בעית ארבעת הצבעים[1]
חלק ב׳

מאת **רובין י. ווילסון** (**Robin J. Wilson**),
האוניברסיטה הפתוחה,
מילטון קינס, אנגליה [1]

בחלקו הראשון של המאמר הוצגה בעית ארבעת הצבעים — כל מפה ניתן לצבוע בעזרת ארבעה צבעים בצורה־כזאת שמדינות שכנות תהיינה בעלות צבעים שונים כמו־כן, תוארה שם ה״הוכחה״ של אלפרד קמפה (Alfred Kempe)

ההוכחה של קמפה משנת 1979 התקבלה על־ידי המתמטיקאים באותה תקופה בהתלהבות ונחשבה על ידי כולם לנכונה לאחר אחד־עשר שנים הטיל פרסי היווד (Percy Heawood) פצצה

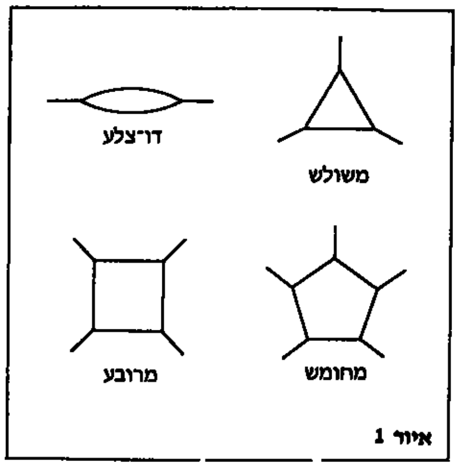
ב־1890, פרסם מרצה למתמטיקה באוניברסיטת דורהם (Durham) בשם פרסי היווד (Percy Heawood) מאמר מפתיע ברבעון למתמטיקה טהורה ושימושית (Quaterly Journal of Pure and Applied Mathematics) במאמר הצביע היווד, תוך התנצלות, על טעות בסיסית בהוכחה של קמפה אולם מתוך עבודתו של קמפה הצליח להוכיח כי כל מפה ניתנת לצביעה בעזרת חמישה צבעים כמו כן הכליל היווד את בעית צביעת המפה באופנים שונים

משפט חמשת הצבעים

לפני שנתאר את הדוגמה הנגדית שהציג היווד להוכחה של קמפה נחזור על הרעיונות העקריים של קמפה על־ידי הצגת ההוכחה של היווד למשפט חמישה הצבעים כפי שתראו, מרבית ההוכחה דומה מאד להוכחה של משפט ארבעת הצבעים שהוצגה בגיליון הקודם

נניח בדרך השלילה כי קיים אוסף מפות שאי אפשר לצבוע אותן בעזרת חמישה צבעים מתוך קבוצה זו נבחר מפה עם מספר מדינות מינימלי מטרתנו היא לחקור דוגמה נגדית מינימלית זו ולהראות כי ההנחה שהנחנו מובילה לסתירה

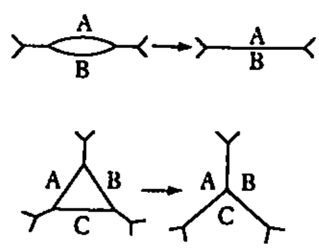
ראינו בחלק א של המאמר כי בעזרת נוסחת הפאונים של אוילר (ראה עלייה 10, מסגרת 4) אפשר להוכיח כי כל מפה מכילה לפחות מדינה אחת שמספר שכנותיה אינו עולה על חמש כך נוכל להניח כי המפה ״המינימלית״ שבידינו מכילה לפחות ״מצולע״ אחד שהוא ״דו־צלע״ (ראה איור 1), משולש, מרובע או מחומש (נזכור לא מדובר כאן במצולעים ממש שכן צלעותיהן של צורות אלה אינן ישרות) נחקור את כל האפשרויות האלה בזו אחר אחר זו ונראה שכל אחת מהן מובילה לסתירה



