הנושא: השורש של השורשים

הוכן ע"י: ערן רביב.

תקציר: המחבר מתחקה אחר שיטות לחישוב ערכים מקורבים לשורשים של מספרים רציונאליים, בהם השתמשו מתמטיקאים ואחרים במשך השנים.

מילות מפתח: כתב העת עלי"ה, עלי"ה 35, היסטוריה של המתמטיקה, קירוב, מספר אי-רציונלי, שורש, אלגוריתם, ממוצע חשבוני, סדרה, מאירסון, מעגלי פורד.

החומר פורסם במסגרת: עלי"ה 35, תשס"ו 2005, עמודים 27-31.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 5 עמודים.

השורש של השורשים

ערן רביב
eran@gilat.com.
רבבה

מבוא

במאמר זה ננסה להבין כיצד הגיעו הקדמונים לקירובים של השורש הריבועי[1] של מספרים לא רציונאליים .

<u>קירובים לשורש הריבועי בהיסטוריה של המתמטיקה</u>

המיתולוגיה היוונית העמידה את האדם ושכלו במרכז, והעלתה על נס את היכולת השכלית האנושית.

הפיתגוראים שהוקסמו מכוחם רב העוצמה של המספרים השלמים, היו בטוחים שהיקום בנוי מהם.

אחת התגליות בעלת חשיבות מעשית נזקפת לזכותו של פיתגורס. פיתגורס גילה את הבסיס המתמטי של הסולם המוזיקלי והצביע לראשונה על הקשר בין ההרמוניה למספרים השלמים 1, 2, 3... (בשעה שאנו פורטים על מיתר אנו שומעים צליל כלשהו, אם נפרוט עתה על מיתר הכפול באורכו, המתוח באותה מידה, נשמע צליל חדש הנמוך באוקטבה אחת מן הצליל הראשון).

מה רבה הייתה התדהמה[2], כאשר אחד החכמים, שעיין במשפט פיתגורס, מצא להפתעתו, שבמשולש ישר זווית בו אורכם של שני הניצבים הוא יחידה אחת, אורך היתר לא ניתן לביטוי בעזרת מספרים שלמים (אפילו בעזרת שברים). לא נשאר לה, לספרה 2, אלא לעמוד נכלמת ולא 'פתורה', תחת סימן השורש – $\sqrt{2}$.

לכאורה זה לא מובן כלל וכלל, ואפילו ניתן לומר מעצבן מה, הרי אנו רואים את הקו הזה בעין ואורכו הוא לא אינסופי, אלא מוגדר וסופי, אז מדוע לא ניתן לכתוב אותו על-ידי מספר בעל הצגה עשרונית סופית? משתמע מכך, שזה מספר 'משוגע', ואכן אנו מכנים אותו לא רציונאלי – ממש לא נתפס. ובכן מה היה סופו של אותו חכם? על-פי האגדה סופו היה שנענש בחומרה וטבע בים...

הרמב"ם (בפירושו למשנה במסכת עירובין) כותב "שטח מרובע שיהיה עומד הזווית (ז"א שכל זוויותיו ישרות, ע"ר) יהיה (שתהיה, ע"ר) מידתו ה' אלפים אמה, לא יִוָדַע צלע אותו שטח, אלא בקרוב, לפי שה' אלפים הוא חשבון בלתי גדור וגדרו בקרוב שבעים אמה וה' שבעיות אמה. והדבר בכאן בזה החשבון כמו שזכרתי לך במה שקדם בייחוס אלכסון עגולה (קוטר, ע"ר) למסבבה (היקף המעגל ע"ר). כי לא יגיע לעולם לידיעת גדר החשבון, שאינו גדור אלא בקירוב , **ואין זה לחסרון דעתנו אלא מפני טבע זה החשבון**".

<u>הצגת הבעיה :</u>

א. במקורות היהודיים מצאנו מספר קירובים למספר: $\sqrt{2}$:

1. במשנה במסכת אהלות – **4/3.**
2. במסכת עירובין (נ"ז ע"א) "כל אמתא בריבוע (ריבוע 1X1 ע"ר) אמתא ותרי חומשי באלכסונא" ז"א שהקרוב המוצע הוא **7/5** .
3. בתלמוד הירושלמי – **106/75 .**[3]

[1] סימן השורש הריבועי נגזר מן המילה radix (שורש) בלטינית) והסימן $\sqrt{\ }$ הוא עיוות של האות r .

