)

התלמידה : (כותבת תרגיל)

$$\begin{array}{r} 54 \\ + 26 \\ \hline \end{array}$$

קשיים הכרוכים בחוסר ידע מספק של הנושאים המתמטיים בהם הן עוסקות; באי הכרה של רמות הידע ושל החשיבה המתמטית של התלמידים ובבניית מהלך השיחה בהתבסס על הכרה זו (רגב ושמעוני, 2000); בהיבטים החברתיים-אקלימיים והקוגניטיביים של ניהול שיחה כזו ובזיקות ביניהן (ספרד 2003, רגב ושמעוני, 2000); בשימוש בשפה ובניסוחים נכונים במהלך השיחה, בניצול נכון של זמן השיחה, ועוד.

ההוראה באמצעות שיחות מתמטיות משנה את פני השיח המתמטי בכיתה. המושג שיח (Discourse) מצביע על הקשר רחב יותר מן המושג שיחה (Conversation). בשיח הכוונה לא רק לתכני השיחות, אלא למערכות היחסים ולנורמות ההתנהגות הגלויות והסמויות הנוצרות במהלכן. המושג 'שיח', בהקשר הנוכחי, מכוון למעשה לתרבות ההוראה-למידה החדשה, המתהווה בשיעורי המתמטיקה.

המחקר האיכותי, אשר יוצג להלן, נולד מתוך הצורך ללמוד את המתרחש בשיח המתמטי הנערך בפועל בשדה, מזוויות שונות. זאת על מנת למצוא דרכים לשקף למורות ולסטודנטיות, המנהלות שיח כזה את הקורה בו דרך 'משקפיים' מקצועיים שונים, כדי שתוכלנה לבחון את המעשה ולשפרו.

המחקר הנוכחי בוחן: האם השיח המתמטי בכיתה עוסק כולו במתמטיקה, או מעורבים בו גם סוגי שיח אחרים? מהן הזיקות בין סוגי השיח בשיחה המתמטית לבין איכות השיח?

השיטה

איסוף הנתונים

במסגרת המחקר נערכו 30 שיחות מתמטיות, אשר נצפו והוקלטו בשיעורי מתמטיקה בבתי ספר יסודיים שונים בחינוך הממלכתי ולאחר מכן שוקלטו והפכו לטקסט. המדובר בשיחות אשר התנהלו במסגרת שיעורים, בהם התלמידים יושבים בקבוצות של 5-6 ילדים. על-פי המקובל בבתי הספר הללו מקובצים הילדים לשיבה בקבוצה אחת הומוגנית יחסית על-פי אבחונים תדירים של רמות הידע שלהם במתמטיקה. במהלך שיעור טיפוסית המורה מנחה שיחה מתמטית בכל פעם עם אחת הקבוצות, במשך כעשרים דקות ואז עוברת לקבוצה הבאה. בעת שאחת הקבוצות משוחחת עם המורה, התלמידים בקבוצות הנותרות פותרים בעצמם, או תוך הסתייעות בעמיתיהם, תרגילים ובעיות במתמטיקה

הלוח, ומספר גדול יותר של בעיות, או תרגילים דומים, לתרגול בכיתה ובבית. בנוסף, היה עליה לבנות ולשכלל את דרכי ההדגמה בפני התלמידים. הוראה שבמרכזה השיח המתמטי מחייבת את המורה להכין בעיות המתאימות לעמוד במרכזן של שיחות מתמטיות, אך אין די בכך. היא צריכה להיות מסוגלת להקשיב, לדעת לזהות **תוך כדי השיחה**, כיצד חושב כל משתתף, באיזו רמה הוא נמצא ובאלו קשיים הוא נתקל ולהיות מסוגלת להגיב לכל תלמיד. עליה להיות כל העת 'עם היד על הדופק' ביחס לרמות ההבנה השונות של המשתתפים ולחוש, האם בסיום כל מעגל של הצגת בעיה, העלאת פתרונות, בחינת הפתרונות, זיהוי הפתרונות ה'טובים' ויישומם, נמצאים כל המשתתפים במצב בו הבינו את המינימום הנדרש. כדי שיתקיימו כל התנאים, שצוינו לעיל, על המורה לזהות באלו רמות של חשיבה מתמטית מצויים התלמידים (למשל על-פי רמות ואן הילה בתוך: רייז, ואן דורמולן ופטקיין 1996, ובתוך אוסיסקין 1982), מהו הידע המוקדם הנדרש, אשר ניתן לבסס עליו את הבעיה, ובאיזו מידה הוא נבנה כבר על-ידי התלמידים השונים. על המורה לנסות לחזות מראש, איזו קשת של דרכי פתרון עשויים התלמידים השונים להעלות, מה הם הנימוקים וההצדקות שהם מסוגלים לייחס לרעיונותיהם, באלו קשיים הם עלולים להתקל, ומה הן התפישות השגויות העלולות להיחשף. זאת כדי להיות מסוגלת לנהל שיח מתמטי פתוח וגמיש ולהתמודד במהלכו עם הצעות הפתרון השונות.

