הנושא: **הזכות ״לפספס״: מורה לומדת עם כיתתה**

הוכן ע״י: ענת לבב ורוזה לייקין.

תקציר: במאמר מתוארת חווית הוראה – למידה של מורה במהלך טיפול בבעיה לא שגרתית אשר הוביל את התלמידים ללמידה מסוג אחר, ואותה להבנה מעמיקה של מושגים, תוך ביצוע קישורים בין תחומי תוכן שונים. הסיפור ממחיש את הדרכים השונות בהן מורים לומדים תוך כדי הוראה.

מילות מפתח: למידה, הוראה, קישוריות, דיון, בעיה לא שגרתית, גיאומטרית המישור, הנדסת המישור, גיאומטריה, הנדסה, משולש, אי שוויון במשולש, משפט פיתגורס, מרחק בין נקודה לישר, גיאומטריה אנליטית, הנדסה אנליטית, אליפסה, שיטות הוראה, עבודה שיתופית, עבודה בקבוצות, שגיאות, טעויות.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 36, תשס״ו 2006, עמודים 38-41.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 4 עמודים.

ale36-6

הזכות "לפספס": מורה לומדת עם כיתתה

ענת לבב-וינברג
alevav@hotmail.com
הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה

רוזה לייקין
rozal@construct.haifa.ac.il
הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה

כל מורה יסכים לטענה, כי כאשר הוא מלמד הוא גם לומד. במאמר זה אנחנו מנתחות אירוע המייצג תופעה זו – של "למידה תוך כדי הוראה".

להלן סיפור שהתרחש לאחרונה באחד מבתי הספר בארץ. חשיבות הסיפור בכך שהוא ממחיש את הדרכים השונות בהן מורים לומדים תוך כדי הוראה. אנחנו מחלקות את הסיפור לשלבים כדי לנתח את תהליך הלמידה של המורה.

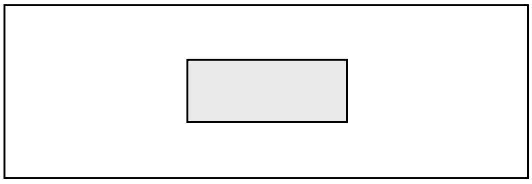
עינת מלמדת מתמטיקה בתיכון כ-14 שנה ונחשבת כמורה מומחית. כיוון שהיא ידעה שהנושא של למידה תוך כדי הוראה הינו במרכז המחקר שלנו ושאנו נוהגות לשאול מורים על היבט זה של עבודתם, היא הייתה להוטה לחלוק איתנו את חווית הלמידה האחרונה שלה עם תלמידיה. בנוסף היא רצתה לשתף אותנו בהתלבטויותיה לגבי תכנון המשך ההוראה שלה. לפניכם הסיפור שלה:

הסיפור של עינת

הכרות עם הבעיה

בדרכי לשיעור מתמטיקה, תוך כדי צעידתנו לכוון הכיתות, הראתה לי עמיתה למקצוע בשם אסתי דף שעליו הייתה מתוארת בעיה מתמטית אותה מצאה בכתב עת (בדיעבד בירורנו את המקור – רינת חדשי, 1995, על"ה17, עמ' 72):

בעיה 1: בשרטוט המצורף (ציור 1) יש למצוא את הדרך הקצרה ביותר מהפינה השמאלית התחתונה ועד לפינה הימנית העליונה של המלבן הגדול, שאינה עוברת דרך המלבן הקטן (האפור).

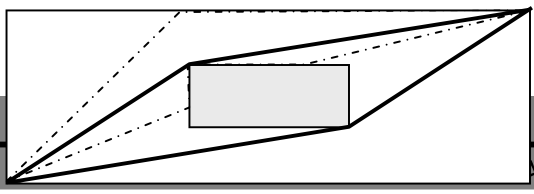


ציור 1: בעיה 1

אסתי אמרה שלדעתה הבעיה מעניינת, פשוטה ומתאימה גם לתלמידים ברמה בסיסית.

