

## הנושא: השפעת השימוש במחשבוניס גרפיים על הבנה של תלמידים בדואים את המושג 'משפחה של פונקציות'

הוכן ע"י: מחמד אבו נג'א.

תקציר: במאמר מוצג מחקר המתמקד בבדיקת ההשפעה של השימוש במחשבון גרפי, על החשיבה של תלמידים בדואים מחטיבות הביניים בנגב ועל הבנתם את המושג 'משפחה של פונקציות (ליניאריות)'. המחקר משווה את הישגיהם של תלמידים שהשתמשו במחשבון גרפי הן בהוראה והן בלמידה עם אלה שהשתמשו רק בנייר ועיפרון.

מילות מפתח: כתב העת על"ה, על"ה 34, מחקר, הוראת מתמטיקה, חשיבה מתמטית, הבנה, עזרי הוראה, מחשבון גרפי, אלגברה-פונקציות, תכונות פונקציה, מערכת צירים, פונקציה ליניארית, ייצוג, ייצוג אלגברי, ייצוג גרפי, משפחה של פונקציות, ישרים מקבילים, נקודות חיתוך, שיפוע.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 34, תשס"ה 2005, עמודים, 44-52.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 9 עמודים.

# השפעת השימוש במחשבוניס גרפיים על הבנה של תלמידים בדואים את המושג 'משפחה של פונקציות'

מחמד אבו-נג'א  
[muhamad@kaye.ac.il](mailto:muhamad@kaye.ac.il)

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב, המכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי

## הקדמה<sup>1</sup>

השימוש במחשבון הגרפי תורם להבנת המושג 'משפחה של פונקציות'.

בחרתי להשתמש במחשבון הגרפי ככלי טכנולוגי במחקר זה, כיוון שהטכנולוגיה של המחשבון הגרפי מאפשרת עשייה מתמטית משמעותית, תוך מעבר בין ייצוגים שונים של הפונקציה<sup>2</sup>, בנוסף לפעולות רבות, כפי שיפורט בהמשך. הניידות והזמינות של המחשבון הגרפי מאפשרות לתלמיד להשתמש בו בצורה יעילה בכל עת ובכל מקום.

## המחשבוניס הגרפיים והוראת המתמטיקה

המחשבוניס הגרפיים הולכים ותופסים מקום חשוב בהוראת המתמטיקה והמדעים בבתי הספר העל-יסודיים בעולם ובארץ. בשנת 1986 הוכנסו לשוק לראשונה מחשבוניס גרפיים, אשר הביאו למהפכה בתחומי לימוד המתמטיקה והוראתה בארה"ב ובמדינות רבות אחרות. דימנה וויטס (Demana & Waits, 1992) טוענים כי למחשבוניס הגרפיים יש מספר יתרונות: הם זולים וניידים, הם כוללים תוכנת פתרון נומרי ותוכנה גרפית. לדעתם, עקב עלותם הנמוכה, קלות השימוש בהם וניידותם, ניתן לראות במחשבוניס הגרפיים מחשבים זמינים לכל התלמידים. לפני כניסת המחשבוניס הגרפיים לשוק, וכתוצאה מכך לחלק מבתי-הספר, נאלצו המורים להסתמך בלעדית על מחשבים (אשר נמצאו בדרך כלל במעבדות מחשבים נפרדות), כדי לאפשר המחשה משופרת (על-ידי הלומדות) בלימוד ובהוראת מתמטיקה. דמנה וויטס (1998) טוענים כי קיימת חשיבות פדגוגית רבה לשימוש במחשבוניס הגרפיים, הניידים והזולים לקהילה המתמטית. הטכנולוגיה מספקת 'כלי' המבצע חלק ניכר מן 'החישובים והמניפולציות האלגבריות' הנעשים

תפיסת מושגים מתמטיים והבנתם היא חלק חשוב מאוד בלימוד מקצוע המתמטיקה. תחום המחקר העוסק בתפיסות של מושגים מתמטיים בקרב תלמידים הוא אחד מתחומי המחקר הרחבים ביותר. מתחילת שנות השמונים מחקרים שנעשו על-ידי טול ווינר (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983) על דימויי המושגים בלמידת הגיאומטריה ועל הקונפליקט הקוגניטיבי בלמידת הגבולות והרציפות, התמקדו בדימויים המנטליים הקיימים אצל תלמידים הנאבקים עם הגדרות מתמטיות נתונות וידועות.

בעשור האחרון, התפרסמו מחקרים רבים שבדקו שימוש בטכנולוגיה להוראת מתמטיקה בכלל ומושגים מתמטיים בפרט. שימוש זה נעשה בעיקר בעזרתן של לומדות מחשב. למרות שיש היום מחשבים בבתי-ספר, מספרם עדיין קטן ביחס למספר התלמידים. גם מעורבות המורים והמוטיבציה שלהם להשתמש במחשבים בהוראה, נשארו נחלתם של מיעוט קטן (שגב, 1999).

לעומת זה, טוענת גורב (2002) כי השימוש במחשבוניס גרפיים, מחשבוניס סימבוליים, תוכנות פתרון אלגברי ותוכנות גרפיות בכיתות הלומדות מתמטיקה מתרחב בכל רחבי העולם. יותר ויותר מורים מודעים לאפשרויות שטכנולוגיה זו מציעה ויותר מורים משתכנעים, שהשימוש בה תורם לתהליך הלמידה, ובעיקר להבנה הנרכשת תוך עבודה בסביבה רב-ייצוגית של מושגים בסיסיים.

מאמר זה מציג מחקר המתמקד בבדיקת השפעת השימוש במחשבון הגרפי, על החשיבה של תלמידים בדואים מחטיבות הביניים בנגב ועל הבנתם את המושג 'משפחה של פונקציות'. המחקר מנסה לברר: האם

<sup>2</sup> על פתרון משוואות בעזרת ייצוגים שונים כתבו אלכס פרידלנדר וחנה שטיין במאמרם: 'בחירת כלים לפתרון משוואות בסביבת למידה טכנולוגית', שהתפרסם בעל"ה 33 (2005), עמ' 55-50.

<sup>1</sup> מאמר זה מבוסס על חלק מעבודת דוקטור שנעשתה בהדרכת פרופ' שלמה וינר ופרופ' מרים עמית, אוניברסיטת בן-גוריון בנגב.