יתר על כן, על המורה להיות מצויה בניהול השיח המתמטי עצמו, באופני הצגת בעיות, בקריאה לרעיונות שונים, בניצול קשיים, שגיאות והצלחות, ללמידה, בהזמנה למתן הנמקות, צידוקים, הסברים, שיקולי דעת וכיו"ב. בצד השינוי בהפעלת מיומנויות חשיבה המורה צריכה לבחון את תפיסותיה הקודמות ביחס להוראה וללמידה, לעמתן עם התפיסות החדשות ולשנות את הדורש שינוי. השינוי במיומנויות והשינוי בתפיסות ובאמונות קורה בדרך כלל בעת ובעונה אחת. למידה כזו חזקה עליה, שתהיה למידה מן הסוג ה'התנסותי' ותתרחש במעגלים קטנים וגדולים של חקירה – תיאוריה – יישום בפועל – רפלקציה – תיאוריה וחוזר חלילה (קולב, ומודלים אחרים של למידה מן הניסיון, בתוך אתרטון 2000). העוסקים בחינוך מתמטי, הצופים פעמים רבות בשיחות מתמטיות הנערכות בשדה, מצביעים על מכלול קשיים בקרב הסטודנטיות והמורות המנהלות שיחות אלו –

לפתרון בהתבסס על ידע מוקדם ויכולת), באופן בהיר וממוקד, ומתהלך את השיחה תוך התייחסות לרמות הבנתם השונות של המשתתפים, הפיכת תגובות נכונות ולא נכונות להזדמנויות למידה ודאגה לכך שכל התלמידים יבינו את דרכי הפתרון המוצגות ויוכלו להעריך יעילותן.

בהמשך יוצגו הממצאים בשני שלבים:

- א. סוגי השיח אשר זוהו בשיחות המתמטיות ומשמעויותיהם.
- ב. הזיקות שנמצאו בין סוגי השיח לאיכותו.

ממצאים מפורשים

סוגי השיח³ בשיחות המתמטיות

בניתוח הראשוני של השיחות זוהו **חמישה סוגי שיח** הנבדלים זה מזה בעולם התוכן ובתפקידיהם היחסיים בתהליך השיחה. רק שלושה מבין סוגי השיח עוסקים במתמטיקה באופן מפורש, השניים האחרים, כאשר השיחה מתנהלת כראוי, תומכים בתהליך המתמטי ובמצבים פחות טובים עלולים לערפלו, לעכבו או לטרפדו. לכל סוג שיח נורמות ו'שפה' משלו.

שיח ארגוני- לוגיסטי – ברבות מן השיחות המורה פותחת במתן הוראות לוגיסטיות לתלמידים. היא עשויה לבקש מהם להוציא מילקוטיהם אמצעי המחשה או מערכות המחשה כמו בדידים, גפרורים לוחות וגומיות וכדומה. היא מסבירה (שוב ושוב) לתלמידים כיצד לארגן חפצים אלו על השולחן וכיו"ב. במהלך השיחה מופיעות לעתים שוב הערות לוגיסטיות המתייחסות לתפעול אמצעים וייצוגים שונים, לאופי ישיבת התלמידים, לאופן העבודה בקבוצה, להעתקת מידע מן הלוח לארגון הנכתב במחברות וכיו"ב. השיח הארגוני-לוגיסטי עונה על השאלות בדבר הארגון הפיזי (חלל, זמן, משאבים) של הפעילות. שיח לוגיסטי טוב נעשה במטרה לאפשר למורה ולתלמידים לעסוק בנוחות במתמטיקה. סידור נכון ונוח של מערכות, או אמצעי המחשה, למשל, מאפשר שימוש קל ויעיל בהם ללימוד המתמטיקה. הלוגיסטיקה הנדרשת לתיהלוך השיחה המתמטית צריכה להתייעל ככל האפשר עד למצב שבו ההכנות אליה והשינויים במהלכה ייקחו

מתוך דפי עבודה שונים. השיחות נוהלו בכיתות שונות של בית הספר היסודי (ב-ו), בנושאים שונים מתוך תוכנית הלימודים הארצית במתמטיקה. 10 מתוך השיחות הונחו על-ידי מורות בפועל, 15 מן השיחות נוהלו על-ידי סטודנטיות מתמחות בהוראת המתמטיקה וחמש מן השיחות הונחו על-ידי מומחית לחינוך מתמטי.

ניתוח הנתונים

שלב א- זיהוי סוגי השיח בשיחות המתמטיות

ניתוח השיחות נעשה בגישה פנומנולוגית (קרסוול, 1998), כלומר החוקרות תפסו כל שיחה מתמטית כתופעה בפני עצמה ובחנו שתי סוגיות מרכזיות: *על מה מדובר בכל חלק של השיחה? ואיך מדברים על זה?* לאחר מכן הושוו ניתוחי כל השיחות. תחילה נלקחה כל אמירה בשיחה, בה מתחיל ומסתיים רעיון כלשהו כיחידה לניתוח. בדרך זו זוהו קטגוריות התוכן² אשר היו משותפות לרוב השיחות. אחר נערכה התייחסות לאותן יחידות תוכן ברמת-על, ונשאלה השאלה: לאיזה תחום תוכן שייך התוכן המסוים הזה? בימילים אחרות: מהו סוג השיח המופיע כאן? בשלב זה זוהו חמישה סוגי שיח המופיעים בהיקפים ובשכיחויות שונות בשיחות השונות.