איור 1

דו־צלע או משולש

אם המפה מכילה דו־צלע או משולש, אפשר לכווצם לנקודה (איור 2)



איור 2

מספר המדינות במפה המתקבלת בדרך זו קטן באחד מזה שבמפה המקורית על כן, לאור ההנחה כי המפה המקורית היא המינימלית בין

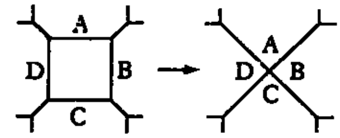
1) המקור האנגלי של מאמר זה הופיע ב־Mathematics Review בספטמבר 1990 התרגום מתפרסם באדיבותם של עורכי העיתון ושל המחבר

כל אלה שלא ניתנות לצביעה בחמישה צבעים, ניתנת המפה החדשה לצביעה כזאת

ניתן עתה להחזיר את הדו־צלע או את המשלוש למקומם ולצובעם באחד הצבעים שלא שימשו לצביעת הארצות הגובלות בהם הצביעה המתקבלת תהיה צביעה תקינה בחמישה צבעים של המפה המקורית — וזה סותר את הנחתנו

מרובע

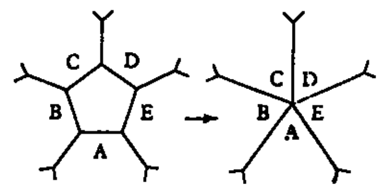
אם המפה מכילה מרובע נכווץ גם אותו לנקודה (איור 3) גם במקרה זה, לאור הנחת המינימליות, ניתנת המפה החדשה לצביעה בחמישה צבעים כאשר נחזיר את המרובע למקומו נצבע אותו באחד הצבעים שלא שימשו לצביעת הארצות הגובלות בו הצביעה המתקבלת היא צביעה תקנית בחמישה צבעים — סתירה להנחתנו.



איור 3

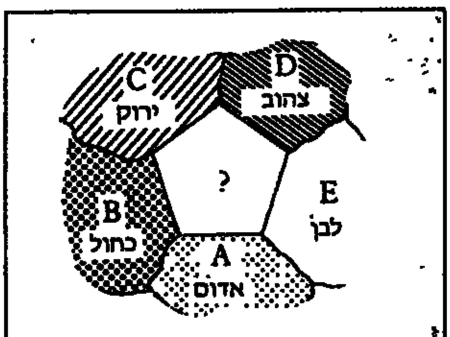
מחומש

גם את המחומש ניתן לצמצם לנקודה (איור 4) המפה החדשה מכילה פחות ארצות מהמפה המקורית ולכן על־פי הנחת המינימליות ניתן לצובעה בחמישה צבעים



איור 4

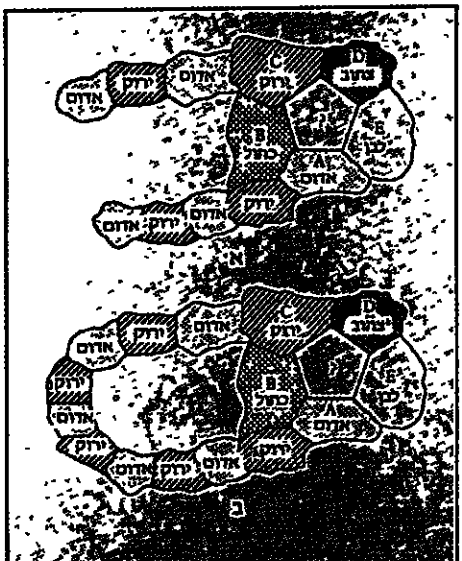
כאשר נחזיר את המחומש למפה הצבועה יתעורר קושי יתכן שחמש הארצות הגובלות במחומש נצבעו כולן בצבעים שונים (איור 5) במקרה זה אין צבע עודף שבו אפשר לצבוע את המחומש



איור 5

בהוכחת משפט ארבעת הצבעים התגברנו על קושי זה על־ידי שימוש בנימוק השרשרת של קמפה נעשה כאן אותו דבר.