רבה יותר, קוראים ומפרשים גרפים בצורה נכונה יותר, מסיקים מידע רב יותר מגרפים נתונים, מיומנים יותר בגילוי תבניות אלגבריות המתאימות לגרפים, מאגר הפונקציות שלהם עשיר יותר ומכיל דוגמאות מסוגים שונים, והם מבינים טוב יותר את הקשר בין הייצוגים השונים של הפונקציה (גרפי, אלגברי, נומרי). הארווי ואחרים (Harvey, Waits & Demana, 1995) מראים כי תלמידים שלמדו מתמטיקה בעזרת מחשבוני גרפיים השתפרו בשאלות שבהן קיים יסוד גרפי. לאחרונה, אלח'טיב וואמבלר (Alkhateeb & Wampler, 2002) בדקו את השפעת השימוש במחשבוני הגרפיים על ההבנה של תלמידים את מושג הנגזרת. הם מצאו כי תלמידים שלמדו בעזרת מחשבוני גרפיים השיגו תוצאות גבוהות באופן משמעותי מאלה אשר למדו בשיטה המסורתית. בארטון (Barton, 2003) חקר שיטות שבהן טכנולוגיות שונות משפיעות על למידת המושג 'טרנספורמציות של גרפים'. השילוב של המחשבון הגרפי בהוראה בדרך דינמית ואינטראקטיבית ממחיש בצורה ברורה מושג חשוב זה.

למרות שמחקרים רבים מעודדים שימוש במחשבוני גרפיים, קיימים גם מחקרים שמסקנותיהם שונות, ויש לבחון אותם היטב. בקר (Becker, 1992) מצא, כי בקורס הכנה לחדו"א בקולג' אמריקאי השימוש במחשבוני גרפיים לא שיפר את ההבנה של התלמידים את מושג הפונקציה. גיאמטי (Giamati, 1991) אף טענה, כי התלמידים בקבוצת הביקורת (ללא מחשבוני) הבינו באופן נכון ומעמיק יותר את מושג הטרנספורמציות (מתיחות והזזות) של גרפים. על-פי גיאמטי התלמידים שהפיקו תועלת מהמחשבוני הגרפיים היו רק אלה שמראש היתה להם הבנה מוצקה של הקשר בין הגרף למשוואה. גיאמטי מודה, כי יתכן שאחד הגורמים לחוסר ההשפעה של המחשבון הוא אי-שליטה של התלמידים בחלק ממאפייני המחשבוני הגרפיים.

### שיטה

אוכלוסיית המחקר כללה תלמידים מכיתות ט מהמגזר הבדואי בנגב, הלומדים בבתי-הספר המקיפים או בחטיבות הביניים ביישובים הבדואים בנגב. כל הכיתות הן הטרונגניות. מאוכלוסייה זאת בחרתי באקראי שלוש כיתות ט משלושה בתי ספר שונים – קבוצת הניסוי כללה 95 תלמידים. כמו כן בחרתי באקראי שלוש כיתות ט אחרות מאותם בתי-ספר – קבוצת הביקורת

בעזרת נייר ועיפרון. האתגר החדש שניצב בפנינו הוא לחשוב באופן שונה על חישובים. יש לבחון כל אלגוריתם המבוצע בעזרת נייר ועיפרון ולבדוק האם הוא תורם במשהו להבנת התהליך: אם לא, אפשר לוותר עליו ולבצע את התהליך בעזרת הכלי הטכנולוגי.

העבודה בעזרת כלים טכנולוגיים המאפשרים עבודה עם ייצוגים שונים במקביל (אלגברי, גרפי, טבלת ערכים, ועוד), מפתחת את החשיבה ומעמיקה את ההבנה של מושגים ותהליכים מתמטיים. כבר היום לומדים התלמידים בכיתות ט-י חומר שנלמד בעבר בכיתות י"א-י"ב. כך נותר לנו זמן רב יותר להעמיק הבנה של מושגים חשובים. תלמידינו יכולים לבצע עבודות חקר, לשער השערות ולבדוק אותן, בלי לבזבז זמן בחישובים מייגעים. אין ספק שיכולות מסוימות 'הולכות לאיבוד' בשימוש מרובה בטכנולוגיה. לכן יש ליכולת האומדן חשיבות רבה ביותר, ויש לדאוג לביסוסה, תוך שילובה בעבודה היום-יומית. יש לזכור שהטכנולוגיה מאפשרת לתלמידים רבים המתקשים בחישובים טכניים או נרתעים מהם, להגיע להבנה וליכולת יישום של מושגים ותהליכים מתמטיים.

כיום ישנה אפשרות לתת כלי זמין, יעיל וקל לנשיאה כמעט לכל תלמיד. עלינו לשלב את הטכנולוגיה בלמידה, והמחשבוני מאפשרים גם לתלמידים, שאין ברשותם מחשב ותוכנות מתמטיות בבית, ללמוד ברוח הזמן. מוטל עלינו, אפוא, למצוא את הדרך להקניית הבנה מתמטית, ויכולת יישום בעזרת הטכנולוגיה הקיימת וזו שעדיין בדרך.

תמונה מפורטת וברורה של השפעת ההוראה בעזרת מחשבוני גרפיים מתקבלת ממחקרים הבודקים הבנה של מושגים מתמטיים מסויימים ובפרט אלו הקשורים להבנה של המושגים השייכים לנושאים של פונקציות וגרפים. רבים ממחקרים אלה הם בעלי אופי תיאורי בלבד. דנהם (Dunham, 1992), וילסון וקרפפל (Wilson and Krapfl, 1994) (Penglase & Arnold, 1996) סקרו באופן מעמיק את מרבית המחקרים העוסקים בהוראת המתמטיקה בעזרת מחשבוני גרפיים עד לשנת 1996. הם מסכמים ואומרים, כי באופן כללי רוב המחקרים שבדקו הבנת מושגים מראים, כי בהשוואה לתלמידים הלומדים בדרך המסורתית, תלמידים המשתמשים בטכנולוגיה גרפית נמצאים בשלב גבוה יותר של הבנה גרפית. הם יודעים לקשר בין גרף הפונקציה לתבנית שלה בהצלחה

הקטגוריות אסתפק בהצגת הנתונים. במחקר השלם מוצגות כל הקטגוריות והדוגמאות.