שלב ב - בחינת הזיקה בין סוגי השיח ואיכות

א. כל סוג שיח שזוהה בשלב א צוין על-ידי צבע משלו (יפורט ויודגם להלן על-ידי גופן משלו), והשיחות נצבעו בהתאם לסוגי השיח שהופיעו בהן. אחר זיהוי סוגי השיח ומשקלם היחסי בשיחות, נותחו השיחות שוב במטרה לקבוע את איכות השיח (מידת פוריותו). איכות השיח הוגדרה על-ידי החוקרות משתי נקודות מבט ומן הזיקה ביניהן:

א. התבוננות ממוקדת בתלמידים המשתתפים בשיחה: המידה בה מגיעים כל המשתתפים להבנת הדרכים לפתרון הבעיות שהוצגו במהלך השיחה, עד שהם מסוגלים לבצע דרכים אלו ולנמקן; והמידה בה הם מסוגלים להעריך את יעילותן היחסית של דרכי הפתרון שהועלו ולנמקן.

ב. התבוננות ממוקדת במנחה השיחה: המידה בה המנחה מציג בעיה מתאימה (מאתגרת אך ניתנת

³ כל סוג שיח יוצג על-ידי גופן משלו, על-מנת שניתן יהיה להבחין ביניהם בניתוח השיחה.

² אין המדובר בתוכן מתמטי ספציפי כמו חיבור, חיסור או שברים, אלא בסוגי השיח אשר הופיעו במהלך השיח.

מינימום זמן ויעשו כמעט ללא מילות הנחייה. אך לעיתים נדמה כי לשיח הארגוני-לוגיסטי מוקדש זמן רב מידי התופס חלק נכבד מהזמן היקר המוקדש לדיון בנושא המתמטי.

שיח מטה-קוגניטיבי – בצמוד לשיח המתמטי מתנהל לעתים שיח, שמטרתו להסביר, להוכיח ולהצדיק את הפעולות המתמטיות. כאן נעשית "חשיבה על החשיבה" המתמטית. "השתמשתי בחוק הפילוג כדי להכפיל את המספר עם שתי הספרות בארבע. ככה יותר קל לי להכפיל את העשרות ואחר כך את היחידות...". השיח המטה-קוגניטיבי כולל שיפוט והערכה. האם הביצוע המתמטי היה יעיל? אולי ניתן היה לעשות זאת בדרך חלופית, קצרה יותר? איזה עיקרון או נוסחה ניתן להפיק ממה שבוצע? השיח המטה-קוגניטיבי יכול לחשוף את טיבן של הטעויות המושגיות הגורמות לטעויות בביצוע המתמטי ולאפיין. למשל: "אני חושב, ששש שמיניות קטן משלוש תשיעיות, כי כאן מתחת לקו יש תשע וכאן שמונה ושמונה קטן מתשע...". התלמיד שופט את גודלו של השבר על-פי המכנה בלבד, ובאנלוגיה לשלמים, כאשר רואה את השבר כשני מספרים שלמים. ניהול שיח מטה-קוגניטיבי פורה טמון ביכולת לזהות את משמעותיהן של הטעויות ולהשתמש בהן לקידום הדיון.

שיח חכמתי – המהלך השיחה האורגנית פונה אל כל הקבוצה או אל תלמידים בודדים בהערות חכמתיות כאלו: "מה קורה לך היום, לא אמרת מילה על עכשיו...". "תפסיק למהק את השיחה... אני פואה" וכיו"ב. השיח החכמתי נעשה במטרה לתפוס את אקלים השיחה הוא כולל ארוב קריאה למשתתפים לחוות דעה על חלקים מן השיחה הערות מוטיבציוניות (עידוד קריאה להשתתפות) והערות משמעותיות. שיח חכמתי עשוי לתמוך במהלך השיחה הערה כמו "אריאל תצטרף אלינו, היינו רוצים לדעת מה אתה חושב על הפאנל". "הי קח את כל הזמן שאתה צריך לחשוב כשתפנה נשמח לשמוע את דעתך...". יכולות לעיתים אלו להוות חלק מההלך השיחה להפנות תשומת לב למשתתפים. אך לעיתים נראה כי האורגנית מופיעה בהערות חכמתיות בעיקר מסוג ההערות המשמעותיות ואלו שוללות זמן יקר מלבד המוקדש לנאום המתמטי...