נתבונן במדינות האדומות והירוקות הצמודות למחומש ונבדוק האם המפה מכילה שרשרת של ארצות אדומות וירוקות המופיעות לסירוגין ומובילות מהארץ האדומה A לארץ הירוקה C (ראה איור 6)



איור 6

אם אין שרשרת כזאת (איור 6א), כי אז ניתן להחליף זה בזה את הצבעים אדום וירוק בסדרת הארצות האדומות והירוקות המתחילה ב־A [אך אינה מגיעה ל־C] אם נבצע את הפעולה בשרשרת גדולה ככל האפשר כי אז אין חשש שצבען של שתי מדינות שכנות יהפוך זהה לאחר ביצוע ההחלפה, נותר המחומש מוקף בארבעה צבעים בלבד ירוק, צהוב, כחול ולבן ועל כן נוכל לצבעו באדום — דבר שיוביל לצביעה תקינה בחמישה צבעים — ולסתירה חדשה

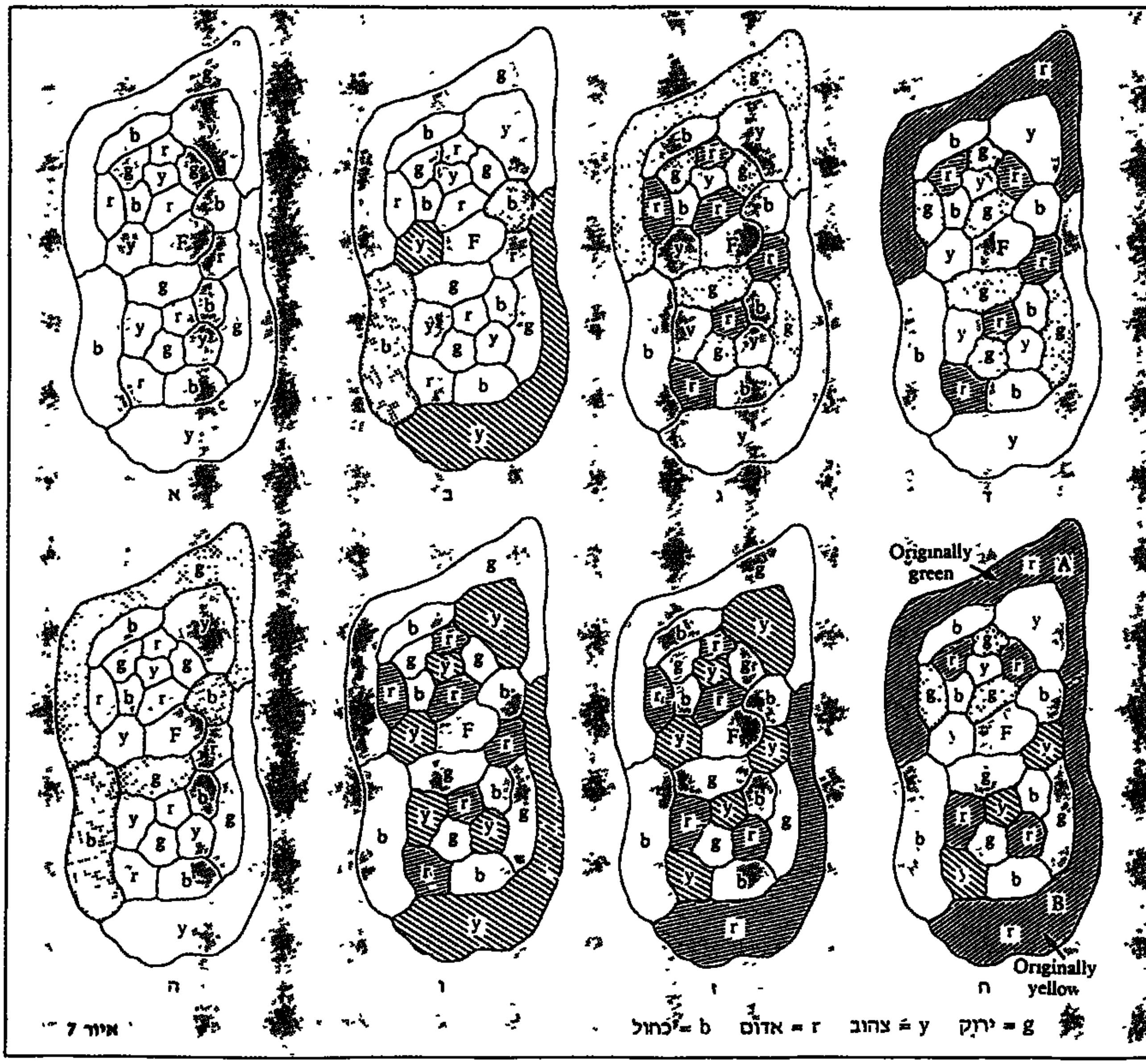
אם קיימת שרשרת של ארצות אדומות וירוקות המחברת את A עם C (איור 6ב), כי אז החלפת הצבעים אדום וירוק זה בזה לא תועיל אולם במקרה זה לא תתכן שרשרת של ארצות כחולות וצהובות המחברת את B עם D (שתי השרשראות אינן יכולות להצטלב כי אין להן צבע משותף), על כן, במקום לטפל בשרשרת הארצות האדומות והירוקות נחליף זה בזה את הצבעים בשרשרת הצהובה־כחולה המתחילה ב־B לאחר מכן נוכל לצבוע את המחומש בכחול ולהגיע לסתירה הרגילה שלנו

