אינסוף – הסיפור שלא נגמר

אינסוף – הסיפור שלא נגמר, מאת **חיים שפירא**. הספר מכיל 115 עמודים. לכל פרק מצורפים תרגילים אשר פתרונם יהיה אתגר לקוראים. בסוף הספר נמצאים פתרונות מלאים. אפשר לרכוש את הספר במשרדי היחידה לנוער שוחר מדע, אוניברסיטת תל אביב, טלפון: 03-6408469, 03-6408154, 03-6423380.

הפרופסורים גדעון צבס ודינה תירוש מאוניברסיטת תל אביב קראו את הספר וכך כתבו:

"מימים ימימה עורר האינסוף את רגשות האדם יותר מכל שאלה אחרת. ככל הנראה לא קיים מושג שעורר והפרה את המחשבה האנושית יותר ממושג האינסוף, אך האינסוף גם זקוק להבהרה יותר מכל מושג אחר".

כך פתח המתמטיקאי הדגול דויד הילברט, את מאמרו "על האינסוף", אשר נכתב בראשית המאה העשרים.

בספרו "האינסוף – הסיפור שלא נגמר" מצליח חיים שפירא להפגישנו, בצורה מרתקת, עם עולמות רחוקים, אינסופיים.

תוך כדי מסע מופלא זה אנו עורכים היכרות עם גדולי המתמטיקאים בכל הדורות, וביניהם פיתגורס, זנון, פרמה, גלילי, ראסל, קנטור, מנדלברוט ואחרים, מכירים תחומים מתמטיים מגוונים (תורת הקבוצות, גאומטריה פרקטלית) ומעל לכל, לצד ההתפעמות מיופיה ומעוצמתה של המתמטיקה אנו מכירים גם את נקודות התורפה שלה.

ספר זה הוא, ככל הידוע לנו, ראשון מסוגו בישראל, ויעניין את כל המתעניינים במתמטיקה גדולים כקטנים. הספר מיועד, איפוא, לאוכלוסיה המתעניינת במתמטיקה, ובמדעי המחשב, אשר גדלה מאוד בשנים האחרונות. לקידומה של אוכלוסיה זו חשיבות רבה בעולם הטכנולוגי המדעי, וספר זה, הכתוב בשפה רהוטה ושוטפת, מציג נושאים מסובכים אלה בצורה פשוטה וברורה. בספר נכללים תרגילים מאתגרים ופתרונותיהם.

כותב הספר, חיים שפירא, עוסק בהוראת מתמטיקה במסגרות רבות ומגוונות (חוגים לנוער שוחר מדע, בתי ספר, פקולטות שונות באוניברסיטת תל אביב).
הוא ידוע כמורה מעולה אשר זכה בפרסים שונים. לחיים שפירא יכולת רבה במיוחד להצגת נושאים מורכבים בצורה פשוטה שווה לכל נפש.

אנו ממליצים בחום על ספר זה. למורים, לתלמידים ולחובבי מתמטיקה. לאלה אשר יקראו ספר זה צפויה חוויה מרתקת, מענגת ומלמדת.

הנה פרק מתוך הספר. הפרק עוסק בגודלן של קבוצות אינסופיות ובשיטת האלכסון של קנטור (Cantor)

המלון האינסופי

בכוכב Proxima Infiniti, השוכן במרחק אלפי שנות אור מכדור הארץ, נמצא אחד מפלאי הארכיטקטורה הפוסט־מודרנית. נבנה שם, לפי רעיונותיו של המתמטיקאי דיוויד הילברט, מלון הנושא את שמו ובו מספר אינסופי של חדרים. אף שבכל קומה נמצא חדר אחד בלבד, המלון כולו בגובה מטר.

