הנושא: עזרי לימוד להמחשת מקרה פרטי של המשפט הקטן של פרמה

הוכן ע"י: דן בן שאול.

תקציר: המחבר מציע המחשה – הוכחה שקופה – לטענה כי לכל n טבעי המספר: n^3-n מתחלק בשש.

מילות מפתח: כתב העת על"ה, על"ה 35, המחשה, הוכחה, תבנית מספר, הוכחה שקופה, תכונות התחלקות, קוביה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 35, תשס"ו 2005, עמודים 69-71.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

ale35-13

עזרי לימוד להמחשת מקרה פרטי של המשפט הקטן של פרמה

דן בן שאול
dbsh@bezeqint.net
כפר סבא

אם, למשל, נרצה להמחיש את חוק החילוף בחיבור, נוכל לעשות זאת בקלות, נספור בטור אחד של מרצפות על הרצפה שלוש (3) מרצפות ולאחריהן נמשיך לספור באותו טור עוד חמש (5) מרצפות, בשלב הבא נשוב על הפעולות הללו מאותה נקודת התחלה, הפעם בסדר הפוך, תחילה נספור חמש (5) מרצפות ואחר-כך עוד שלוש (3) מרצפות. בשני האופנים התחלנו באותה נקודה ועשינו אותה כברת דרך. ילד שיבצע פעולות כאלה מספר פעמים יוכל להסיק בעצמו את קיום חוק החילוף בחיבור. אם נרצה להמחיש את חוק החילוף בכפל, נסמן על הרצפה מלבן שרוחבו שלוש (3) מרצפות ואורכו חמש (5) מרצפות. נוכל לתאר את המלבן כשלושה טורים בני חמש מרצפות כל אחד, כלומר $3\cdot5$, או כחמש שורות בנות שלוש מרצפות כל אחת, כלומר $5\cdot3$. גם כאן טבעי להניח, כי תלמיד שייחשף לפעילות כזו ולדומות לה, יפתח בעצמו את ההבנה כי בכפל ניתן לשנות את סדר הגורמים.

ברשימה זו מוצעת המחשה לטענה כי הביטוי: n^3-n מתחלק ב-3 ללא שארית, לכל n טבעי. טענה זו היא מקרה פרטי של המשפט הקטן של פרמה.

קשה להציע באופן מיידי המחשה לטענה, על כן סביר כי נטייתם הראשונה של התלמידים תהא לראותה כחוקיות מסתורית המצויה במספרים. אמצעי ההמחשה בהם עוסקת הרשימה 'מפזרים את ענגת המסתורין' מעל הטענה, נותנים בידי התלמידים כלי ישיר להבנתה, והעיקר, יתכן כי יעוררו אצל התלמידים רצון ליצור בעצמם אמצעי המחשה לטענות אחרות אולי אף כלליות יותר.

מלבד המחשת הטענה הנ"ל מוצעות ברשימה המחשות גם לטענות הבאות:

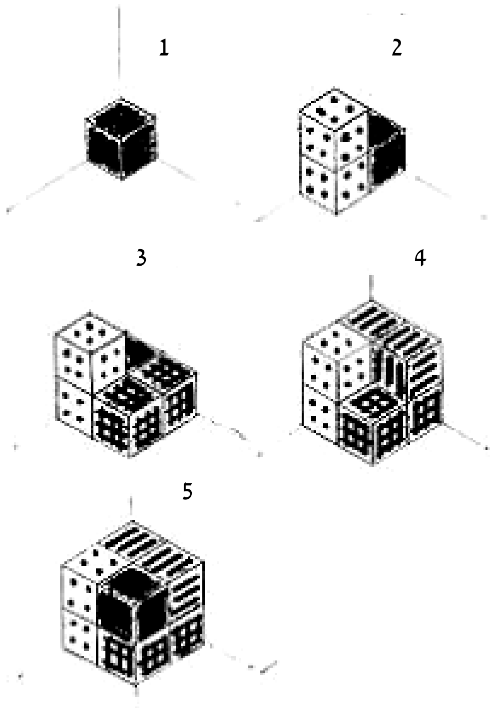
- n^3-n מתחלק ב-6 ללא שארית, לכל n טבעי;
- n^5-n מתחלק ב-6 ללא שארית, לכל n טבעי;
- n^7-n מתחלק ב-6 ללא שארית, לכל n טבעי;
- אם מוציאים קוביה מקוביה גדולה ממנה, לא ניתן להרכיב מהקוביות הבסיסיות שבחלק ה'נגוס', קוביה שאורך צלעה אינו מתחלק ב-6.

המחשה לטענה: n^3-n מתחלק ב-3

נבנה קוביה 3^3 מקוביות קטנות, נכנה כל קוביה קטנה בשם קוביה בסיסית:

תרשים 1: נתחיל בקוביה בסיסית אחת כהה.

תרשים 2: נצמיד לה מנסרה (2×1) המורכבת משתי קוביות בסיסיות מנוקדות.



תרשים 3: נוסיף מנסרה (2×1) המורכבת משתי קוביות בסיסיות משובצות.