הטעות של קמפה

קל לראות על־ידי השוואה עם חלק א׳ של המאמר כי קמפה השתמש בשיטה דומה להוכחת משפט ארבעת הצבעים. כאשר נתונים ארבעה צבעים בלבד קל להוכיח את טענת המשפט במקרה שהמפה מכילה דו־צלע או משלוש וקמפה עשה זאת בצורה נכונה. בעזרת נימוק השרשרת של קמפה הוא אף הצליח להוכיח את המשפט כאשר המפה מכילה מרובע.

קמפה טעה בטיפול במחומש. על־ידי ניצול נימוק השרשרת של קמפה פעמיים הוא ביצע שני חילופים של צבעים. כל החלפה של צבע בנפרד היא נכונה אולם החלפת צבע כפולה בו־זמנית עשויה לגרום לשתי מדינות סמוכות שהיו קודם צבועות באופן שונה להצבע באותו הצבע — דבר שאסור לעשותו.

היווד הציג דוגמה שבה דבר זה אכן קורה (איור 7א). במפה זו כל ארץ פרט ל־F נצבעה באדום, כחול, צהוב או ירוק.



איור 7

שים לב

1 באיור 7ב הארץ הכחולה והארץ הצהובה הסמוכות ל־F מחוברות ביניהן על־ידי שרשרת כחולה־צהובה באופן שהארצות האדומות והירוקות שבחלק העליון של המפה מופרדות מהארצות האדומות והירוקות שבחלק התחתון של המפה (ראה איור 7ג') על־כן אפשר להחליף זה בזה את הצבעים אדום וירוק בחלק העליון מבלי להשפיע על החלק התחתון של המפה החלפה זו מובילה לאיור 7ד

2 אם נתבונן באיור 7ה שהוא המפה המקורית לפני החלפת הצבעים שב־7ד, נראה כי הארץ הכחולה והארץ הירוקה הסמוכות ל־F מחוברות זו לזו על־ידי שרשרת כחולה־ירוקה כך שהארצות הצהובות והאדומות שבחלק העליון של המפה מופרדות מאלה שבתחתית המפה (איור 7ו) על כן אפשר להחליף זה בזה את האדום והצהוב בתחתית המפה מבלי להשפיע על הארצות שהחלק העליון צביעה זו נותנת את המפה 7ז