פתרון הבעיה

נכנסתי לכיתתי ונזכרתי בבעיה רק מאוחר יותר באותו יום. שרטטתי לעצמי מלבן גדול שבמרכזו מלבן קטן יותר וניסיתי לחשוב על פתרון לבעיה. ברגע הראשון חשבתי שאולי מדובר בבעיית קיצון, שכן השאלה דיברה על "המרחק הקצר ביותר". אולם, כעבור מספר שניות הגעתי למסקנה שפתרון על-ידי נגזרת ידרוש מספר רב של משתנים ולכן זנחתי דרך זו, מה גם שהעמיתה הציגה את הבעיה כ"חישובית קלה ונחמדה" נתון שלא הסתדר לי עם פתרון כזה. התחלתי למתוח קווים שעשויים להיות המסלולים הקצרים יותר, בעזרתם הבנתי שקיימים שני מסלולים קצרים אפשריים: המסלול שמחבר את שתי הפינות המבוקשות דרך פינה עליונה שמאלית של המלבן הפנימי, או זה העובר דרך פינה ימנית תחתונה של המלבן הפנימי. הבנה זו התבססה על המשפט לפיו במשולש סכום האורכים של שתי צלעות גדול מאורך הצלע השלישית. מטעמי סימטריה החלטתי ששני המסלולים שציינתי קודם שווים באורכם.



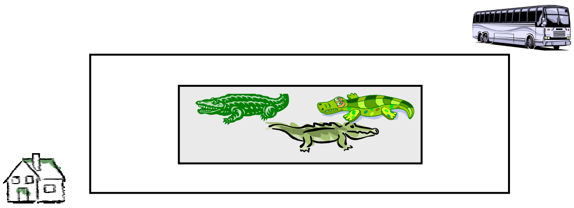
ציור 2: שני פתרונות לבעיה 1

השאלה מצאה חן בעיניי מאוד והחלטתי להביא אותה לכיתה שבה אני מלמדת – כיתה יא ברמה של 3 יח"ל, בה רוב התלמידים תופסים את לימודי המתמטיקה כחובה לא נעימה. ראיתי בבעיה זו הזדמנות לחשוף את התלמידים לחוויה מתמטית אחרת – פתרון בעיה לא שגרתית, ידידותית, לכאורה פשוטה ולא דורשת ידע קודם כמעט (למעט אי-שוויון המשולש), אשר אותה, כך האמנתי, לא יתקשו לפתור.

תכנון הוראה

כדי לחבב על תלמידיי את הבעיה, החלטתי להציג אותה כסיפור:

בעיה 2 : במרכז גן מלבני יש בריכת תנינים מלבנית כמתואר בציור. דני צריך לחצות את הגן כדי להגיע מביתו הממוקם ליד הפינה השמאלית התחתונה שלו אל תחנת האוטובוס הנמצאת ליד הפינה הימנית העליונה. דני ממהר כיוון שהוא חושש להחמיץ את האוטובוס. עזרו לדני למצוא את הדרך הקצרה ביותר מביתו לתחנה (בלי להיכנס לבריכת התנינים...).

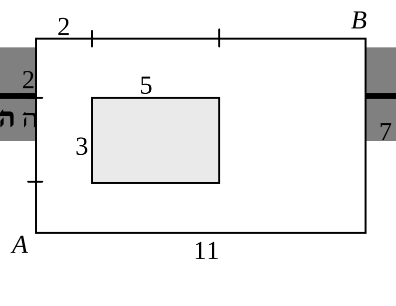


ציור 3: בעיה 2

תכננתי לחלק את הפעילות לשני חלקים. בחלק הראשון תכננתי להציג את הבעיה בפני התלמידים כפעילות שיתופית בקבוצות קטנות. ציפיתי שהם יציירו קווים שונים, יחפשו מסלולים שונים ויגיעו יחד למסקנה דומה לשלי.

בחלקה השני של הפעילות תכננתי להציג לתלמידים בעיה שונה.

בעיה 3 : בציור שלפניך (ציור 4) יש לחשב את אורך המסלול הקצר ביותר בין A ל- B.



מטרת חלק זה של השיעור הייתה חישוב אורכי המסלולים תוך שימוש במשפט פיתגורס. לשם כך הוספתי ערכים מספריים לציור, לציון אורכים של צלעות המלבן ושל חלקיהן. כדי שיהיה צורך להשתמש במשפט פיתגורס יותר מפעם אחת, הזזתי את המלבן הפנימי מעט שמאלה. בחלק זה הבעיה הוצגה כמשימה מתמטית טהורה (ולא כסיפור).