תרשים 4: נוסיף מנסרה (2×1) המורכבת משתי קוביות בסיסיות מקווקוות.

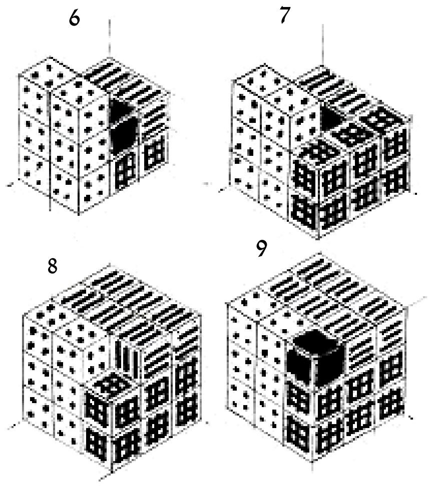
תרשים 5: נוסיף קוביה בסיסית אחת כהה. קיבלנו קוביה 2^3. הקוביה נבנתה משתי קוביות בסיסיות בודדות ומשלוש מנסרות (2×1).

תרשים 6: נוסיף מנסרה (2×3) המורכבת משש קוביות בסיסיות מנוקדות.

תרשים 7: נוסיף מנסרה (2×3) המורכבת משש קוביות בסיסיות משובצות.

תרשים 8: נוסיף מנסרה (2×3) המורכבת משש קוביות בסיסיות מקווקוות.

תרשים 9: נוסיף קוביה בסיסית אחת כהה.



קיבלנו קוביה 3^3. הקוביה נבנתה משלוש קוביות בסיסיות בודדות, משלשה של מנסרות (2×1) **ו**משלשה של מנסרות (2×3).

ניתן לבנות בדרך זו גם קוביות גדולות יותר.

קוביה n^3 שנבנה בדרך זו תהא מורכבת כך:

א. n קוביות בסיסיות בודדות כהות.

ב. שלשות של מנסרות, בכל שלשה תהיינה מנסרה מנוקדת, מנסרה משובצת ומנסרה מקווקוות, שלושתן בגודל שווה. מספר השלשות יהא קטן באחד מאורך צלע הקוביה: $n-1$.

ומה נוכל להסיק מן התהליך?

רצינו להוכיח כי הביטוי: n^3-n מתחלק ב-3 ללא שארית, לכל n טבעי. מספר הקוביות הבסיסיות המרכיבות קוביה שאורך צלעה n הוא n^3 אם נוציא מקוביה זו את הקוביות הבודדות הכהות נישאר עם n^3-n קוביות בסיסיות המסודרות בשלשות. לכן מספר הקוביות הבסיסיות המרכיבות את הקוביה n^3 לאחר שהוצאו ממנה הקוביות הבודדות מתחלק בשלוש ללא שארית[1].

המחשות נוספות

א. ניתן להמחיש באמצעות הבניה המתוארת לעיל, מדוע n^3-n מתחלק גם ב-6:

בכל אחת מהמנסרות המרכיבות את השלשות השונות יש מספר זוגי של קוביות בסיסיות, שכן גודלה של כל מנסרה הוא מכפלה של מספרים עוקבים.

ב. ניתן להמחיש באמצעות הבניה המתוארת לעיל, גם מדוע n^5-n מתחלק ב-3 (וגם ב-6). נסביר למקרה בו $n=3$, (למקרים אחרים ההכללה פשוטה):

בקוביה 3^3, נחלק כל קובית בסיס ל- 3^2 חלקים ונקבל סה"כ $3^2\times3^3=3^5$ חלקים. נוציא את 'אלכסון' הקוביות הכהות, בו יש בדיוק שלוש קוביות בסיסיות שבהן 3^3 חלקים). היתרה – שתי שלשות של מנסרות מחולקות – מתחלקת ב-3 (וגם ב-6).

נוכל להסיק גם כי המספר הקטן ב-3 ממספר החלקים ב'אלכסון' הקוביות הכהות מתחלק ב-6 (שהורי גם הוא שווה ל - 3^3 פחות 3).

ניתן להמחיש בדרך דומה מדוע גם n^7 פחות n מתחלק ב-3 (וגם ב-6).

ג. ניתן לבנות את הקוביה בתוך פירמידה משולשת הפוכה ללא בסיס, שבין פאותיה זוויות ישרות. בניה כזו מאפשרת תהליך בו קוביה נבנית תוך העמדת הקוביות המרכיבות אותה על קדקודיהן. תהליך כזה הוא סימטרי ביחס לאלכסון ומאפשר להתייחס אל הקוביות הכהות המרכיבות אותו, כאל 'שדרה'..

ד. ניתן ללמוד באמצעות הבניה המתוארת לעיל, על האפשרות לחלק קוביה לשתי קוביות (להלן).