#### שאלה 1א

שרטטו את הישרים:

$$y = 3x, y = 3x + 1, y = 3x - 3, y = 3x + 6$$

באותה מערכת צירים.

קטגוריה A: תשובה נכונה

לקטגוריה זו השתייכו 30% מקבוצת הניסוי ו-36% מקבוצת הביקורת.

קטגוריה זו כוללת: שרטוט במערכת צירים עם שנתות ומספרים ליד השנתות, שרטוט במערכת צירים עם שנתות אבל בלי מספרים ליד השנתות ושרטוט במערכת צירים ללא שנתות וללא מספרים ליד השנתות.

קטגוריה B: תשובה לא נכונה

לקטגוריה זו השתייכו 70% מקבוצת הניסוי ו-64% מקבוצת הביקורת.

את השרטוטים הלא נכונים חילקתי לתת-קטגוריות אחדות, הן לקבוצת הניסוי והן לקבוצת הביקורת.

תת-קטגוריה א: אין קשר נכון בין הגרף לבין מערכת הצירים

יש לציין, שאחוז גדול (56%) של תשובות מקבוצת הניסוי משתייך לתת-קטגוריה זו. אחת הסיבות הבולטות ביותר לדעתי היא שהתלמיד תופס בצורה כוללת את השרטוטים במסך של המחשבון הגרפי: הוא תופס אותם כתמונה אחת ולא מתחשב בקנה המידה (איורים 1, 2, 3). על אף, שחלק מהתלמידים העתיקו את השרטוטים באופן בו הישרים אינם מקבילים (איור 3), עדיין רבים השיבו נכון בסעיף 1ב 'מהי התכונה המאפיינת את כל הפונקציות שברשימה?' וציינו, שהתכונה המאפיינת את הישרים היא ההקבלה. סיבה אפשרית אחרת היא חוסר תשומת לב של התלמידים לפרטים קריטיים בזמן ההעתיקה ממסך המחשבון (לגבי קבוצת הניסוי), או בזמן סימון הנקודות במערכת הצירים (לגבי קבוצת הביקורת). הסיבה השלישית יכולה להיות שהתלמידים אינם תופסים את המשמעות המתמטית של הנקודות המייצגות יחידות על הצירים. הם תופסים את הנקודות כאלמנט ויזואלי חסר משמעות (כלומר, הם מבחינים בכך שיש נקודות בשרטוט אבל אינם מודעים למשמעותן).

כללה 89 תלמידים. בקבוצת הניסוי למדו התלמידים, בשילוב מחשבוני גרפיים, את הנושאים המתמטיים הבאים הקשורים במושג הפונקציה: משפחות של פונקציות קוויות ושל פונקציות ריבועיות, התכונות המאפיינות משפחות של פונקציות, והתבנית האלגברית שמייצגת משפחות פונקציות. התלמידים מקבוצת הניסוי קיבלו את המחשבוני בהשאלה למשך כל שנת הלימודים. הם קיבלו אף הדרכה ועידוד לשימוש במחשבוני בכיתה בכל שיעורי המתמטיקה, בשיעורי הבית ובעת פתרון השאלות המופיעות בגוף השאלון המתואר בהמשך. במקביל למדו התלמידים מקבוצת הביקורת את אותם הנושאים בשיטה הרגילה (ללא מחשבוני גרפיים) על-ידי אותם מורים, אשר לימדו בקבוצת הניסוי. המורים, שלימדו בקבוצת הניסוי ובקבוצת הביקורת עברו השתלמות בשימוש במחשבוני גרפיים שהתבצעה על-ידי. כחוקר, נכחתי במרבית השיעורים בכיתות הניסוי ובכיתות הביקורת בתקופת הניסוי. העברת השאלונים התבצעה על-ידי בלבד.

ערכתי, שאלון לבדיקת ההבנה של המושג 'משפחה של פונקציות'. בשאלון היו שתי שאלות פתוחות, בכל אחת ארבעה סעיפים. השאלון הועבר לתלמידים אחרי סיום ההוראה של יחידת הלימוד. ניתוח התוכן של התשובות איפשר לאפיין את צורות החשיבה של התלמידים בשתי הקבוצות. דפוסי התשובות מוינו לפי קטגוריות. ערכתי מבחן  $\chi^2$  לבדיקת ההבדלים בין ההישגים של התלמידים בקבוצת הניסוי לבין אלה של התלמידים בקבוצת הביקורת.

#### ממצאים וניתוחם - ההבדלים בצורות החשיבה

להלן יוצגו ההבדלים בין תשובות התלמידים בשתי הקבוצות ובמיוחד ההבדלים בצורות החשיבה בנושא 'משפחה של פונקציות'. במחקר, נעשה ניתוח מפורט של התשובות לכל אחד מהסעיפים. במאמר הנוכחי אציג ניתוח כזה רק לשני הסעיפים הראשונים של השאלה הראשונה. המסקנות, שנבעו מניתוח כזה לשאלות האחרות, דומות לאלה המוצגות כאן.

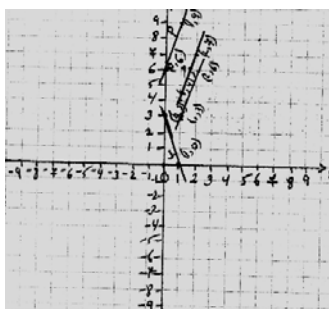
ניתוח התשובות של התלמידים הוביל אותי למיון לקטגוריות שונות. בתוצאות הבאות אני מתייחס לכל אחת מהקבוצות בנפרד, לקבוצת הניסוי (N=95) ולקבוצת הביקורת (N=89). אסתפק בהצגת הדוגמאות המעניינות והאופייניות בכל אחת מהקטגוריות. בשאר

היו גם תלמידים, שהשתמשו במערכת צירים ממוספרת (איור 2) אך הישרים ששרטטו לא היו במקומות המתאימים במערכת הצירים.