[2] בספר "מתמטיקה" שיצא לאור ב-1963 בהוצאת LIFE הפסקה הדנה בכך נושאת את השם "שורש ריבועי הרֵה אסון".

[3] בתלמוד הבבלי ישנו דיון בגודל חצר המשכן ושם (כ"ג ע"ב) לפי דעת ר' יהודה, גודל חצר המשכן שווה לשטח של שני מרובעים שגודלו של כל אחד מהם הוא 50X50 (ז"א שטח השווה ל- [אמות מרובעות]50 X100=5000). על מנת למצוא

ב. בספרות ההודית העתיקה מקובל להשתמש ביחס: **577/408** כקירוב ל- $\sqrt{2}$.

ג. ארכימדס השתמש בערכים: **265/153** וב- **1351/780** כקירובים $\sqrt{3}$.[4]

השאלה שנשאלת היא, כיצד הגיעו בשלוש התרבויות הנ"ל לקירובים הללו?

<u>רמת הדיוק של הקרובים:</u>

הצעה לקירוב - x	ריבוע הקירוב x^2	השגיאה $\left|2-x^2\right|$
4/3	16/9	2/9
7/5	49/25	1/25
106/75	11236/5625	14/5625
577/408	332929/116464	1/116464
265/153	70225/23409	2/23409
1351/780	1825201/608400	1/608400

אנו רואים שחלק מהקירובים מספקים דיוק עצום, כך שאין זה סביר לטעון שהגיעו לקירובים כאלה בעזרת מדידות.[5]

האלגוריתם הבבלי [6]

כבר בתקופה הבבלית הקדומה הכירו שיטות נומריות מתקדמות המתאימות במיוחד לעידן המחשב. נתחקה אחריהן.

אנו מעוניינים למצוא את השורש הריבועי של מספר נתון – x. לקירוב ראשון (גס) נגיע באופן הבא: כקירוב ראשון נבחר ערך כרצוננו, נניח שהיחס y/z הוא קירוב של השורש המבוקש, כלומר:
$$\sqrt{x}\approx\frac{y}{z}$$
על מנת לקבל את הקירוב השני נחלק את x בקירוב הראשון ונקבל מספר שהוא גם קרוב של $\sqrt{x}$.

כך:
$$\sqrt{x}\approx\frac{x}{y/z}=\frac{x\cdot z}{y}$$

מיד רואים, שאם הקרוב הראשון שבחרנו היה **גדול** מהשורש המבוקש, אזי המנה הנ"ל נותנת קירוב לשורש המבוקש, אך **קטן ממנו** ולהפך.

אם כן, ברור שהממוצע בין הקירוב הראשון לשני ייתן, בדרך כלל, תוצאה הטובה משניהם... אם נמשיך בתהליך של חלוקה וממוצע נתקרב יותר אל שורש המבוקש.

הבבליים בחרו את הממוצע **החשבוני** בין כל שני קירובים סמוכים וכך הגיעו לנוסחת הנסיגה:
$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{x}{a_n})$$
כאשר x הוא המספר שאנו מחפשים את השורש שלו, a_n הוא הקירוב ה- n, ו- a_{n+1} הוא הקירוב ה- n+1.

החיסרון הבולט בשיטה זו, הוא שקשה מאוד לערוך את החישובים באופן ידני.