השיעור

לפני שנכנסתי לשיעור היו לי חששות לא מעטים. תלמידיי היו רגילים לבעיות שגרתיות, אשר פתרונותיהן מבוססים על אלגוריתמים שזה עתה למדו. לעומת זאת בשיעור המתוכנן הם היו אמורים לעסוק בפעילות חקר עצמאית, בלי שצוידו באסטרטגיית פתרון מוכנה מראש וללא קישור ברור לנושא מתמטי ממוקד. חששתי מתגובות של התנגדות או חוסר אונים, אך מאידך קיוויתי שהעובדה שלפתרון הבעיה כמעט לא דרוש ידע קודם, תאפשר שיתוף פעולה גם מצד תלמידים שבדרך כלל אינם ב'עניינים'.

כשנכנסתי לכיתה הצגתי את הבעיה כבעיית אתגר וביקשתי מהתלמידים להתחלק באופן עצמאי לחמש קבוצות של ארבעה תלמידים כל אחת. השלב הראשון התבצע כמתוכנן. הקבוצות הגיעו די במהירות לפתרון עליו חשבתי בעצמי. תלמידים של שתים מן הקבוצות הסבירו את מסקנתם על ידי שימוש באי-שוויון המשולש בעוד יתר התלמידים התקשו להצדיק את מסקנתם (ר' ציור 2).

גם השלב השני התחיל כמתוכנן, תוך זמן קצר חלק מהתלמידים החלו להוסיף קווי עזר, להשתמש במשפט פיתגורס ולחשב. כל התלמידים לא לקחו בחשבון את העובדה שהמלבן הפנימי הוזז, לכן, על סמך ההנחה לפיה המסלולים שווים באורכם, חלק מהתלמידים חישבו את האורך של אחד המסלולים בלבד, החלק האחר חישבו את האורכים של שני המסלולים, כדי לאשר את השוויון ביניהם.

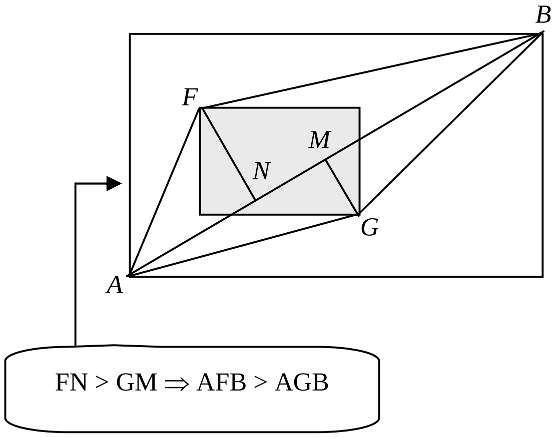
תלמידי הקבוצה שסיימה ראשונה את החישובים הופתעו לגלות הבדל בין שתי התוצאות והניחו שהבדל זה הוא

תוצר של שגיאה בחישוב. כאשר גם לאחר בדיקה נוספת לא הצליחו לקבל תוצאות שוות, הם קראו לי ושאלו אם יתכן שלא מדובר בטעות, אלא בממצא אמיתי. הדיון הכיתתי נסב על ממצא זה, כלומר על-כך שהזזת המלבן הפנימי גורמת לשבירת השוויון בין המסלולים. התלמידים רצו לדעת:

האם ניתן להשוות בין אורכי המסלולים ללא חישוב?

שאלה זו הייתה בלתי צפויה (איך לא חשבתי עליה קודם!- פספוס א) ולכן הרגשתי צורך בפסק זמן לצורך חשיבה על השאלה, אך מייד אחד התלמידים (עופר) צעק בהתרגשות:

עופר: *כמובן, הקודקוד הזה (הצביע על אותו קודקוד של המלבן הפנימי שדרכו עובר המסלול הקצר יותר) קרוב יותר לאלכסון AB ולכן המסלול הזה קצר יותר.*