**תת-קטגוריה ב:** תשובות עם כשל ניהולי  
תת-קטגוריה זאת היא ייחודית לקבוצת הביקורת (28%), מאחר שלא קיימת אפשרות של תשובה עם כשל ניהולי בקבוצת הניסוי. הדבר נובע מכך, שהמחשבון הגרפי מבצע את החישובים ומשרטט את הגרפים ולא התלמידים.

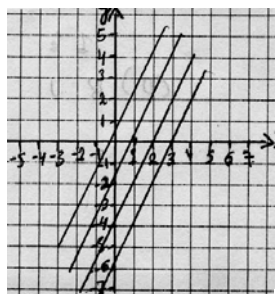
המונח 'כשל ניהולי' יתבהר בעזרת הדוגמאות שלהלן:  
**א) שרטוט לא נכון של כל הישרים או חלקם בגלל טעויות חישוב (18%).** טעות חישוב גורמת לתלמיד לשרטט ישרים לא מתאימים למשוואות הנתונות (איור 4) ולבסוף להסיק מסקנות מוטעות.

**ב) הכנסת כל הנקודות של כל הישרים למערכת הצירים, מבלי לשרטט את הישרים עבור כל משוואה לחוד, ואחר כך כשל בחיבור הנקודות המתאימות (10%).** התלמידים כנראה לא שולטים בטכניקת השרטוט של שני ישרים או יותר באותה מערכת צירים. במקום שישרטטו ישר אחרי ישר, הם מסמנים את כל הנקודות שהפיקו מהמשוואות של הישרים השונים במערכת הצירים בזו אחר זו. רק לאחר מכן הם מנסים לקשר ביניהם על-ידי ישרים. את הנקודות שנשארות בודדות ולא ניתן למצוא ישר אחד העובר דרכן, הם מחברים בקו עקום (איורים 5, 6). פועלת אצלם הסכימה של העברת קו עקום דרך כמה מהנקודות תוך התעלמות, כנראה לא מודעת, מכך שעליהם לקבל ישרים ולא עקומות (רסלאן, 1996). חשוב לציין, שחלק מהתלמידים עשו את החישובים בצורה נכונה.

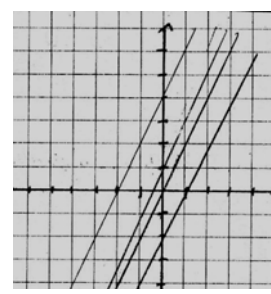


איור 4: שרטוט עם טעויות חישוב

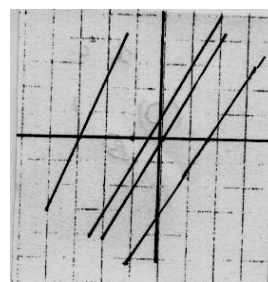
השרטוטים באיורים 1 ו-3 אינם נכונים כיוון שהגרפים בשרטוטים האלה לא מייצגים את המשוואות הנתונות.



איור 2: שרטוט ישרים, שאינם מייצגים את המשוואות הנתונות, במערכת צירים עם שנתות ועם מספרים.



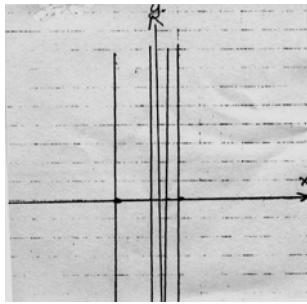
איור 1: שרטוט ישרים, שאינם מייצגים את המשוואות הנתונות, במערכת צירים עם שנתות.



איור 3: שרטוט ישרים במערכת צירים ללא שנתות וללא מספרים, כאשר אחד הישרים לא מקביל לשאר ולא נראה חותך את ציר ה-y.

חשוב לציין, שאחוז התלמידים מקבוצת הביקורת המשתייכים לתת-קטגוריה זו הוא נמוך (4 תלמידים). רוב התלמידים שהשתמשו בנייר ובעיפרון סימנו את הנקודות בהן בחרו כמייצגות, וחיברו אותן על-ידי ישר מתאים. אך היו תלמידים שלא הבינו את הטכניקה של שרטוט גרף הפונקציה, ולכן שרטטו את הישרים בצורה ספונטאנית (איורים 1, 2), ללא כל קשר עם המשוואות הנתונות. ייתכן, שתלמידים אלה העתיקו את השרטוטים משכניהם.

נוסף על האמור לעיל, יש להבחין גם בין שני סוגי תשובות: בסוג הראשון, התלמיד משרטט את הישרים כשהם חותכים את שני הצירים, וזה מופיע אצל התלמידים שהשתמשו במחשבון הגרפי במסך התקני-Zoom-6 (בחלון הזה נראה התחום:  $[-10, 10]$ ) גם עבור ציר  $x$  וגם עבור ציר  $y$ . בסוג השני (איור 3), התלמידים שרטטו את הישרים לפי מראית העין במסך המחשבון הגרפי. לא כל הישרים חותכים את ציר ה- $y$ , כי התלמידים האלה השתמשו במסך העשירוני (Zoom-4 בחלון הזה ציר  $x$  הוא  $[-4.7, 4.7]$  וציר  $y$   $[-3.1, 3.1]$ ) במסך הזה לא מופיעות כל נקודות החיתוך עם הצירים). ייתכן, שדימוי המושג 'גרף' אצל חלק מהתלמידים הוא 'מה שרואים במסך המחשבון'.



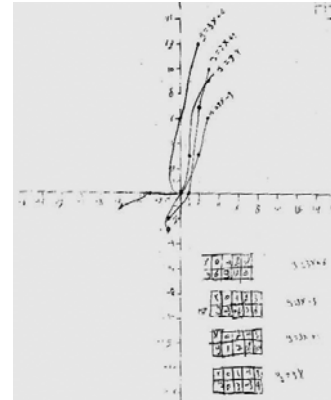
איור 8: שרטוט המתאר חשיבה פסאודו-אנליטית