האלגוריתם המאירסוני או ה-Mediant

מאירסון[7] הוסיף שניתן להתייחס אל מספר אחר הנמצא בין שני מספרים – זה המתקבל מחיבור מונה למונה וחיבור מכנה למכנה (זה אכן לא ממוצע חשבוני ואנו נקרא לו 'הממוצע המאירסוני').[8]

אנו מחפשים את $\sqrt{x}$. כקירוב ראשון בחרנו את השבר $a_1\approx\frac{y}{z}$, בכדי לקבל את הקירוב השני חילקנו את x בקירוב הראשון וקיבלנו:
$$a_2\approx\frac{x\cdot z}{y}$$

את אורך הצלע של הריבוע ששטחו 5000 אמות מרובעות נבנה משולש ישר זווית כך שאורכם של שני הניצבים יהיה 50 אמות, ואז על-פי משפט פיתגורס המרובע שייווצר על היתר שטחו יהיה 5000 אמות מרובעות. אורך הצלע אם כן שווה ל- $\sqrt{5000}$. בתלמוד הירושלמי מופיעה ההערכה: $70\frac{2}{3}$ אמה, כמתארת את אורכו של היתר המבוקש. נחלק בחמישים (כדי לקבל את $\sqrt{2}$) ונקבל $\frac{212}{150}$, לאחר צמצום נקבל $\frac{106}{75}$.

[4] ראה גם באתר: http://www.mathpages.com/home/kmath038.htm
מאמר בשם: Archimedes and the Square Root of 3

[5] החוקר קיי בשנת 1915 (בספרו Indian Mathematics) ניסה לטעון כך אולם כבר בדורו הפריכוהו.

[6] ראה:
http://www.mathpages.com/home/kmath190.htm
http://personal.bgsu.edu/~carother/babylon/Babylon1.html
שיטת ניוטון-רפסון היא הרחבה של השיטה הבבלית, ראה גם:
http://www.sosmath.com/calculus/diff/der07/der07.html

[7] יעקב משה מאירסון היה ככל הנראה תלמיד חכם, מחשובי ורשה, המקורות עליו דלים, אולם מתברר שהיה בין 30 האנשים החשובים שהשתתפו ב"אספת קטוביץ" הראשונה לחובבי ציון בשנת תרמ"ה (1885) – ראה עוד במקורות, בהערה 13, ובנוסף ג. הוא לא היה מתמטיקאי בהשכלתו והערתו צורפה לספר "מבוא התלמוד" בתחילה ללא פרסום שמו, ורק לאחר מכן 'הושבה האבדה' לבעליה.

[8] ראה באתר:
http://www.etheron.net/usuarios/dgomez/RmDef.htm
הממוצע הנ"ל מכונה "Rational Mean", וממוצע כזה בין שני שברים נקרא גם "Mediant".

בכדי לחשב את הקירוב הבא נבצע פעולת חשבון לא קונבנציונאלית, שתוסבר בהמשך, שבה נחבר מונה למונה ומכנה למכנה כך: $a_3=\frac{xz+y}{y+z}$

ובאופן דומה, בכל שלב נבצע את שתי הפעולות:

1. נחלק את x בקירוב שהתקבל 2.
2. נחבר את התוצאה לקירוב באופן 'המוזר' – מונה למונה ומכנה למכנה.

כך נקבל:

$$a_4=\frac{2xz+y+xy}{xz+2y+z}$$

$$a_5=\frac{x^2z+3x(y+z)+y}{3xz+3y+xy+z}$$

וכן הלאה...

בכל צעד אנו מקבלים קירוב טוב יותר של השורש המבוקש, וכך אנו יכולים להמשיך בתהליך, עד לקבלת קירוב טוב כרצוננו.

פשר הסדרה "המאירסונית"

בסעיף הקודם קיבלנו סידרה כדלהלן:

$$\frac{y}{z},\frac{xz}{y},\frac{y+xz}{y+z},\frac{y+xz+xz+xy}{z+y+y+xz},\frac{x^2z+3x(y+z)+y}{3xz+3y+xy+z},\ldots$$

נחפש דרך להביע את בניית הסדרה בעזרת כלל נסיגה.