החלפות הצבעים המתוארות ב־1 וב־2 מותרות בנפרד. אך לא באותה עת שגיאתו של קמפה נבעה מנסיונו לבצע את שתי ההחלפות בו־זמנית אם נחליף זה בזה את האדומים והירוקים בצורה המתוארת ב־1, ואת האדומים והצהובים כמתואר ב־2, נקבל כי הארץ הירוקה A והארץ הצהובה B תהפוכנה שתיהן לארצות אדומות — צביעה שאיננה מותרת לכן ההוכחה של קמפה שאפשרה את החלפות הצבע הבו־זמנית איננה נכונה

מ־1890 עד 1976

במשך השנים היתה התקדמות איטית בפתרון בעית ארבעת הצבעים כאשר גם מתמטיקאים בעלי שם הולכים שולל אחר הפשטות לכאורה של הבעיה (ראה מסגרת 1) היו חוקרים שניסו לבחון את התכונות של מפות שאינן ניתנות לצביעה בעזרת ארבעה צבעים ועל־ידי כך להוכיח שלא קיימת מפה כזו או לחילופין למצוא מספיק מגבלות כך שאפשר יהיה לשרטט מפה מסוג זה

מסגרת 1: כישלונו של מתמטיקאי מפורסם

הסיפור הבא הוא סיפור על החוקר הידוע בתורת המספרים הרמן מינקובסקי (Hermann Minkowski 1864-1909) (מקורו בספר C Reid, Hilbert/Courant, Springer 1989)

בעת הרצאה בטופולוגיה העלה מינקובסקי את הבעיה הידועה של ארבעת הצבעים והעיר בגאווה רבה "משפט זה טרם הוכח משום שרק מתמטיקאים מדרגה שלישית עוסקים בו, אני בטוח כי אוכל לפתור את הבעיה" והחל להדגים את הפתרון בו במקום עם סיום השעה הוא לא הצליח לסיים את ההוכחה והמשיך במשימה במשך הפגישות הבאות של הכתה כך עברו שבועות מספר לבסוף, בבוקר גשום אחד נכנס מינקובסקי לאולם ההרצאות כאשר רעם אדיר מלווה אותו הוא פנה אל תלמידיו בארשת פנים חמורה והכריז "השמים זועמים על גאוות ליבי, גם ההוכחה שלי לבעית ארבעת הצבעים איננה נכונה"

מיד המשיך את הרצאתו בטופולוגיה בדיוק באותו נושא שבו הפסיק מספר שבועות קודם לכן

המתמטיקאי האמריקאי פיליפ פרנקלין (Philip Franklin) הוכיח כי אם קיימת מפה שאיננה ניתנת לצביעה בעזרת ארבעה צבעים כי אז היא חייבת להכיל לפחות 26 ארצות על כן דוגמה נגדית למשפט ארבעת הצבעים חייבת להיות מאד מורכבת

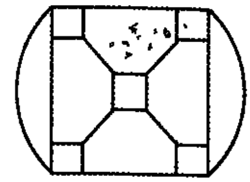
ההוכחה של המשפט ב־1976 נשענה על שני רעיונות משלימים שמקורם במאמר של קמפה משנת 1879 שני המושגים הבסיסיים, קבוצה בלתי נמנעת (unavoidable set) וצורה הניתנת לצמצום (reducible configuration), פותחו על־ידי מספר מתמטיקאים בין השנים 1890 ל־1976 נתבונן עתה בשתי הגישות ונראה כיצד הן הובילו לפתרון הבעיה נניח כי בכל המפות המתוארות לעיל נפגשות שלוש ארצות בדיוק בכל נקודת חיתוך ההצדקה להנחה זו הובאה בחלק א' של המאמר

במסגרת 2 מתוארת תוצאה שימושית המתקבלת בעזרת הנחה זו ונוסחת הפאונים של אוילר

מסגרת 2: נוסחת הפאונים של אוילר (ביקור חוזר)