באיור 7 נראה כי התלמיד תופס את המקדם של  $x$  במשוואות הישרים כערך השיעור של  $x$  ואת המקדם החופשי כערך השיעור של  $y$   $\{(3,6), (3,-3), (3,1), (3,0)\}$  הוא סימן את הנקודות וחיבר אותן בישר. התנהגות התלמיד באיור 7 אינה מבוססת על מושגים והבנתם אלא בעיקר על צורת ייצוג החיצונית הויזואלית. אצל תלמידים הפועלים בדרך זו לא קיים מנגנון ביקורת שיבדוק את האסוציאציה הראשונית שעלתה בתודעתם והנחתה אותם לביצוע השרטוט. את סוג ההתנהגות (החשיבה) המופיעה באיור 7 מכנה וינר (Vinner, 1993; 1997) בשם חשיבה פסאודו-מושגית. באיור 8 התלמיד הציב במקום  $y$  את הערך '0' בכל אחת מהמשוואות ומצא את הערך של  $x$  על-ידי פתרון של המשוואות המתקבלות. אחר כך הוא שרטט ישרים מקבילים לציר ה- $y$  לפי ערכי  $x$  שמצא, במערכת צירים ללא יחידות וללא מספרים, כאשר הוא נעזר במשבצות של הדף. כאן התלמיד השתמש אולי באחת הפעולות שעושים כדי לשרטט גרף (אפשר לשרטט ישר באמצעות מציאת נקודות חיתוך הישר עם הצירים). הוא נתפס לפרטים חיצוניים בלי להפעיל מנגנון ביקורת כלשהו שיבדוק את האסוציאציה הראשונית שעלתה בתודעתו והנחתה אותו לביצוע השרטוט. התלמיד אמור לדעת, שהישרים אינם מקבילים לציר ה- $y$ . סוג זה של התנהגות (חשיבה) מכנה וינר (שם) בשם חשיבה פסאודו-אנליטית.

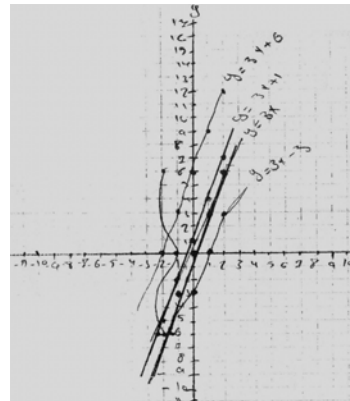
תת-קטגוריה ד: שרטוט מערכת צירים בלבד או העדר תשובה

גם זו תת-קטגוריה ייחודית לקבוצת הביקורת (9%) מאחר שבקבוצת הניסוי כל תלמיד המקיש את משוואות הישרים במחשבון הגרפי, בצורה נכונה או לא נכונה יקבל שרטוט על מסך המחשבון הגרפי.

מטבלה 1 שלהלן עולה, כי אין הבדל משמעותי בין שתי הקבוצות לגבי שאלה 1א. מבחן  $\chi^2$  מראה גם, שההבדל אינו מובהק ( $p = 0.432$ ). תוצאה זאת רומזת

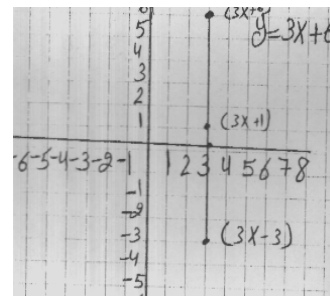


איור 5: שרטוט המציג כשל בחיבור הנקודות המתאימות



איור 6: שרטוט המציג כשל בחיבור הנקודות המתאימות

תת-קטגוריה ג: שרטוט לא נכון כתוצאה מחשיבה פסאודו-מושגית<sup>3</sup> או חשיבה פסאודו-אנליטית<sup>4</sup>.  
תת-קטגוריה ייחודית לקבוצת הביקורת (6%).  
דוגמאות:



איור 7: שרטוט המתאר חשיבה פסאודו-מושגית

<sup>3</sup> התנהגות (או חשיבה), שאינה מבוססת על מושגים ועל הבנתם אלא בעיקר על צורת ייצוג החיצונית (ויזואלית או מילולית) (וינר, 1993; 1997; Vinner).

<sup>4</sup> התנהגות, שבה התלמידים נתפסים לפרטים חיצוניים ונותנים להם להוליכם לביצוע פעולות שונות ומשונות, מבלי שיפעילו איזה שהוא מנגנון ביקורת (וינר, 1993; Vinner, 1997).

על כך, שהשימוש במחשבון הגרפי אינו תורם למיומנויות שרטוט גרפים של פונקציות. יש להעיר, כי רוב התלמידים מקבוצת הניסוי, שלא שרטטו נכון, השתייכו לתת-הקטגוריה 'אין קשר נכון בין הגרף למערכת הצירים'. סביר להניח, כי אם תלמידים, המשתמשים במחשבון הגרפי יתרגלו היטב את העתקת הגרפים ממסך המחשבון הגרפי, תהיינה למשימה זו תוצאות טובות יותר.

קבוצה		קטגוריה
ביקורת	ניסוי	
32 36%	28 30%	תשובה נכונה A
57 64%	67 70%	תשובה לא נכונה B
89 100%	95 100%	סה"כ

$$\chi^2 = 0.878 \quad p = 0.432 \quad df = 1$$

טבלה 1: התפלגות התשובות בשאלה 1 לקטגוריות השונות לפי קבוצות

#### שאלה 1ב

מהי התכונה המאפיינת את כל הפונקציות שברשימה?

קטגוריה A: התכונה המאפיינת היא 'ישרים מקבילים' – התייחסות לגרף ולא לפונקציה לקטגוריה זו משתייכים 23% מהתשובות של קבוצת הניסוי ו-18% מקבוצת הביקורת. תשובות אופייניות:

- "התכונה המאפיינת היא ישרים מקבילים".  
- "כולם ישרים מקבילים".

תשובות אלה נתנו תלמידים מקבוצת הניסוי שהבחינו בכך בצורה טובה במסך המחשבון הגרפי. זאת על אף שחלקם לא העתיק בצורה נכונה את הישרים למחברת. חשוב לציין, שתלמידים מקבוצת הביקורת, שלא שרטטו באופן מדויק את הישרים, לא ענו לשאלה זו כלל. דבר זה יכול להסביר את ההבדל בין אחוזי המשיבים לשאלה זאת בשתי הקבוצות.

קטגוריה B: התכונה המאפיינת היא "שיפוע שווה" – התייחסות לפונקציה לקטגוריה זו משתייכים 32% מהתשובות של תלמידי קבוצת הניסוי ו-30% מקבוצת הביקורת. תשובות אופייניות:

- "התכונה המאפיינת את כל הפונקציות היא שיש להן אותו שיפוע (3)".