נסמן את המונה בשלב ה-n ב- A_n. כך למשל:

$$A_1=y,\ A_2=y+xz$$

נסמן את המכנה בשלב ה-n ב- B_n. כך למשל:

$$B_1=z,\ B_2=y+z$$

נוכל לכתוב את האיבר ה- n בסדרה (a_n) כדלהלן[9]:

$$a_n=\frac{A_n}{B_n}=\frac{A_{n-1}+x\cdot B_{n-1}}{B_{n-1}+A_{n-1}}$$

דרך נוספת:

נתחיל מהמשוואה[10]: $x-1=(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}-1)$

נעביר אגפים ונקבל: $\sqrt{x}=1+\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$

נחליף את $\sqrt{x}$ אשר במכנה של אגף ימין באגף ימין כולו ונקבל ביטוי רקורסיבי כדלהלן:

$$\sqrt{x}=1+\cfrac{x-1}{2+\cfrac{x-1}{2+\cfrac{x-1}{2+\cfrac{x-1}{2+\cfrac{x-1}{2+\cdots\cfrac{}{\cfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}}}}}}}$$

נכתוב את נוסחת הנסיגה בטכניקה בה השתמשנו קודם:

(עבור $\sqrt{x}$) נתחיל מהביטוי:

$$(*)\quad \sqrt{x}=1+\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}$$

נחליף את $\sqrt{x}$ אשר באגף ימין ב- $\frac{y}{z}$ (הקרוב הראשון ל- $\sqrt{x}$) ונקבל:

$$\sqrt{x}=1+\frac{x-1}{1+\frac{y}{z}}=1+\frac{z(x-1)}{y+z}=\frac{y+xz}{y+z}$$

אם נציב את הקירוב שהתקבל שוב ב- (*) נקבל:

$$\sqrt{x}=1+\cfrac{x-1}{1+\cfrac{xz+y}{y+z}}$$

ולאחר פישוט נגיע לקירוב המוכר זה מכבר:

$$a_4=\frac{2xz+y+xy}{xz+2y+z}$$

באופן כללי, אם נשתמש באותם סימונים:

---

[9] הביטוי המתקבל דומה ל"שברים מתמשכים" - Continued Fraction, וניתן להוכיח התכנסות למספר המבוקש.

הערה: מסדרת הממוצעים **החשבוניים** שבין שני הקירובים, מתקבלת סדרה שאפשר להגדירה בעזרת כלל נסיגה באופן הבא:

$$a_n=\frac{(A_{n-1})^2+x\cdot(B_{n-1})^2}{2\cdot A_{n-1}\cdot B_{n-1}}$$

סדרה זו מתכנסת **מהר** יותר לשורש המבוקש מאשר הסדרה המאירסונית, אך פחות נוחה לחישוב ידני, שיטה זו מיוחסת לבבלים כאמור בראשית המאמר.

[10] ראה גם באתר: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html#sqrtcf בפסקה: "Continued fractions for square-roots"

A_n – המונה בקירוב ה-n-י, B_n – המכנה בקירוב ה-n-י,
a_n – הקירוב ה-n-י , נקבל:

$$a_n = \frac{A_{n-1}+2B_{n-1}}{A_{n-1}+B_{n-1}}$$

באופן מפתיע התקבלה הסדרה המאירסונית ... .

סיכום

לסיכום אנו רואים שהממוצע המשונה בו השתמש מאירסון (חיבור מונה למונה ומכנה למכנה) מגדיר סדרה, ולה כלל הנסיגה המכונה 'שבר שרשרתי' (Continued Fraction).[11]

גינצבורג[12] הראה שכל הקירובים שהבאנו בראשית המאמר, הן מהמקורות היהודיים והן של ארכימדס וההודים, לכולם ניתן להגיע בעזרת השיטה שסקרנו במאמר (ומודגשים בטבלה שלהלן).

<u>עבור שורש 2:</u>

שורש 2			
לאחר ממוצע מאירסוני		לאחר חלוקה	
מונה	מכנה	מונה	מכנה
1	1	2	1
3	2	**4**	**3**
7	**5**	10	7
17	12	24	17
41	29	58	41
99	70	140	99
239	169	338	239
577	**408**	816	577

לקירוב 106/75 מגיעים ע"י הממוצע המאירסוני בין 99/70 ובין 7/5.