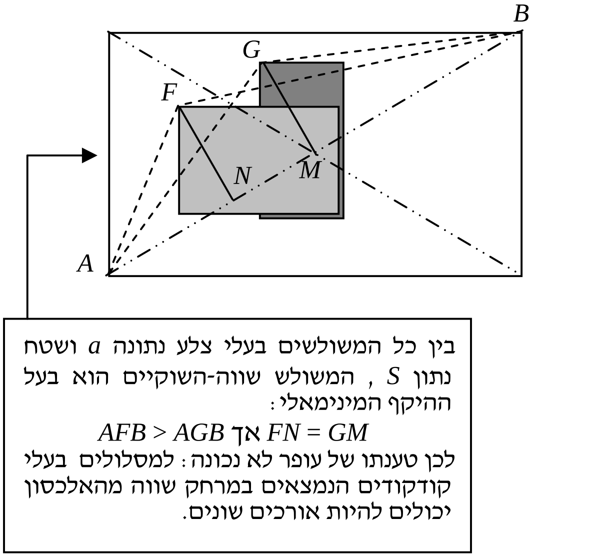
ציור 5: הפתרון של עופר

כל הכיתה (וגם אני) התרשמה מאד מ"הרעיון המבריק" של עופר. בדיוק אז צלצל הפעמון לסיום השיעור ואני עזבתי את הכיתה מרוצה: אפילו התלמידים שבדרך כלל אינם מראים התעניינות בנעשה בכיתה שיתפו פעולה ואף הרגשתי שלמדתי מתמטיקה יחד עם תלמידיי. לא הרגשתי נוח עם העובדה, שלא הספקנו להוכיח את השערתו של עופר ולכן החלטתי לפתוח בזה את השיעור הבא.

תכנון השיעור השני: גילוי הפספוסים

כאשר התכוננתי לקראת השיעור הבא גיליתי שפספסתי טעות: אילו התייחס עופר לשתי נקודות על אותו אנך טענתו הייתה נכונה. אך באופן כללי הטענה שגויה. איך החמצתי את זה בזמן השיעור? (פספוס ב). הרי ידעתי שמבין כל המשולשים בעלי צלע נתונה a ושטח נתון S, למשולש שווה-שוקיים יש היקף מינימאלי. כלומר ניתן לבנות מסלולים שונים בהם קדקודים במרחקים שווים מהאלכסון אך אורכיהם שונים (ציור 6).

החלטתי לתכנן פעילות חדשה, בה שימוש בדוגמאות נגדיות יוביל את התלמידים לדחיית ההשערה של עופר. האם תוכלו לעזור לי לבנות פעילות כזו?



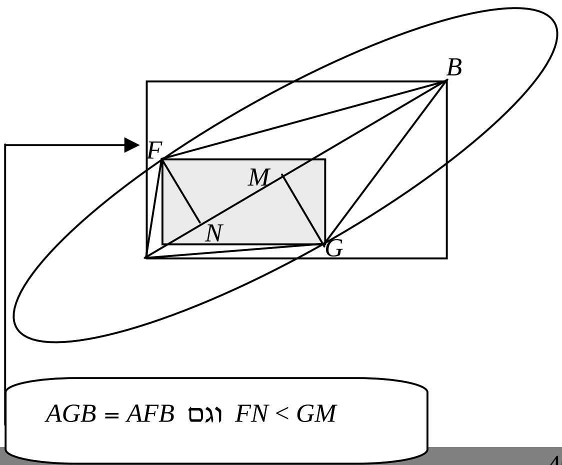
ציור 6: הפתרון של עופר

אנחנו ועינת: דיון עמיתים

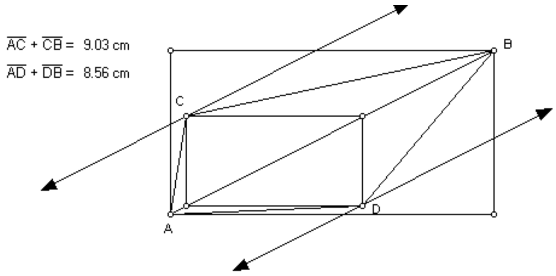
כאשר עבדנו יחד על פעילות לשיעור הבא של עינת, חיפשנו תשובה לשאלה אותה העלו התלמידים:

כיצד ניתן להשוות בין אורכי המסלולים ללא חישוב?

חיפוש זה הוביל אותנו למסקנה יותר כללית: שני המסלולים (AFB ו-AGB ראה ציור 7) יהיו באותו אורך אם הקודקודים F ו-G נמצאים על אותה אליפסה אשר מוקדיה הם A ו-B. אם אחת הנקודות (F או G) נמצאת על האליפסה והשנייה בתוכה אז המסלול העובר דרך הקודקוד שבתוך האליפסה הוא הקצר יותר.