- "התכונה המאפיינת היא השיפוע השווה".

רוב התלמידים, שבחרו בתשובות אלה הסתכלו על הצד האלגברי בלבד. ייתכן, שהם הסתפקו בתכונה זאת משום שהיה להם ברור מאליהם שאם השיפועים שווים אז הישרים מקבילים. מצד שני ייתכן שכמה תלמידים שמו לב שהשאלה מתייחסת לפונקציות ולא לגרפים של הפונקציות. כיון שהשאלה לא מתייחסת לגרפים של הפונקציות, גם אין חשיבות לשימוש במחשבון הגרפי, ולכן אין לצפות שיהיה הבדל בין קבוצת הניסוי לקבוצת הביקורת, ואכן אחוזי המשיבים לקטגוריה הזאת בשתי הקבוצות היה כמעט שווה.

קטגוריה C: תשובה המשלבת את ההיבט האלגברי עם ההיבט הויזואלי

לקטגוריה זו משתייכים 34% מהתשובות של תלמידי קבוצת הניסוי ו-17% מקבוצת הביקורת.

הערה: הסוגריים המרובעים מציינים את תוספת החוקר להשלמת המשפט.

תשובות אופייניות:

- "התכונה המאפיינת היא] ישרים מקבילים ולהם שיפוע משותף 3".

- "לכולם אותו שיפוע (והם ישרים) מקבילים".

- "כל הישרים האלה מקבילים ולהם אותו שיפוע".

- "לכולם אותו שיפוע והוא 3, ישרים מקבילים ועולים".

תלמידים, שהגיעו לתשובות אלה מגלים התייחסות הן לצד הגרפי והן לצד האלגברי. התלמידים יכלו לעבור מייצוג גרפי לייצוג אלגברי ללא כל קושי ובהתאם לצורכיהם, תופעה שנצפתה על ידי דויר וזאנגור (Doerr & Zangor, 2000) וגם על ידי גורב (2000).

שימוש במבחן  $\chi^2$  (טבלה 2) מראה, שאכן ההבדל בין תשובות התלמידים בשתי הקבוצות הוא מובהק ( $p = 0.001$ ) תוצאה זו מעידה, כי השימוש במחשבון הגרפי תורם לפיתוח החשיבה המתמטית הן לצד האלגברי והן לצד הויזואלי ומתיישבת עם התוצאות שנתגלו אצל דויר וזאנגור.

קטגוריה D: תשובות לקווים מסוגים שונים

לקטגוריה זו משתייכים 11% מהתשובות של תלמידי קבוצת הניסוי ו-35% מקבוצת הביקורת.

קטגוריה זאת כוללת סוגים שונים של תשובות בשתי

y (ניסוח שאינו מדויק, כמובן). התלמיד מבלבל בין a לבין b. תהיה הסיבה אשר תהיה, התנהגות מסוג זה היא התנהגות פסאודו-מושגית.

5. העדר תשובה

חשוב לציין, שאחוז התלמידים מקבוצת הניסוי שלא ענו לשאלה הוא קטן מאד (2% יחסית לאחוז התלמידים מקבוצת הביקורת שלא ענו לשאלה (17%).

קבוצה		קטגוריה
ביקורת	ניסוי	
16 18%	22 23%	A: התכונה המאפיינת היא 'ישרים מקבילים' – ההתייחסות לגרף ולא לפונקציה
27 30%	30 32%	B: התכונה המאפיינת היא 'שיפוע שווה' – ההתייחסות לפונקציה
15 17%	32 34%	C: תשובה המשלבת את ההיבט האלגברי עם ההיבט היוזואלי
31 35%	11 11%	D: תשובות לקויות מסוגים שונים
89 100%	95 100%	סה"כ

$$\chi^2 = 16.6 \quad p = 0.001 \quad df = 3$$

טבלה 2: התפלגות התשובות בשאלה ב1 לקטגוריות השונות לפי קבוצת

ניתן לראות מתוך הטבלה, כי קיים הבדל מובהק (p = 0.001) בין קבוצת הניסוי לבין קבוצת הביקורת. מקורו בהבדל בין הקבוצות בקטגוריות A, C ו-D. יש לציין, כי קטגוריות A, B ו-C מתארות תשובות נכונות. תוצאות אלה מלמדות, כי תלמידים, שלמדו מתמטיקה בעזרת מחשבון גרפי, השתמשו בהצגה הגרפית של הפונקציות כדי לקבוע את התכונה המאפיינת את המשפחה הנתונה יותר מאשר התלמידים בקבוצת הביקורת. המחשבון הגרפי מראה את הגרפים של הפונקציות במשפחה בצורה מדויקת והתלמידים יכולים בנקל לגלות תכונה אופיינית. ניתן ללמוד גם, כי לתלמידים בקבוצת הניסוי היתה הסתכלות יותר עשירה לגבי התכונה המאפיינת את המשפחה. הטבלה מצביעה גם על כך, שיש הבדל מובהק לטובת קבוצת הניסוי בין מספר נותני התשובות הלקויות. כמו כן חשוב לציין, כי אין הבדל מובהק בין מספר התלמידים

הקבוצות כמו:

1. תשובה המעידה שהתלמיד לא גילה את התכונה האופיינית המייחדת את המשפחה דוגמה: "[התכונה המאפיינת היא] כולם ישרים".

2. תשובה עם ליקויים חמורים בניסוח. דוגמאות:  
א. "[התכונה המאפיינת היא] כל המשוואות מקבילות".  
ב. "[התכונה המאפיינת היא שכולם] אותו ישר".  
ג. "התכונה המאפיינת [את] כל הפונקציות היא a".  
ד. "[התכונה המאפיינת היא] כל הפונקציות עולות למעלה ובאותו כיוון".

ייתכן שיש בכל התשובות לעיל איזו הבנה עם חוסר יכולת ניסוח.