<u>עבור שורש 3:</u>

שורש 3			
לאחר ממוצע מאירסוני		לאחר חלוקה	
מונה	מכנה	מונה	מכנה
2	1	3	2
5	3	9	5
7	4	12	7
19	11	33	19
26	15	45	26
71	41	123	71
97	56	168	97
265	**153**	459	265
362	209	627	362
989	571	1713	989
1351	**780**	2340	1351

אכן באופן מפתיע קיבלנו את **כל הערכים המבוקשים בעזרת שיטה אחת.**

נספחים

א. הוכחה

בגוף המאמר הועלתה הטענה שלשיטת החיבור המוזר יש תכונה של ממוצע, כלומר התוצאה המתקבלת היא ערך ביניים כלשהו: $a_{n-1} < a_n < a_{n+1}$

במילים אחרות, אם: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

אז: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

<u>הוכחה</u>:

נסמן את ערכי הקירובים a_{n-1}, a_n, a_{n+1} במערכת צירים באופן הבא: על ציר x נסמן את המכנים של שני הקירובים הראשונים ועל ציר y נסמן את המונים של שני הקירובים הראשוני (ר' שרטוט להלן).

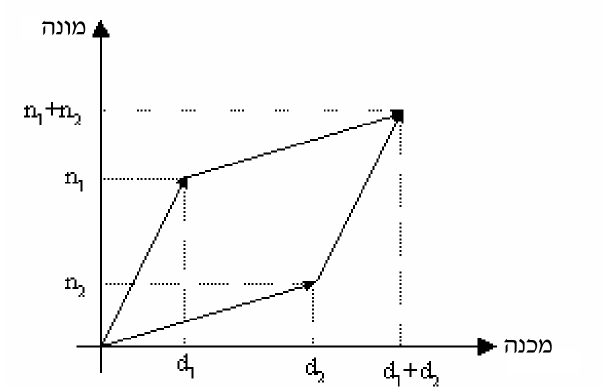
רואים מיד שהשבר אותו כינינו 'הקירוב המאירסוני' מיוצג על-ידי הסכום הווקטורי שבין שני הקירובים הראשונים. השיפוע של כל וקטור הוא בעצם ערכו של השבר, ואכן קל להבחין בעובדה ששיפוע הסכום הווקטורי 'לעולם' 'חסום' בין שני השיפועים של הווקטורים היוצרים אותו.

מ.ש.ל.

---

[11] יישום לחישוב אוטומטי של המקדמים נמצא באתר: http://wims.unice.fr/~wims/en_tool~number~contfrac.en.phtml
ניתן להכליל את השיטה על-מנת לקבל שורשים מסדר גבוה יותר.על כך ניתן למצוא באתר: "Generalized Mediant" http://www.seanet.com/~ksbrown/kmath055.htm .

[12] ראה במקורות.

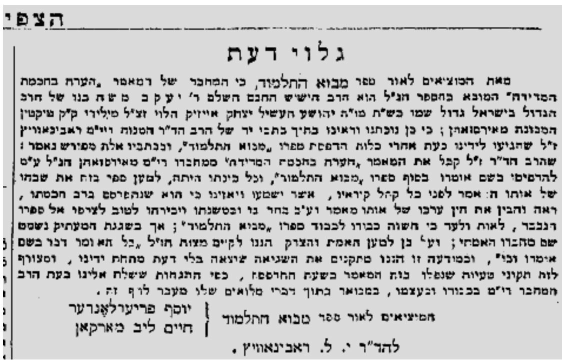


ב. 'מעגלי פורד'

לממוצע המאירסוני אליו התייחסנו בגוף המאמר ישנו אפיון גיאומטרי מעניין, הקרוי מעגלי פורד.
ניתן לקרוא על כך באתרים:
http://www.asahi-net.or.jp/~SI4K-NKMR/recurf.htm
ו- http://www.cut-the-knot.com/proofs/fords.html

ג.מאירסון

כפי שכתבנו בהערה 7 , שמו של מאירסון לא פורסם מיד, אלא רק מאוחר יותר – בגילוי דעת מאת המוציאים לאור בכתב העת 'הצפירה' בתאריך 27.11.1894 (גיליון 251). להלן העתקו :


הצפי[רה]