גובהה של הקומה הראשונה הוא חצי מטר, של הקומה השנייה רבע מטר, של השלישית שמינית מטר, וכך הלאה (קומה מספר n – גובהה $\frac{1}{2^n}$ מטר). אורחיו הקבועים של המלון הם המספרים הטבעיים (1,2,3,4,...), שכל אחד מהם גר בקומה הנושאת את מספרו, ותפוסת המלון מלאה. צוות העובדים של המלון כולל: מנהל קבלה, פקיד קבלה ושתי חדרניות (האחת אחראית לחדרים האי־זוגיים והאחרת לזוגיים).

יום אחד הגיע למלון המספר אפס ושאל את פקיד הקבלה אם יש חדר פנוי. פקיד הקבלה אמר, שהמלון מלא לגמרי ושהוא מצטער מאוד. למזלו של האורח נקלע למקום מנהל הקבלה. הוא נזף בפקיד ואמר, שאילו המלון היה סופי, אכן לא היה ניתן לעשות דבר, אך במלון אינסופי אפשר לפתור את הבעיה בקלות. מנהל הקבלה הודיע ברמקול: "אורחים נכבדים, כל אחד מכם מתבקש לעבור קומה אחת למעלה" מספר אחד עבר לקומה השנייה, שבה התגורר קודם לכן מספר שניים. מספר שניים עבר לגור בקומה השלישית, מספר שלוש בקומה הרביעית, וכך הלאה. הקומה הראשונה התפנתה, ומספר אפס מצא עצמו בין אורחי המלון.

"שים לב", פנה המנהל לפקיד, "אני מקווה שאם תגיע עכשיו קבוצה סופית של אורחים, תוכל לקבל אותם בעצמך". "כמובן", ענה הפקיד, "נניח שיגיעו אלף אורחים, אז אבקש מכל אורח לעבור לחדר שמספרו גדול באלף ממספר חדרו, וכך יתפנו לי אלף חדרים".

המנהל חזר שבע־רצון לעיסוקיו האחרים, אך את שלוותו הפר צלצול הטלפון. מן העבר האחר נשמע קולו של מספר 13. "רציתי

להתלונן על המחירים המופרזים", אמר 13, "1000 אקו ללילה זה שוד לאור היום. מה עוד שגם אם תגבה מאתנו חצי אקו, פדיונך לא ישתנה. בשני המקרים תקבל סכום אינסופי של כסף".

"לא", איני יכול להוריד את המחיר עד כדי כך. רק התחזוקה השוטפת של כל חדר עולה לי עשרים אקו, ומה עם המשכורות שאני צריך לשלם לעובדים"?

"אין שום בעיה", המשיך 13 בשלו. "אפילו אם ההוצאה שלך תהיה 500 אקו לחדר ליום, ותשלם לכל עובד 70 אקו לשניית עבודה, עדיין תוכל לגבות מאתנו חצי אקו ללילה וגם להרוויח כל יום מיליארד אקו".

"הכיצד"? שאל המנהל.

"פשוט מאוד. ההוצאות שלך הן אמנם אינסופיות, אך כמוהן גם הכנסותיך. עכשיו, מתוך ההכנסה תוכל תמיד להשאיר בצד מיליארד אקו, והיא עדיין תישאר אינסופית, כך שתוכל לאזן בעזרתה את ההוצאות. למעשה, לא יקרה כלום גם אם תוריד את מחיר החדר לאלפית אקו". "הממ..." המהם המנהל. "זה נשמע מעניין, אחשוב על כך".

עודו שקוע במחשבותיו, הופיעה על צג המחשב הודעה בזו הלשון: "אל מלון הילברט, מאת Alpha Negative. כל תושבינו, המספרים השליליים השלמים ...,3-,2-,1-, רוצים להגיע אליכם לביקור. אנא מצא לנו מקום במלונך". מכיוון שמספרם הצפוי של האורחים הוא אינסופי, הפתרון הקודם של הזזת הדיירים אינו בא בחשבון, כי כל דייר יצטרך לעבור אינסוף קומות למעלה וכלל לא ברור מי ילך ולאיזה חדר. מנהל הקבלה ניסה לחשוב על פתרון אחר, אך לא כל כך הצליח. לבסוף החליט להתייעץ עם פקיד הקבלה. "אין שום בעיה לקבל אותם", אמר הפקיד. "אפס ואחד יישארו במקומם, בקומה הראשונה ובקומה השנייה, וכל מספר אחר יעבור לחדר שהוא כפליים ממספרו, כלומר שניים ילך לחדר מספר 4, שלוש לחדר מספר 6, וכך הלאה. החדרים שמספריהם ...3,5,7,9, יהיו עתה פנויים ונוכל לשכן בהם את האורחים".