בחלק א של המאמר ראינו כי אם במפה יש c ארצות (כולל איזור חיצוני), l קווי גבול, p נקודת פגישה של 3 ארצות, אזי $p + c - l = 2$

לדוגמה, במפה הבאה $p = 20$, $c = 12$, $l = 30$ ו־ $20 + 12 - 30 = 2$



יהי c_k מספר ארצות שלהן k קווי גבול (במפה שלפנינו $c_4 = 7$, $c_6 = 4$, $c_8 = 1$ וכל c_k האחרים שווים ל־0)

נספור את הארצות

$$c = c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + \dots$$

ונספור את קווי הגבול, מסביב לכל ארץ. נזכור כי כל קו גבול נספר פעמיים משום שהוא גבול בשתי ארצות, ולכן

$$2l = 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 + 6c_6 + 7c_7 + \dots$$

לבסוף, נספור את נקודות החיתוך מסביב לכל ארץ יש לשים לב, כי כל נקודה כזו נמצאת על גבול של שלוש ארצות ולכן נספרת שלוש פעמים נקבל,

$$3p = 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 + 6c_6 + 7c_7 + \dots$$

נבטא את p,c ו־l מתוך משוואות אלה ונציב את ערכיהם בנוסחת הפאונים של אוילר מקבלים

$$12 = 4c_2 + 3c_3 + 2c_4 + c_5 - c_7 - 2c_8 \dots$$

או

$$\sum_{k \geq 2} (6 - k)c_k = 12$$

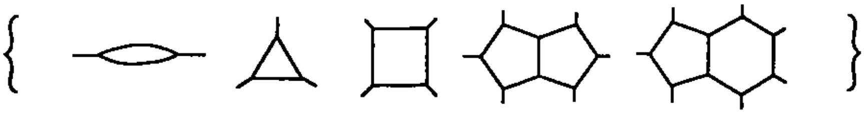
בדוק את נכונות הנוסחה במפה הנתונה

קבוצות בלתי נמנעות

בחלק הראשון של המאמר ראינו כיצד אפשר להשתמש בנוסחת הפאונים של אוילר כדי להוכיח שכל מפה, מסובכת ככל שתהיה, חייבת להכיל לפחות אחת מהצורות דו־צלע, משולש, מרובע או מחומש נאמר כי ארבע צורות אלה יוצרות **קבוצה בלתי נמנעת** (איור 8) משמעות שם זה היא שאם נתבונן במפה כלשהיא לא נוכל להמנע מלראות לפחות אחת מצורות אלה

איור 8

ב־1904 המתמטיקאי הגרמני ורניק (P Wernicke) מצא קבוצה בלתי נמנעת נוספת (ראה איור 9)



איור 9

מכאן נובע שכל מפה שאיננה מכילה דו־צלע משולש או מרובע חייבת להכיל שני מחומשים סמוכים או מחומש הצמוד למשושה במסגרת 3 אנו מסבירים מדוע צורות אלה יוצרות קבוצה בלתי נמנעת

מסגרת 3: הוכחה שקבוצה היא בלתי נמנעת.

טענה: **הקבוצה שלהלן היא קבוצה בלתי נמנעת**

הוכחה

נניח שקיימת מפה שאיננה מכילה אף אחת מצורות אלה, ונראה כי הנחה זו מובילה לסתירה מהנחה שלנו נבע שכל מחומש במפה חייב להיות סמוך למדינות אשר יש להן לפחות שבעה צדדים התאם לכל ארץ במפה מטען חשמלי באופן הבא אם לארץ יש k קווי גבול, נתאים לה את המטען $6 - k$ לפיכך