שיח מודל – שיח מודל הוא שיח המתנהל, כאשר המשתתפים בשיחה מבצעים פעולות לוגיות (אופרציות שכליות) בתוך מודל כלשהו. מטרתו לאפשר ללומדים להבין את החוקיות המתמטית, תחילה בתוך מערכת אנלוגית, שלחלקם קל יותר להתמצא בה, על מנת שיוכלו במקביל, או מאוחר יותר, להקיש ממנה למערכת המתמטית. הבדלים, גזרות השברים, מודל ציר מספרים, מודל ה"משבצונים" וכיו"ב הן מערכות המחשה כאלו, היכולות להמציא אנלוגיה מלאה או כמעט מלאה למערכת המתמטית המופשטת, אותה הן מיועדות להמחיש. מודלים מוחשיים מחליפים היום, בעיקר בקרב אלו המעדיפים 'גישה מובנית' על 'גישה סביבתית' להוראת המתמטיקה, את אמצעי העזר כמו למשל גפרורים, אשר שירתו ועדיין משרתים חלק מן המורים. כאשר התלמיד 'מנווט' בתוך המערכת האנלוגית, על מנת לגלות את החוקיות שבה, הוא פועל ושח ב'שפת מודל', ה'מדברת' בחומרים, צורות, צבעים וטקסטורות וביחסים ביניהם. הוא מתפעל ומשנה את הצורות ואת היחסים ביניהן, תוך פעולה בחומרים. 'שפת המודל' אינה זהה לשפה המתמטית. בדיד אדום ועוד בדיד לבן שווה בדיד ירוק, אשר שווה שלוש,

שיח מתמטי – השיח המרכזי בשיחות המתמטיות הוא כמובן השיח המתמטי. השיח המתמטי מלווה את הביצועים המתמטיים הפנימיים והחיצוניים, כמו כתיבת תרגילים במחברת או חשיבה על פתרון בעיה מסוימת. לדוגמה: "ככה, עושים 5 + 25 ואז מכפילים ב-4...". או: "כדי לחלק את המשולש שווה השוקיים לשני משולשים אני מותח קו (מוריד אנך) מהקודקוד...". תוכנית הלימודים במתמטיקה של בית הספר היסודי כוללת שני תחומים מרכזיים: 'מספרים ופעולות' ו'גיאומטריה'. התחום העוסק ב'מספרים ופעולות' שם דגש על הבנה, חקר, גילוי חוקיות ופיתוח אלגוריתמים לביצוע פעולות במספרים טבעיים ובמספרים רציונאליים, ובחשיבה פרופורציונית. שיח מתמטי בתחום זה יעסוק לכן בביצועים מתמטיים שהם פעולות הנעשות במספרים. בגיאומטריה, ממוקד השיח בתכונות של צורות וגופים. ייחודה של הגיאומטריה בעיסוקה בניחוח צורות במישור וגופים במרחב תוך פיתוח התפישה החזותית ובד בבד פיתוח דרכי חשיבה האופייניות למקצוע המתמטיקה בכלל: העלאת השערות ובדיקתן, בניית טיעונים, הכללות והנמקות, הסקת מסקנות וכיו"ב ("תוכנית 2000", 2000). השיח המתמטי הוא שיח ביצועי, תכליתי, הממוקד במטרת השיחה.

נראה אחרת מאשר אחד ועוד שתיים שווה שלוש או $1+2=3$. בכל קבוצת תלמידים נתונה עשויים להיות הבדלים בין המשתתפים, באשר ליכולתם לעבד לוגית יחסים בין צורות חומריות לעומת יכולתם לעבד לוגית יחסים בין מספרים. ישנם לומדים, שעבורם האפשרות לגלות תחילה חוקיות במערכת המוחשית מקלה על זיהוי חוקיות דומה במערכת המופשטת, וישנם לומדים, שהשלב הזה מיותר עבורם ואולי אף מעכב את הבנתם. בחלק מן השיחות המתמטיות בולט הקושי, אצל חלק מן הלומדים, בביצוע המעברים מ'שפת המודל', שפת צורות וחומרים, להמללה של תפעול הצורות הללו ואזי לעיסוק במספרים. הצורך לדלג מן הצורות והשרטוטים למספרים ולכינוייהם המילוליים, וחוזר חלילה, לעתים אינו מקל על הלומדים, אלא מבלבל אותם. גם הפערים הקיימים בין החוקיות שבמערכת המתמטית לזו האנלוגית (לינצ'בסקי ותובל, 1992) אינם מקלים על הלמידה הנעשית לעיתים ב'שלוש שפות', מילולית, חומרית וכמותית, בעת ובעונה אחת.

הזיקה בין סוג השיח לאיכותו

איכות השיחות, כפי שצוין קודם לכן, המידה בה מגיעים כל התלמידים במהלך השיחה להבנת החוקיות בה דנים וליכולת לנמק את הדרכים שבהן נקטו, קשורה ליחסים שבין סוגי השיח ולטיבם. שיח, שאינו מתמטי או מטה-קוגניטיבי, יכול לתמוך בתהליך המרכזי – הבנת המתמטיקה, או לעכבו ולטשטשו. את הזיקה בין משקלם היחסי של סוגי השיח בשיחות המתמטיות לבין איכויות השיח נדגים על-ידי ניתוח שתי שיחות מתוך המדגם שנותח במהלך המחקר. שתי השיחות נוהלו בכיתה ד. האחת על-ידי מורה כוללת המתמחה במתמטיקה והשנייה על-ידי מורה מומחית להוראת מתמטיקה. סוגי השיח יצוינו, כל אחד על-ידי גופן משלו, כפי שהודגם לעיל.