ואכן, כאשר המספרים השליליים הגיעו לביקור, לא היתה כלל בעיה לשכנם, והמלון נראה כך:

מספר חדר	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ...
האורח	0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4...

כלומר: אפס התגורר בחדר מספר 1, כל מספר טבעי התגורר בחדר שהוא כפליים ממספרו, וכל מספר שלילי התגורר בחדר שמספרו שווה למספר האורח מוכפל ב־(2−) ועוד 1. למשל, (17−) היה בחדר שמספרו $35 = 1 + (-17) \cdot (-2)$.

כאשר המספרים השליליים והאפס עזבו את המלון, הופתע המנהל לגלות, כי המספרים הטבעיים, שפעם מילאו את המלון כולו, ממלאים עתה רק את החדרים הזוגיים, ושלמעשה ניתן להתייעל ולפטר את החדרנית שאחראית על החדרים האי־זוגיים. תפוסת המלון ירדה לחמישים אחוז, אף שהתאכסן בו אותו מספר אורחים, שפעם מילא אותו לגמרי! "ומה יקרה אם מספר 1 יעבור לגור בחדר מספר 10", תהה המנהל בינו לבינו בדאגה, "מספר 2 בחדר מספר 20, 3 ב־30, וכך הלאה"? הרי התפוסה תרד לעשרה אחוז, אף על פי ששום אורח לא עזב את המלון! עם תפוסה קטנה כל כך עוד יפטרו אותי".

בעודו מודאג מן האפשרות לפיטוריו, נזכר המנהל שבשבוע שלאחר מכן יתקיים כנס על רציונליזם פוזיטיבי, שכל אורחיו, המספרים הרציונלים החיוביים, אמורים להתארח במלון. "אין בעיה", אמר בלבו, "המלון חצי ריק ויש אינסוף חדרים ריקים".

אך לפתע עלה על דעתו, שבעצם המספרים הרציונליים, שהמכנה שלהם הוא 2, יכולים למלא את המלון. 1/2 ילך לחדר מספר 1, 2/2 לחדר מספר 2, 3/2 לחדר מספר 3, וכך הלאה. מובן, שגם הרציונליים בעלי מכנה 3 או 4 כל מכנה אחר יכולים לבדם למלא את המלון כולו. כלומר, יש כאן אינסוף קבוצות אינסופיות, וכל אחת מהן יכולה למלא את המלון. ולא זו בלבד, אלא שעוד לפני בואן למלון מתגוררים בו כבר כל המספרים הטבעיים.

המנהל אמנם בדק אפשרויות שונות, כגון לשכן את 1 בחדר מספר 1, את 2 בחדר 1001 ואת 3 בחדר 2001,... ואז את 1/2 בחדר 2, את 2/2 ב־1002, את 3/2 ב־2002, וכך הלאה... את 1/3 בחדר 3, את 2/3 בחדר 1003, את 3/3 ב־2003, וכך הלאה... אך לאחר מחשבה קצרה הוא ראה כי התכנית הזאת לא תעלה יפה.

בלית ברירה הוא פנה ליועץ המתמטי הראשי של Proxima Infiniti, פרופסור פינקלשטיין. הפרופסור אמר, כי הבעיה אכן סבוכה ביותר, אך הודות לאיש אחד ושמו אוקלידס, שחי פעם על כוכב מרוחק ביותר, כדור הארץ, ניתן בהחלט לפתור אותה.