3. תשובות הקשורות למספר '3' באיזשהו אופן, המספר המשותף לכל המשוואות. דוגמאות:  
א. "[התכונה המאפיינת היא שכל הפונקציות] חותכות הציר ב-3".  
ב. "[התכונה המאפיינת היא שכל הפונקציות] חותכות בנקודה 3".  
ג. "[התכונה המאפיינת היא שכל הפונקציות] נחתכות על הציר 3x".  
ד. "[התכונה המאפיינת היא] כל התמונות לפונקציות הן 3".

תלמידים אלה מחפשים את הדבר המשותף לכלל הפונקציות ברשימה ונתפסים לפרט חיצוני שאינם יודעים לתת לו משמעות (לא אלגברית ולא ויזואלית). הדוגמאות א, ב ו-ג יכולות להעיד גם על בלבול בין תפקידי הפרמטרים a ו-b במשוואת הישר  $y = ax + b$ .

4. תשובות פסאודו-מושגיות. דוגמאות:

א.  $y = ax - 2$

ב.  $3x$

ג. נקודת החיתוך

בדוגמה ג למשל, התלמיד מכיר את המונח 'נקודת חיתוך' והוא מנסה להשתמש בו כדי לענות על השאלה, אף שתשובה זו היא חסרת משמעות בהקשר זה. ייתכן גם שהתלמיד אינו מבחין בין 'שיפוע' לבין 'נקודת חיתוך' עם ציר ה-y. זה ייתכן משום שהמורה אומר לתלמידים כי במשוואה המפורשת של הישר  $y = ax + b$  הפרמטר a הוא השיפוע והפרמטר b הוא נקודת החיתוך עם ציר ה-



הבדל לטובת קבוצת הניסוי, להפך: היו אפילו הבדלים לא מובהקים לטובת קבוצת הביקורת. חשוב לציין, שכל השאלות המופיעות בשאלון הן ברמה כזאת, שאפשר לפתור אותן הן בעזרת המחשבון הגרפי והן בלעדי. השאלות תוכננו כך, כדי שניתן יהיה להשוות בין תלמידים מקבוצת הניסוי לתלמידים מקבוצת הביקורת. ההבדל היחיד בין שתי הקבוצות במהלך ההוראה והלמידה ובעת מילוי השאלון היה 'התערבות' המחשבון הגרפי. יש לציין, כי כחוקר העברתי את השאלונים והייתי נוכח בעת מילוי השאלונים כפי שהוזכר בפרק השיטה. במהלך הצפייה שלי בתלמידים מקבוצת הניסוי, לא ראיתי אף תלמיד, שלא השתמש במחשבון הגרפי בעת מילוי השאלון, אף שלא נכתבה כל הוראה מפורשת שחייבה את השימוש במחשבון הגרפי. כך ניתן להבין, כי השימוש במחשבון הגרפי בשיעורי המתמטיקה במהלך ההוראה לפני מילוי השאלונים, עיצב אותו ככלי עזר חשוב בעת ביצוע משימות מתמטיות, כמו אלה שהופיעו בשאלונים.

ניתוח הממצאים, כפי שהוצג לעיל, בקטגוריות השונות, בדוגמאות ובטבלאות מספק ראיות לכך שהתלמידים מקבוצת הניסוי הצליחו יותר בביצוע המשימות. הצלחה זו מיוחסת להיתמכות שלהם במחשבון הגרפי בשיעורי המתמטיקה ובמילוי השאלון המתמטי. הממצאים מצביעים על כך, שהתלמידים מקבוצת הניסוי הצליחו יותר בכל השאלות בהן נדרשה התייחסות לגרפים של הפונקציות. ממצא זה עולה בקנה אחד עם הממצאים שמצאו הארווי ואחרים (Harvey, Waits & Demana, 1995).

התבוננות מעמיקה בממצאים מראה, כי הצלחתם של התלמידים, שהשתמשו במחשבון הגרפי בבניית תבניות אלגבריות למשפחות הפונקציות שהופיעו בשאלון, היתה גבוהה הרבה יותר, מזו של התלמידים שלא השתמשו במחשבון הגרפי. מסקנה זו עולה בקנה אחד עם דיווחים של מספר חוקרים כמו דמנה וויטס (Ruthven, 1990), (Demana & Waits, 1990), דור וזאנגור (Doerr & Zangor, 2000), גורב (2002) ופרל (2002).

התבוננות חוזרת ומעמיקה בקטגוריות ובטבלאות מראה, כי אחוז התלמידים מקבוצת הניסוי, שמראים חשיבה משמעותית, (כלומר מצליחים לפתור שאלות מתמטיות הדורשות חשיבה והבנה מתמטית) גדול בהרבה מאחוז התלמידים מקבוצת הביקורת, שמראים חשיבה דומה. כמו כן, התברר, כי תלמידים בשתי

בקבוצת הניסוי שהשיבו לשאלה 1ב באמצעות ההצגה האלגברית לבין מספר התלמידים שעשו כן מקבוצת הביקורת. תוצאה זאת סבירה מאוד מאחר שאין חשיבות למחשבון הגרפי בעניין זה.

יש לומר, כי למרות 'הכישלון' בסעיף א של השאלה, יש הצלחה טובה בסעיף ב ובסעיפים הבאים של השאלה. ייתכן, שהסיבה לכך היא שהשרטוט האמיתי אצל התלמידים בקבוצת הניסוי נשמר במסך המחשבון. רוב התלמידים שהשתייכו לקטגוריה B (תשובה לא נכונה) בשאלה 1א מקבוצת הניסוי בגלל העתקת השרטוט בצורה לא נכונה, לא שמרו על מיקום נכון של הישרים במערכת הצירים. בהמשך, תלמידים השתמשו בשרטוט שהופיע במחשבון ולא בתמונה שהעתיקו ממסך המחשבון. דבר זה לא קיים אצל התלמידים מקבוצת הביקורת. רוב התלמידים בקבוצת הביקורת משתייכים לקטגוריה זו בגלל כשל בשרטוט, הנובע מכשל ניהולי או מחשיבה פסאודו-מושגית. תלמידים אלה יצרו שרטוטים שגויים, שלא מבליטים את התכונה המאפיינת את הפונקציות, והדבר גרם לכישלון גם בביצוע המשימות הנוספות בשאר סעיפי השאלה.

#### שאלה 1ג

תנו דוגמה לשתי פונקציות נוספות המקיימות אותה התכונה שמצאתם בסעיף ב? נמקו!