השיחה הראשונה

שיחה זו נוהלה על ידי המורה המתמחה במתמטיקה:

במאונך או במאוזן"...

מורה: אני רוצה שתפתרו את התרגיל הזה: 4×37 , בכמה שיותר דרכים שאתם יכולים, בבקשה לקחת דרך אחת ולנמק אותה.

מי פתר את התרגיל?

תלמידים: אני רוצה ... אני רוצה ...

יובל: אני כתבתי בפילוג אז כפלתי כל אחד מהאיברים, עשרים, עשר ושבע, בארבע

המורה כותבת על הלוח $(7 \times 4) + (10 \times 4) + (20 \times 4)$.

מורה: כולם מעתיקים את הדרכים האחרות?

יובל: עשרים ושמונה ועוד ארבעים ועוד שמונים שווה מאה ארבעים ושמונה

מורה: "מי רוצה להציע דרך אחרת."

חגי: אני יכול להציע דרך אחרת?

עושים שלושים ושבע ועוד שלושים ושבע ועוד שלושים ושבע ושבע ועוד שלושים ושבע

מורה: במאונך או במאוזן?

חגי: במאונך

מורה כותבת על הלוח:

$$\begin{array}{r} 37 \\ + 37 \\ \hline 37 \\ \hline 37 \end{array}$$

חגי: שבע ועוד שבע זה ארבע עשרה וארבע עשרה ועוד ארבע עשרה זה עשרים ושמונה, רשמים שמונה ושמים את השתיים למעלה...

מורה: אני מבקשת להעתיק למחברות דרכים שאין לכם.

ניתוח השיחה

בשיחה זו ניתן, על-ידי הסימון של כל סוג שיח בגופן שונה, כפי שהוצג בתת הפרק הקודם, לראות את השילוב של שיח מתמטי, שיח חברתי, שיח לוגיסטי ומעט שיח מטה-קוגניטיבי. המורה בחרה לנהל את השיחה עם קבוצה הטרוגנית של 15 תלמידים, כמחצית מתלמידי הכיתה.

תרבות ההוראה-למידה העולה מן השיחה היא של 'חשיפה-קליטה', הוראה פרונטאלית ב'תחפושות' של שיחה סוקראטית. השיחה מתנהלת במתכונת של מעין משחק 'פינג-פונג', בכל פעם בין המורה לתלמיד שימתנדב להציע דרך לפתרון. ה'מתנדבים' הללו מן הסתם תלמידים 'חזקים' במתמטיקה. הראיה, כל התשובות נכונות. לעיתים נראה, כי ללוגיסטיקה חשיבות לא פחותה מאשר למתמטיקה.

הדרך שמציעה יובל, פתרון בדרך הפילוג, אינה זוכה לתשומת לב מיוחדת אף שהיא עשויה לזמן שיח מתמטי מרתק, שיש בו כדי לקדם הבנה רלציונית. המורה אינה בודקת מי מהתלמידים שאינם מנדבים תשובות הקשיב, ואם הקשיב, האם הבין ואם הבין, האם מסוגל לבצע, לנמק וכיו"ב. יש רק הוראה חוזרת ונשנית

להעתיק את הדרכים המוצעות למחברות (שיח ארגוני-לוגיסטי).

השיחה השנייה

מתנהלת עם שישה ילדים מכיתה ד ובולט בה השימוש הרב בשיח מטה-קוגניטיבי. השיחה מונחית על-ידי מומחית להוראת המתמטיקה:

"אתם תספרו לנו איך הגעתם לפיתרון"...

מורה: אני אתן לכם תרגיל, אתם תספרו לנו איך הגעתם לפתרון.

התרגיל הוא שבע פול שלושים וארבע.

חשבו בעל פה, נסו להגיע לפתרון ותגידו לי כיצד חיבתם.

רון: שלוש פול שבע ועוד ארבע פול שבע...

מורה: האם זה נכון, לא נכון, מדוע (*האם זה נכון?*)

רון: נראה לי שאיך שחיברתי זה לא נכון

מורה: מה דעתכם?

יונתן: זה לא נכון. דבר ראשון תרגיל חיבור לא קשור לתרגיל והוא גם לא החזיר את האפס

תום: לחבר רק אחרי שלושים פול שבע ולא שלוש פול שבע

גיל: זה כמעט נכון, אם שבע פול ארבע פול שלוש זה נכון

מורה: מה דעתכם?

מור: זה יותר נכון, אבל עדיין לא

מורה: למה יותר נכון?

מור: אם עושים לא יודעת להסביר

גיל: זה יותר נכון כי כבר שבע פול ארבע זה עשרים ושמונה ואז שבע פול שלוש זה עשרים ואחת ועושים ועוד, קטן מדי.