"מה עשה אוקלידס"? התעניין מנהל המלון.

"הוא הוכיח כי קיימים אינסוף מספרים ראשוניים", השיב הפרופסור.

"ומה זה עוזר לנו"?

"זה מאפשר לנו לפתור די בפשטות את הבעיה. נשכן את כולם לפי חזקות של מספרים ראשוניים, באופן הבא: 1 ילך לחדר מספר 2, 2 לחדר מספר 2^2, 3 ל־2^3,... 1/2 ילך לחדר 3, 2/2 לחדר 3^2, 3/2 ל־3^3, 4/2 ל־3^4,... 1/3 לחדר 5 (פה הבין המנהל למה חייבים להשתמש במספרים הראשוניים, כי חדר מספר 4 כבר מיועד למספר 2), 2/3 ל־5^2, 3/3 ל־5^3,... 1/4 ל־7, 2/4 ל־7^2, 3/4 ל־7^3, וכך הלאה...".

"זה סידור מעניין מאוד", המשיך הפרופסור בהסברו. "אף שיש אינסוף קבוצות אינסופיות, שכל אחת מהן יכולה למלא את המלון כולו, הצלחנו לשכן את כולן, ועוד נשאר לנו אינסוף חדרים ריקים".

"מה"?! מנהל הקבלה לא האמין למשמע אוזניו.

"כל החדרים שמספריהם אינם חזקות של מספר ראשוני כלשהו, כגון 1, 6, 10, 12, 14, 15, 18,..., ריקים".

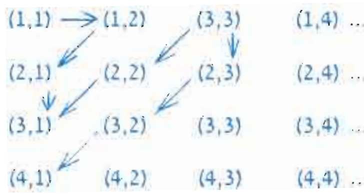
המנהל, שרק לפני רגע שמח על הפתרון של הפרופסור, התאכזב משהו. שוב צצה בעיית התפוסה. למנהל טוב לא צריך להיות אינסוף חדרים ריקים.

״ראה״, פנה המנהל לפרופסור. ״רק הטבעיים יכולים למלא את המלון, ולפי מה שאתה מציע, הטבעיים יחד עם עוד אינסוף קבוצות אינסופיות, אינם מצליחים להגיע למאה אחוז תפוסה. אולי בכל זאת אפשר לעשות משהו?״

״חשבתי, שהפתרון יהיה יותר מרשים, אם יישארו חדרים ריקים, אבל אם כל מה שמעניין אותך זה תפוסת המלון, אציע פתרון של מאה אחוז תפוסה״.

״בבקשה״.

״נתאים לכל מספר רציונלי זוג מספרים. האחד יהיה המונה, והאחר המכנה. למשל, ל־3/4 נתאים את הזוג (3,4), למספרים הטבעיים נתאים את הזוג (4,1). למשל, ל־7 נתאים את (7,1). נסדר את כל המספרים בצורה הבאה:



באופן כללי, נשכן את המספר n/m בחדר $n^2 - m + 1$ אם $m \geq n$, ובחדר $(m-1)^2 + n$ אם $n < m$. למשל, המספר 3/2 ישוכן בחדר $3^2 - 2 + 1$, כלומר בחדר מספר 8. ואכן, אם נצא מן הזוג (1,1) (ראה איור) לפי החיצים, יהיה הזוג (3,2) שמיני על מסלולנו.

המנהל לא ידע את נפשו מרוב שמחה. הוא אף יצא במסע פרסום, שססמתו: ״כל הבא ברוך הבא״.

יום אחד הגיע פקס מן הכוכב Delta Continua ובו הודעה, שקבוצת כל המספרים הנמצאים בין 0 ל־1 מעוניינת לבקר ב־Proxima Infiniti. המנהל אמנם היה מודע, שיש ״לא מעט״ מספרים בין 0 ל־5, כגון:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{107}{113}, \frac{\sqrt{7}}{101}\ldots$ אך הוא לא שיער, שיכולות להתעורר בעיות כלשהן באכסונם. הרי כבר היו במלון אינסוף קבוצות אינסופיות, אילו בעיות כבר יכולות להתעורר באכסונה של קבוצה אינסופית אחת ויחידה?