[1] הערת המערכת: תהליך הבניה שתואר לעיל עבור קוביה 3^3 מהווה, למעשה, 'הוכחה שקופה' לטענה כי הביטוי n^3-n מתחלק ב-3 לכל n טבעי, שכן מבעד לתהליך המוכיח את הטענה עבור המקרה הפרטי משתקפת ההוכחה עבור המקרה הכללי. המושג 'הוכחה שקופה' נדון בהרחבה במאמרה של נצה מובשוביץ-הדר (2004) עלי"ה 31, עמ' 29-35.

על האפשרות לחלק קוביה לשתי קוביות

תרשים 10: נבנה קוביה 6^3 בדרך המתוארת לעיל.

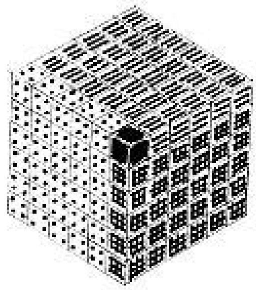
תרשים 11: נוציא מהקוביה שבנינו (6^3) קוביה 4^3 תיוותר קוביה 'נגוסה'.

תרשימים 12 ו-13: נחלק את הקוביה ה'נגוסה' לשני חלקים;

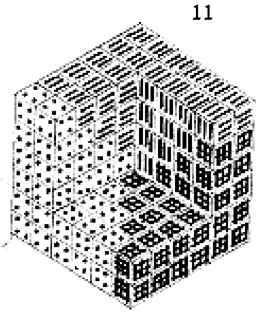
חלק אחד – שתי 'טבעות' (תרשים 12).

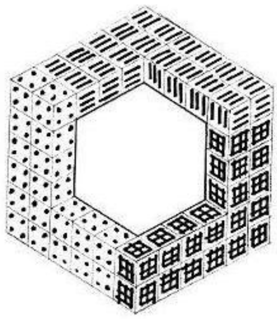
חלק שני – קוביה 'נגוסה' קטנה (תרשים 13).

10

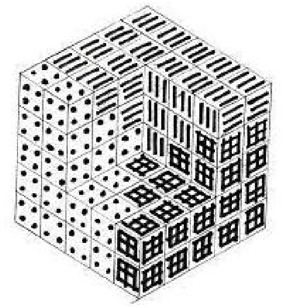


11

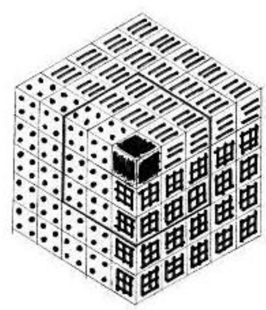




12



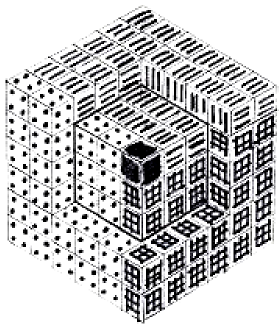
13



14

תרשים 14: נמלא את החלל שבקוביה ה'נגוסה' הקטנה – חלל שצורתו קוביה – בקוביות הבסיסיות המרכיבות את שתי הטבעות (אין בקרב הטבעות קוביה כהה, ואפשר אפוא להציג את החלל שבקוביה ה'נגוסה', אחרת, למשל עם קוביה מנוקדת בפינה).

תרשים 15: נחזיר אל הקוביה ה'נגוסה' הקטנה, את שתי הטבעות (נותיר את החלל שבקוביה ה'נגוסה' הקטנה, מלא). (תרשים זה נועד להשוואה בין הטבעות לבין החלל שבקו



15

מספר הקוביות הקטנות אשר בכל אחת משתי הטבעות (תרשים 12) מתחלק ב-6.

כך גם טבעות אחרות או מספר אחר של טבעות.

למשל, במעטפת של הקוביה 6^3 (תרשים 10) יש חמש טבעות – בכולן מספר קוביות קטנות המתחלק ב-6 (וכך גם מספר טבעות); בטבעת הגדולה 30 קוביות בסיס, בזו שאחריה 24 קוביות בסיס, בזו שאחריה 18 קוביות בסיס, בזו שאחריה 12 קוביות בסיס, ובטבעת הקטנה 6 קוביות בסיס.

חלוקת קוביה לשתי קוביות מתקבלת מביצוע התהליך הבא: יוצרים קוביה 'נגוסה' על-ידי הוצאת קוביה פנימית מקוביה גדולה ממנה. סביב החלל שבקוביה ה'נגוסה' תהיינה טבעות. ממלאים את החלל שבקוביה ה'נגוסה' (חלק שצורתו קוביה), בקוביות הבסיס שבטבעות.

ובאיזה תנאי הדבר אפשרי? מספר הקוביות הבסיסיות המרכיבות את הקוביות $1^3,2^3,3^3,4^3$ ו- 5^3, אינו מתחלק ב-6, לפיכך לא ניתן למלא במדויק חללים בגדלים הללו (חללים שצורתם קוביה), באמצעות הקוביות הבסיסיות שבטבעת או שבמספר טבעות, וכך גם ביחס לקוביות $7^3,8^3,9^3,10^3,11^3$ וכיו"ב הלאה (כלומר קוביות שאורך הצלע שלהן אינו מתחלק ב-6).