עינת התלהבה מהגילוי, שבעיה הנראית כה פשוטה היא למעשה כה עשירה ומאתגרת. יחד עם זאת, בעיניה, השאלה של התלמידים נשארה פתוחה, כיוון ש"אין זה פשוט לבנות אליפסה, כאשר פותרים את הבעיה". מטרת הפעילות שבנינו בסופו של דבר הייתה לעזור לתלמידיה של עינת להבין שהשערתו של עופר הייתה שגויה. הפעילות כללה בניות שונות ומדידות בסביבה של גיאומטריה דינאמית (ציור 8) בה תלמידים יכלו לבצע מדידות ולראות הפרכות להשערתו של עופר.



ציור 8: פתרון בסביבה דינאמית

ניתוח הסיפור

הסיפור של עינת מצא-חן בעינינו. הוא הראה לנו פעם נוספת שמורה עשוי ללמוד מתמטיקה יחד עם תלמידיו. במבט לאחור ברצוננו להציג ניתוח של השלבים השונים בסיפור על מנת לחשוף את מרכיבי ההוראה שתרמו ללמידה של עינת.

בשלב הראשון האינטראקציה של עינת עם עמיתה היא הגורם המרכזי בלמידה של עינת. אינטראקציה זאת הובילה להכרות עם בעיה וגם להערכת הבעיה כבעיה לא קשה. לכן בשלב פתרון הבעיה עינת פסלה את הדרך השגרתית לפתרון בעיות קיצון ומצאה פתרון המבוסס על שימוש באי-שוויון המשולש. מציאת פתרון 'כה פשוט' אפשר לעינת להעריך את הבעיה כמתאימה לתלמידיה ברמה של 3 יחידות. תפיסת המורה את הבעיה כבעיה לא שגרתית הובילה אותה לתכנון של שיעור לא שגרתי, במיוחד לתלמידי 3 יח"ל. התכנון התגלה כיצירתי ביותר: המורה שינתה את הבעיה פעמיים (ר' בעיה 2, בעיה 3). היא קישרה את הבעיה לנושא נוסף ושילבה פעילות חקר עם תרגול של משפט פיתגורס. עבודה שיתופית נבחרה כגישה מתאימה לסוג הבעיה. בזמן השיעור עינת הייתה קשובה לתשובות התלמידים ושינתה את תוכנית השיעור בעקבות שאלה בלתי צפויה של התלמידים. השאלה הזאת האירה את הפספוס בתכנון השיעור: המורה לא תכננה את ההכללה אליה הובילו התלמידים (שלמדו מתמטיקה ברמה של 3 יח"ל!). הצורך לחשוב על השאלה לא התממש בגלל תשובה מיידית של אחד מהתלמידים. כוונת המורה להמשיך את הדיון בשאלה ולהגיע עם התלמידים להוכחת ההשערה שהועלתה תרמה לניתוח רפלקטיבי ביקורתי של השיעור וגילוי הפספוס השני – 'ההשערה שגויה'. גילוי זה אפשר למידה של המורה שנמשכה בעת האינטראקציה עם העמיתות.

ולסיכום: הפספוסים הם מנוף ללמידה בתנאי שמגלים אותם ומתמודדים איתם. ברצוננו לטעון כי *המומחיות של המורה אפשרה לה ללמוד* יחד עם התלמידים. המומחיות הזאת כללה *יצירתיות* בהכנת השיעור, מוכנות להתנסות *בחידושים*, יכולת להיות *קשובה וגמישה* במהלך השיעור, *חשיבה ביקורתית וסקרנות מקצועית* (Leikin, 2005a, 2005b, 2006). ניסינו להדגיש גם את חשיבות *האינטראקציות בין העמיתים* ללמידה של המורים.

מקורות

Leikin, R. (2005a). Teachers' learning in teaching: Developing teachers' mathematical knowledge through instructional interactions. The paper presented at the 15th ICMI Study: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html

Leikin, R. (2005b). Qualities of professional dialog: Connecting graduate research on teaching and the undergraduate teachers' program. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36(1-2), 237-256

Leikin, R. (2006). Learning by teaching: The case of Sieve of Eratosthenes and one elementary school teacher. In R. Zazkis & S. Campbell (Eds.), Number Theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects. (pp. 115-140). Mahwah, NJ: Erlbaum.