אך כל ניסיונותיו למצוא פתרון עלו בתוהו. לא נותרה ברירה אלא לפנות שוב לפרופסור פינקלשטיין. אך להפתעתו, הפרופסור לא זו בלבד שלא מצא פתרון, אלא אף התריס כי לבעיה זו אין פתרון.

״ואם אגרש מהמלון את המספרים הטבעיים, תוכל לעזור לי?״

״לא״.

״כיצד ייתכן שבמלון אינסופי וריק לא יהיה די מקום לקבוצה כלשהי של אורחים?״ הקשה המנהל.

״במקום שתחפש דרך לשכן את המספרים״, הציע הפרופסור, ״בוא ואוכיח לך, שגם במלון אינסופי לא ניתן לשכן אפילו את המספרים שבין 0 ל־1, שניתנים לכתיבה בעזרת הספרות אפס ואחד. נשתמש בכתיבה אינסופית בכל המספרים, כלומר במקום 0,101 נכתוב ...0,101000. עתה נניח, כי סידרנו את כל המספרים במלון לפי החדרים, כאשר α_i הוא המספר השוכן בחדר שמספרו:

$$\alpha_1 = 0.\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14}$$
$$\alpha_2 = 0.\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{24}$$
$$\alpha_3 = 0.\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\alpha_{34}$$
$$\alpha_4 = 0.\alpha_{41}\alpha_{42}\alpha_{43}\alpha_{44}$$

כלומר, α_{ki} הוא הספרה ה־k־ית אחרי הנקודה. במספר השוכן בחדר i כל ה־α_{ki} הם או ספרות אפס או ספרות אחד.

״עתה״, המשיך הפרופסור, ״אראה לך מספר, שאינו שוכן במלון, וזה יוכיח שאין אפשרות לסדר את כל המספרים, כי הרשימה שלנו היא כללית ביותר. המספר שאיננו במלון הוא:

$\beta = 0 \cdot \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\ldots$, כאשר:

$$\beta_i = \begin{cases} 1 & \alpha_{ii} = 0 \text{ אם} \\ 0 & \alpha_{ii} = 1 \text{ אם} \end{cases}$$ כלומר, $\beta_i \neq \alpha_{ii}$״.

״ומניין לך ש־β איננו במלון?״ שאל המנהל.

״זה פשוט. הספרה הראשונה של β אחרי β_1 שונה מהספרה הראשונה של α_1 אחרי הנקודה, כי $\beta_1 \neq \alpha_{11}$, כלומר $\beta \neq \alpha_1$. הספרה השנייה של β אחרי הנקודה, β_2, שונה מהספרה השנייה של α_2, כי $\alpha_{22} \neq \beta_2$, ולכן $\beta \neq \alpha_2$. באותו אופן אפשר להסיק כי $\beta \neq \alpha_i$ לכל i אחר, כלומר β איננו במלון״.

״אם כך, אצרף את β לרשימה וארשום אותו בראשה, לפני α_1״, ניסה המנהל להקשות על הפרופסור.

״לא הבנת את ההוכחה. גם אם תצרף את β, עדיין אוכל לבנות מספר חדש, נקרא לו γ, שאיננו נמצא ברשימה״.

״אתה צודק, אבל עדיין איני מבין כיצד ייתכן, שבמלון **אינסופי** לא יהיה מקום לקבוצת אורחים כלשהי?״

״זה אומר, שמספר החדרים במלון אמנם אינסופי, אך מספר האורחים שביקשו לבוא הוא גדול יותר״, הסביר הפרופסור.

״על מה אתה מדבר? אינסוף ׳גדול יותר׳?״ שאל המנהל במבוכה. אך הפרופסור כבר נלאה מאוד מן השיחה.