ניתוח השיחה

שיחה זו מאופיינת על-ידי עיסוק רב במטה-קוגניציה. השיחה פותחת בטעות קונצפטואלית של אחד הילדים, אשר כדי להכפיל 34 בשבע, הכפיל שלוש בשבע וארבע בשבע. ייתכן שבזיכרונו נשאר ייצוג ויזואלי שגוי של הפילוג, אשר לפיו מפצלים את המספר לאיבריו ומכפילים כל אחד מהם בנפרד. ייתכן, שרון זכר באופן שגוי את האלגוריתם של חוק הפילוג. אילו התבקשו התלמידים לפתור את התרגיל בכתב ובמאונך, ייתכן שלא היה מתעורר כל קושי. דרישת המורה לחשב בעל-פה מחייבת ידע מוקדם במבנה העשורי, שימוש מושכל בחוק הפילוג, הבנת מושג הכפל ויכולת לאמוד תוצאות.

המורה משתמשת בטעויות כגירוי לדיון, שבו התלמידים האחרים מעלים טיעונים, שמטרתם להבהיר, מהי הטעות, כדי להצמיח הבנות חדשות. כך למשל יונתן, שחש כי חסר אפס, אינו מצוי בחוק הפילוג. גיל חש, כי גודל הפתרון שהוצע אינו מתאים. המורה רואה את תפקידה בהנחיית דיון על מנת שהתלמידים, בכוחות עצמם, יגיעו לפתרון הבעיה, ולכן התערבויותיה מינימליסטיות.

השיחה האחרונה התנהלה בקרב קבוצת ילדים שרמתם (המאובחנת) במתמטיקה היתה נמוכה יותר משל המשתתפים בשיחה הראשונה. למרות תשובות הילדים המראות לעתים קרובות על קושי בתפיסת החוקים וה'רוח' המתמטית (כמו אמירתו של אחד הילדים: "זה כמעט נכון..."), מוצגת כאן תרבות הוראה-למידה, שבה הילדים נתפסים כחושבים וכמסוגלים להגיע בעצמם להבנות המתמטיות. הדגש מושם על תהליך הגילוי, על טיפוח הבנה רלציונית ולא על הגעה לנוסחה כל שהיא. אין פירוש הדבר, שאין פתרונות נכונים ושאינם נכונים, אלא הדרכים השונות, הנכונות ושאינן נכונות, הופכות נושא לדיון, שנימוקים בצידו.

ספרד (2003), מדברת על היווצרות הסכם הוראה-למידה סמוי בין המורה לתלמידים, הסכם הקובע במידה רבה את מהלך השיחה ואת איכותה. נראה, כי בשיחה הראשונה מועבר המסר (החדשני), כי לכל תרגיל ניתן למצוא מספר דרכים לפתרון, אך יחד עמו מתהווה הסכם, כי "כל המרבה (בפתרונות) הרי זה משובח", או אולי, "נראה מי יצליח למצוא דרך שעדיין לא הוצגה" או "כל אחד והדרך שלו".

בשיחה השנייה ההסכם נראה אולי כך: המשימה היא לפתור את הבעיה, אותה ניתן לפתור בדרכים שונות. אם חשבנו על פתרון, חשוב להסביר למה, לדעתנו, הדרך מביאה לפתור נכון, כדי שכולם יבינו מה 'מסתובב' לנו בראש כתנאי להמשך השיחה. אם שגינו צריך לחשוב, מדוע זה לא נכון ולנסות לגלות היכן טעינו, מדוע, ומה היא הדרך הנכונה. כדאי להקשיב לילדים אחרים ואולי, דרך הנימוקים שלהם, להבין מה ההיגיון פה, האם הדרך שהם מציעים נכונה, ראויה, יעילה, נוחה ואולי לא. על-פי ההסכם בשיחה הראשונה, למרות המסר החדשני, מטרת השיח הלוגיסטי המתקיים בה היא לשמר את תהליך הלמידה על-ידי הצגת פתרונות, הצבת נוסחאות, העתקה ושינון. שיח לוגיסטי מסוג זה אינו קיים בשיחה השנייה, כיוון

שההסכם, המהווה בסיס לה, מדגיש הקשבה, התייחסות והגעה להבנה רלציונית יותר מאשר שינון נוסחאות. ההסכם הסמוי בבסיס השיחות הוא פועל יוצא מתרבות ההוראה-למידה, שהמורה תופסת עצמה כחלק ממנה וכך מכניסה את תלמידיה 'בין כתליה'.