לכל מחומש ($k = 5$) יש מטען 1,

לכל משושה ($k = 6$) יש מטען 0,

לכל משובע ($k = 7$) יש מטען של -1,

וכך הלאה על פי התוצאה שהתקבלה במסגרת 2, המטען הכללי של מפה הוא 12 העבר 1/5 יחידת מטען מכל מחומש ל־5 הארצות השכנות לו שמטענן שלילי המטען הכללי נשאר 12 אולם

לכל מחומש יש מטען 0,

לכל משושה יש מטען 0,

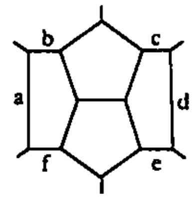
לכל משושה, מתומן יש עדיין מטען 0

(המשפט האחרון נכון כי המשובע יכול לקבל מטען חיובי רק אם יש לו לפחות 6 מחומשים שכנים — אבל אז שניים מהמחומשים יהיו סמוכים — מצב שאיננו אפשרי על פי ההנחה

טיעון דומה ניתן להפעיל על מתומנים ומצולעים בעלי מספר רב יותר של צלעות שלילי או אפס ולכן המצב עתה הוא כי לכל ארץ במפה יש מטען המטען הכללי איננו יכול להיות שווה ל־12 קיבלנו סתירה ולכן נסיק, כי הטענה נכונה

צורות הניתנות לצמצום

צורה **הניתנת לצמצום** היא סידור מסוים של ארצות שאיננו יכול להופיע בדוגמה נגדית מינימלית להוכחה של משפט ארבעת הצבעים בחלקו הראשון של המאמר ראינו, כי דו־צלע, משולש או מרובע הן צורות הניתנות לצימצום דוגמה נוספת לצורה כזו היא היהלום של בירקהוף (Birkhoff diamond) (איור 10) המתמטיקאי האמריקאי בירקהוף (G D. Birkhoff) היה הראשון שהחל לעסוק בצורות הניתנות לצימצום ב־1913 והוא הראה שיהלום זה ניתן לצמצום



איור 10

Percy Heawood *(1861–1955)*

איור 11

G.D. Birkhoff *(1884–1944)*

איור 12

את הגדרת הצורה הניתנת לצמצום ניתן לנסח גם באופן אחר זוהי צורה שאם נוציאה מהמפה ונצבע את אשר נשאר בארבעה צבעים, כי אז נוכל להרחיב את הצביעה (באופן ישיר או על־ידי נימוקי שרשרת של קמפה) לכל המפה כולה במסגרת 4 אנו משתמשים בתאור זה כדי להראות מדוע היהלום של בירקוף ניתן לצמצום

כדי להוכיח את משפט ארבעת הצבעים די למצוא קבוצה בלתי נמנעת המכילה רק צורות הניתנות לצמצום. היות שהקבוצה היא בלתי נמנעת, כל המפות חייבות להכיל לפחות אחת מהצורות שבה, אך מכיוון שכל הצורות בקבוצה ניתנות לצמצום, אף אחת מהן איננה יכולה להופיע בדוגמה נגדית מינימלית מכאן נובע שלא קיימת דוגמה נגדית למשפט ארבעת הצבעים ועל כן המשפט הוכח

כניסתו של המחשב

עד תחילת שנות השבעים כבר היו מוכרות צורות ניתנות לצמצום רבות וכן גם שיטות לבניית קבוצות בלתי נמנעות אולם, עדיין לא הצליחו למצוא קבוצה בלתי נמנעת שהיא גם ניתנת לצמצום בעזרת נימוקים הסתברותיים הראו כי אכן קיימות קבוצות כאלה, אך הן עשויות להכיל אלפי צורות, מעבר ליכולת הטיפול של המחשב המשוכלל ביותר באותו זמן