גלוי דעת

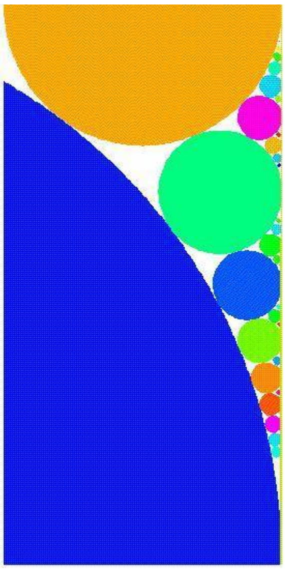
מאת המוציאים לאור ספר מבוא התלמוד, כי המחבר של המאמר „הערת בחכמת המדידה" המובא בהספר הנ"ל הוא הרב הישיש החכם השלם ר' יעקב משה בנו של הרב הגדול בישראל גדול שמו כש"ת מו"ה יהושע העשיל יצחק אייזיק הלוי זצ"ל מילידי ק"ק טיקטין המכונה מאירסאהן; כי כן נוכחנו וראינו בתוך כתבי יד של הרב הד"ר המנוח ר"ים ראבינאוויץ ז"ל שהגיעו לידינו כעת אחרי כלות הדפסת ספרו „מבוא התלמוד", ובכתביו אלה מפורש נאמר: שהרב הד"ר ז"ל קבל את המאמר „הערת בחכמת המדידה" ממחברו ר"ים מאירסאהן הנ"ל ע"מ להדפיסו בשם אומרו בסוף ספרו „מבוא התלמוד", וכל כונתו היתה, למען ספר בזה את שבחו של אותו ח: אמר לפני כל קהל קוראיו, אשר ישמעו ויאזינו כי הוא שנתפרסם ברב חכמתו, ראה והבין את תוך ערכו של אותו מאמר וע"כ בחר בו ובמשנתו ויכירתו לטוב לצרפו אל ספרו הנכבד, לאות ולעד כי השוה כבודו לכבוד ספרו „מבוא התלמוד"; אך בשגגת המעתיק נשמט שם מחברו האמתי; וע"כ כן למען האמת והצדק הננו לקיים מצות חז"ל „כל האומר דבר בשם אומרו וכו'", ובמודעה זו הננו מתקנים את השגיאה שיצאה בלי דעת מתחת ידינו, ומצורף לזה תקוני טעיות שנפלו בזה המאמר בשעת ההדפסה, כפי ההגהות ששלח אלינו בעת הרב המחבר ר"ים בכבודו ובעצמו, במבואר בתוך דברי מלואים שלו מעבר לדף זה.

המוציאים לאור ספר מבוא התלמוד { יוסף פריערלאנדער
להד"ר י. ל. ראבינאוויץ. { חיים ליב מארקאן

מקורות

"כתבים נבחרים" , יקותיאל גינצבורג , תשכ"א[13] .
"מתמטיקה" בהוצאת LIFE ,1963.
"Archimedes and the Square Root of 3" -
http://www.mathpages.com/home/kmath038.htm
"The Babylonian Method for Computing Square Roots"
http://personal.bgsu.edu/~carother/babylon/Babylon1.html

"Continued fractions for square-roots"
http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html#sqrtcf
http://www.asahi-net.or.jp/~SI4K-NKMR/recurf.htm
http://www.cut-the-knot.com/proofs/fords.html ו-
http://www.mathpages.com/home/kmath190.htm



'מעגל פורד' הוא המעגל הגדול ביותר החסום בין שני מעגלים וישר.

[13] יקותיאל גינצבורג נולד באוקראינה בשנת 1889 היגר לארה"ב בשנת 1913 ומשנת 1917 כיהן בסגל האקדמי של אוניברסיטת קולומביה. יקותיאל גינצבורג היה מתמטיקאי מחונן שהקדיש חלק מעתותיו לחקר ההיסטוריה של המתמטיקה ופרסם ב"התורן" גיליון כ"ו מאמר בשם "לתולדות המתימטיקה העברית" וכן ערך את הרבעון Script Mathematica במשך 25 שנה. הספר הנ"ל יצא לזכרו ע"י אחותו חיה גינצבורג – פרידמן .
בספר הנ"ל מוקדש פרק שלם ליעקב משה מאירסון שחיבר "הערה בחכמת המדידה" שצורפה למהדורה העברית של "מבוא התלמוד" מאת ישראל מיכל רבינוביץ .