שיחות, שהן חלק מתרבות של הדגמה-חשיפה ושינון מתאפיינות בלוגיסטיקה, שמטרתה להקל על קליטת הנוסחאות ושינון, ובשיח חברתי מטיפוס ביהביריסטי: חיזוקים כמו 'יופי' לתשובות נכונות ולעתים קרובות יצירת מבנה של 'שוק תשובות': כל הקודם לקלוע לדעת המורה זוכה. שיחות כאלה כמעט שאין בהן מרכיב מטה-קוגניטיבי. בשיחות אלו, לעתים קרובות מגיע אחד הילדים לפתרון הנכון (ולפעמים הפתרון הוא של המורה), זוכה לאישור המורה, ואילו האחרים מתבקשים להעתיק את הפתרון ולקבלו כ'אורים ותומים'. שיחות, שהן חלק מתרבות של הוראה-למידה של חקר וגילוי כמעט שאין בהן מרכיבים לוגיסטיים של העתקה, או הקפדה על ייצוג ויזואלי נכון של הנוסחאות. השיח החברתי המועט, המתקיים בהן מתאפיין בשמירה על זכותו של כל משתתף להביע דעתו ובעידודו לנמקה ולהבהירה, כך שעמיתיו יוכלו להבינה ולהתייחס אליה כראוי, כלומר, רב חלקו של השיח המטה-קוגניטיבי. בשיחות אלה, כאשר מגיעים לפתרונות נכונים, מושם דגש על הצדקתם ועל הוכחתם ונעשה מאמץ לבדוק, שכל התלמידים מסוגלים לפתור ולנמק. המאמץ נעשה באמצעות התערבות מינימליסטית של המורה, המכוונת בדרך כלל לבקשת הסברים והנמקות. פתרון שגוי מהווה לרוב הזדמנות לדיון. חלק מן השיחות במדגם כללו מרכיבים של הדגמה-חשיפה ושינון בצד מרכיבים של חקר וגילוי וציינו, למעשה, את המעבר מתרבות אחת לשנייה, אשר לעתים קרובות לא עבר 'יעיכול' מספיק (כפי שראינו בשיחה 'במאונך או במאוזן').

סיכום

בניתוח השיחות המתמטיות זוהו חמישה סוגי שיח: שיח מתמטי, שיח מטה-קוגניטיבי, שיח מודל, שיח לוגיסטי ושיח חברתי. לכל אחד מסוגי השיח הללו תפקיד בשיחה. השיח החברתי והשיח הלוגיסטי מתהלכים את ה'מסגרת' החברתית והארגונית שבה מתנהלת השיחה. השיח הלוגיסטי נדרש כאשר יש לארגן פעולות התומכות בהתנהלות השיחה, כמו

חלוקת אמצעי המחשה, ארגון ישיבה וכיו"ב. השיח החברתי תומך בשיחה בעיקר, כאשר מטרתו לצרף תלמידים שאינם משתלבים בשיחה למעגל המשתתפים. כפי שראינו בניתוח השיחות, לעתים המנחה או התלמידים 'בורחים' לאחד מסוגי השיח הללו על מנת שלא להתמודד עם החשיבה המתמטית הנדרשת. ההבחנה בין סוגי השיח עשויה לאפשר לסטודנטיות ולמורות לפרק את הפעילות האנליטית של התלמידים לרכיבי ביצוע ומטה-קוגניציה (סטרנברג, 1985) כדי לבחון האם הנחיית השיחות מסתפקת בהכוונה לביצוע, האם היא מקפידה ל'היכנס' לרובד המטה-קוגניטיבי, על מנת להגיע להבנה רלציונית, והאם החשיבה המטה-קוגניטיבית אליה מונחים התלמידים אכן מקדמת את הלמידה. בד בבד, ניתן להפריד מהשיח הביצועי והמטה-קוגניטיבי את השיח הלוגיסטי והחברתי על מנת לבחון את הרלבנטיות של סוגי השיח הללו לקידום השיחה.

הוראת הסטודנטיות ואימונן בניתוח השיחות המתמטיות לסוגי השיח אינה מספיקה כדי להביא לניהול 'נקי' ופורה של השיחות המתמטיות. יש להמשיך ולשכלל את המרכיבים השונים בהכשרתן של המתמחות בהוראת המתמטיקה באמצעות הנחיית שיחות מתמטיות.

היום אנו חשות, כי הכשרה כזו צריכה לכלול שני סוגי התנסות: התנסות בצפייה בשיחות מתמטיות המונחות על-ידי עמיתים ומומחים וניתוחן והתנסות בתכנון ובניהול עצמאי של שיחות מתמטיות וניתוחן. חשוב כי ההכנה להנחיית שיחות מתמטיות וניתוח השיחות לאחר שהונחו הלכה למעשה, תכלול את המרכיבים הבאים:

בעת תכנון השיח:

- ניתוח של כל בעיה מתמטית אשר תוצג לתלמידים – באלו דרכים ניתן לפתור בעיה זו? כיצד ניתן לנמק ולהוכיח כל דרך ופיתרון? האם יש לבעיה רק פתרון אחד או יותר? אלו דרכים ופתרונות יעילים יותר ומדוע?

- ניתוח הדרישות שהצגת הבעיה מציבה בפני התלמידים – איזה ידע פורמאלי קודם נדרש כדי להתמודד עם הבעיה? אלו דרכי חשיבה מתאימות ואיזו רמת התפתחות של החשיבה המתמטית נדרשת? אלו תפיסות אינטואיטיביות שגויות ביחס לבעיה עלולות להופיע ובכך להקשות את ההתמודדות של התלמידים עם הבעיה?

דה שליט, א. (2002) הרהורים על הוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי. הד החינוך פברואר-מרס.