#### שאלה 1ד

קבעו את התבנית האלגברית הכללית המתאימה לכל הפונקציות המקיימות את התכונה שמצאתם בסעיף ב. הסבירו את תשובתכם!

הערה: הממצאים והמסקנות מניתוח התשובות לשאלות אלה ולשאלה 2 דומים, ולכן מפאת קוצר היריעה נסתפק בתיאורים שלעיל.

### סיכום ודיון

מניתוח התוצאות של השאלון מתברר, כי יש הבדלים מובהקים בין התלמידים, שלמדו את הנושא בעזרת מחשבונים גרפיים (קבוצת הניסוי) לבין התלמידים, שלמדו אותו ללא מחשבונים גרפיים (קבוצת הביקורת). ההבדלים היו בעיקר בסעיפים, הדורשים הסקה מתמטית, כמו מציאת תכונה אופיינית למשפחת פונקציות, מציאת דוגמאות של פונקציות, המקיימות תכונה אופיינית וקביעת תבניות אלגבריות של משפחות פונקציות, המקיימות תכונות מסוימות. אבל בסעיפים, שדרשו שרטוט נציגים של משפחות הפונקציות, לא היה

- Demana, F., & Waits, B.K. (1990), The Role of Technology in Teaching Mathematics, *Mathematics Teacher*, 83(1), p27-31.
- Demana, F., & Waits, B.K. (1992), 'Soundoff: A Computer for all Students', *Mathematics Teacher*, 85(2), p94-95.
- Doerr, H. M., & Zangor, R. (2000), Creating Meaning for and with Graphing Calculator, *Educational Studies in Mathematics*, 41, p143-163.
- Dunham, P. (1992), Teaching with Graphing Calculators: A Survey of Research on Graphing Technology, *Proceedings of the Fourth Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, Reading, MA: Addison-Wesley.
- Giamati, C. M. (1991), The Effect of Graphing Calculator Use On Students' Understanding of Variations on a Family of Equations and their Transformations of their Graphs, (Doctoral dissertation, University of Michigan 1990), *Dissertation Abstracts International*, 52 2511A.
- Harvey, J., Waits, B. & Demana, F. (1995), The Influence of Technology on the Teaching and Learning of Algebra, *Journal of Mathematical Behavior* 14, p75-109.
- Penglas, M., & Arnold, S. (1996), The Graphics Calculator in Mathematics Education: A Critical Review of Recent Research, *Mathematics Education Research Journal*, 8(1), 58 – 90.
- Ruthven, K. (1990), 'The Influence of Graphic Calculator Use on Translation from Graphic to Symbolic Forms', *Educational Studies in Mathematics*, 21, p431-450.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981), Concept Images and Concept. Definition in Mathematics with Particular Reference to Limit and Continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, p151-169.
- Vinner, S. (1983), 'Concept Definition Concept Image and the Notion of Function', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, p293-305.
- Vinner, S. (1997), The Pseudo-Conceptual and The Pseudo-Analytical Thought Processes in Mathematics Learning, *Educational Studies in Mathematics*, v34, p 97 – 129, 1997.
- Wilson, M., & Krapfl, C. (1994), 'The Impact of Graphic Calculators on Students' Understanding of Function', *Journal of Computer in Mathematics and Science Teaching*, 13(3), p252-264.

הקבוצות מראים חשיבה פסאודו-מושגית וחשיבה פסאודו-אנליטית, אבל הדבר בולט במיוחד אצל התלמידים מקבוצת הביקורת. הידע הלא-שלם והלא-מגובש גורם לכך שהתלמידים 'ממציאים' משפטים וחוקים מתמטיים לא נכונים כדי לענות על השאלות. תופעה דומה דווחה גם במחקר קודם (לטנר, 1999). מתברר עוד, כי תלמידים 'ממציאים' דרכים ושיטות לא נכונות כדי לתת תשובות לשאלות. על-פי תוצאה זו אפשר לטעון, כי השימוש במחשבון הגרפי מפתח את החשיבה המשמעותית ובכך מצמצם מקרים של חשיבה פסאודו-מושגית וחשיבה פסאודו-אנליטית.

## מקורות

- גורב, ד. (2002), הערכה בסביבה ממוחשבת: על ידע סמנטי של בעלי הישגים נמוכים בחשבון דיפרנציאלי, עבודת דוקטור, אוניברסיטת חיפה.
- דמנה וויטס, (1998), תפקיד המחשבוני הגרפי בהוראת העכשווית של המתמטיקה, *מתמטיקה+*, כתב עת להוראת המדעים באמצעות הטכנולוגיה, גיליון מס' 1.
- וינר, ש. (1993), הוראת המתמטיקה – מחשבות ותופעות מיומנו של מורה חוקר, עלייה 12, המרכז להוראת המדעים, האוניברסיטה העברית בירושלים.
- לטנר, ל. (1999), תהליכי חשיבה של בוגרי תיכון בעת בצוע משימות הדורשות תפיסת המרחב, עבודת דוקטור, הטכניון, חיפה.
- פרל, ח. (2002), הוראת מתמטיקה בחטיבה העליונה בעזרת מחשבוני גרפיים, עבודת דוקטור, האוניברסיטה העברית בירושלים.
- רסלאן, ש. (1996), תפיסות מושגים מתמטיים מרכזיים בתכנית החדשה במתמטיקה אצל תלמידי תיכון, עבודת דוקטור, האוניברסיטה העברית בירושלים.
- שגב, ס. (1999), השפעת הלימוד עם מחשבון גרפי על דרכי הפתרון באלגברה אצל תלמידים בחטיבת הביניים, עבודת מסטר, האוניברסיטה העברית בירושלים.
- Alkhateeb, H. & Wampler, J. (2002), Graphing Calculators and Student's Conceptions of the Derivative, *Perceptual and Motor Skills*, vol. 94 (1), p 165 – 170.
- Barton, D. (2003), Using Technology to Teach the "Transformation of Graphs", *Micromath*, v19, n2, p 12 – 15.
- Becker, B. A. (1992). The Concept of Function: Misconception and Remediation at the College Level, (Doctoral dissertation, Illinois State University, 1991), *Dissertation Abstracts International*, 52, 2850A.