זוובסקי, ר. (2000), המחקר הבינלאומי במתמטיקה ובמדעים Timms 1999 לשכת המדען הראשי, משרד החינוך.

טישמן, ש. & פרקינס, ד., (1997), "שפת החשיבה", בתוך: חינוך החשיבה, עלון מספר 11, הוצאת מכון ברנקו וייס לטיפוח החשיבה, ירושלים.

לינצ'בסקי, ל.ת. ותובל, ח. (1992). תפקיד המודלים בהוראת החשבון, האם אמצעי המחשה אכן מסייעים לתת-משיגים בבניית מושגים מתמטיים?, דפים 15, עמודים: 36-47.

נשר, פ., (1993) היש קשר בין ביצוע אלגוריתמי והבנה, הרצאה בכנס מוח: מרץ 1993, ירושלים: תדפיס שהוצא על-ידי משרד החינוך-לשכת המדען הראשי.

סלומון, ג., (1997), "סביבות למידה קונסטרוקטיביות חדשניות: סוגיות לעיון", בתוך: חינוך החשיבה, עלון מספר 11, ירושלים: מכון ברנקו וייס לטיפוח החשיבה.

סקאמפ, ר. (1991) הבנה רלציונית והבנה אינסטרומנטלית, חלקים א' וב', עלייה 8, ועלייה 9, ירושלים: המחלקה להוראת המדעים, האוניברסיטה העברית.

רגב, ח. ושמעוני, ש. (2000) לשוחח מתמטיקה- מדוע?, למה? ואיך? עלייה, 25, עמ': 77-90, ירושלים, המחלקה להוראת המדעים, האוניברסיטה העברית.

רייז, ר., ואן-דורמולן, ג., ופטקין, ד. (1996). תאורית ואן-הילה והוראת גיאומטריה. "מחר 98 באצבע הגליל" והמחלקה להוראת המדעים בטכניון.

"תכנית 2000", תכנית לימודים במתמטיקה לבית הספר היסודי הממלכתי והממלכתי דתי, פרוטוקול ועדת התוכנית, ת"ל, משרד החינוך, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים – טיוטה.

Atherton J., S., (2002) Learning and Teaching: Learning from experience [On-line]: UK: Available: <http://www.dmu.ac.uk/~jamesa/learning/experien.htm>

Cresswell, J.W. (1998) Qualitative Inquiry & Research Design: choosing among five traditions Thousand Oaks CA:SAGE Publications

Sfard, A., Communicational Conflict and Learning Agreement: What turns Obstacles to Mathematical Communication into Effective Triggers to Learning? (2003) EARLI Conference, Padova, Italy

Rumelhart, D.E. (1989). Towards a Micro- structural Account of Human Reasoning. In Vosniadou, S., Ortony, A. (eds.). Similarity and Analogical Reasoning. England: Cambridge University Press.

Usiskin, Z. (1982) Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry (Final Report). Chicago: Department of Education, University of Chicago

Using TIMSS to Benchmark State and Local Achievement, Policy Brief: What the TIMSS Means for Systemic School Improvement - November 1998 available at: <http://www.ed.gov/pubs/TIMSSBrief/state.html>

• בניית תרחישים (אחד או שניים) אפשריים להנחיית השיחה, הכוללים את דרכי ההצגה של הבעיות ותיהלוך ההתמודדות עמן.

ולאחר הנחיית השיחה:

• ניתוח דפוסי ההתמודדות של התלמידים עם הבעיות שהוצגו – אלו תפיסות אינטואיטיביות יחצי מבושלות' או שגויות בוטאו על-ידי התלמידים במהלך הדיון בבעיות שהוצגו? באיזו מידה אכן היה לתלמידים הידע המוקדם אשר נדרש לצורך התמודדות עם הבעיות הללו? האם הבעיות שהוצגו התאימו לרמות הקוגניטיביות של התלמידים?

• ניתוח השיחה על-פי סוגי השיח השונים שתוארו במאמר והקשר בין משקלם היחסי בשיח לאיכותו – חשוב להמשיך ולחקור ולבחון מהי התרומה של כל אחד מן המרכיבים שתוארו לעיל לפיתוח יכולות ההנחה של שיחות מתמטיות בקרב הסטודנטיות והמורות, בדרך להוראה-למידה משמעותית.

הנחיית המורות והסטודנטיות המתמחות במתמטיקה לניהול שיחות מתמטיות עם תלמידיהן, כציר מרכזי בהוראת המתמטיקה היא תהליך מורכב ורב רבדים. ביסוסו המושכל של תהליך זה על המרכיבים שתוארו לעיל יכול להוביל לדעתנו לשיפור משמעותי ביכולתן של הסטודנטיות ללמוד וללמד מתמטיקה לקראת הבנה.

מקורות

בן אסולי, א., וסחייק, ד. (2003) מדדים להשוואה בין לאומית. דו"ח מוגש לח"כ איתן כבל.

ברונר, ג'. ס. (1999) תרבות החינוך. ת"א: ספרית הפועלים.