הבעיה בת ה־124 שנים נפתרה כאשר שני מתמטיקאים מאוניברסיטת אילינוי שבארה״ב, קֶנֶת אפל (Kenneth Appel) וולפגנג הקן (Wolfgang Haken) (איור 13), בנו קבוצה בלתי נמנעת שבה כמעט 2,000 צורות (ולאחר מכן אף הצליחו להקטינה ל־1,500 צורות) שיטות הפתרון שלהם מבוססות על העקרונות המתוארים במסגרת 3 ו־4 אולם הפרטים הטכניים של ההוכחה מאד מורכבים ומסובכים ונשענים על שימוש מסיבי במחשב בפרט, בבעיית פיתוח שיטות לחזות יחידות מטען במפה (ראה מסגרת 3), הם נעזרו בכמות רבה של נסוי וטעיה, המלווים בנסיון ובתובנה, עד שלבסוף הצליחו ליצור תהליך שיטתי שאפשר לבצעו גם באופן ידני ללא המחשב את הצורות שהתקבלו

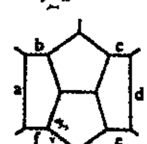
בדקו בעזרת המחשב אם הן ניתנות לצמצום (מסגרת 4) את הצורות שאי־אפשר היה להוכיח בקלות שהן ניתנות לצימצום החליפו באחרות עד אשר התקבלה לבסוף קבוצה בלתי נמנעת של צורות הניתנות לצמצום אין להתפלא שתהליך זה נמשך כ־1,200 שעות מחשב

למעשה הצליחו אפל והקן לבנות אלפי קבוצות בלתי נמנעות של צורות הניתנות לצמצום ועל־ידי כך יצרו אלפי הוכחות למשפט ארבעת הצבעים

איור 13 **Kenneth Appel and Wolfgang Haken**

מסגרת 4: הוכחה שקבוצה ניתנת לצמצום

טענה:

היהלום של בירקהוף 

היא צורה ניתנת לצמצום.

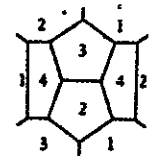
סקירה של ההוכחה

אם נסלק צורה זו מהמפה נקבל מפה עם פחות ארצות נניח כי המפה המתקבלת ניתנת לצביעה בארבעה צבעים. היכולה כל צביעה כזאת להיות מורחבת ליהלום?

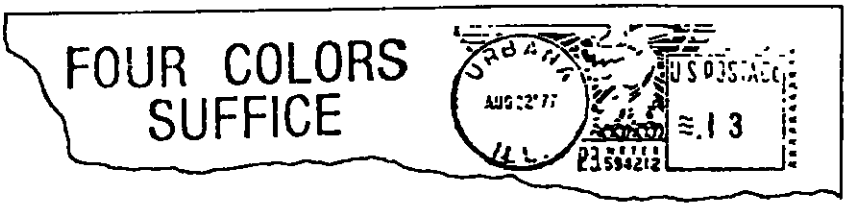
כדי לענות על שאלה זו נרשום את כל האפשרויות הבסיסיות השונות לצביעה של שש ארצות a עד f:

abcdef	121323✓	123142✓	123243
121212	121324	123143	123412✓
121213✓	121342✓	123212✓	123413
121232✓	121343✓	123213✓	123414
121234	123123	123214	123423
121312	123124	123323	123424
121313✓	123132✓	123234✓	123432✓
121314	123134✓	123242	123434✓

שש־עשרה מאפשרויות צביעה אלה (המסומנות על־ידי ✓) ניתנות להרחבה מיידית ליהלום למשל הצביעה 121213 ניתנת להרחבה כדלקמן:



יתר אפשרויות הצביעה גם הן ניתנות להרחבה ליהלום על־ידי נימוקי השרשרת של קמפה או על־ידי בצוע התאמות למפה על־כן, כל דגמי הצביעה ניתנים להרחבה ליהלום ולכן היהלום של בירקהוף הוא צורה הניתנת לציצמוס



איור 14

נמצאו בהוכחה שגיאות לא משמעותיות אשר תוקנו ותוכניות המחשב שופרו לעין ערוך כיום אפשר להוכיח את המשפט בעזרת המחשב במשך מספר שעות בלבד

הישגם של אפל והקן הוא נכבד בתחילה, מתמטיקאים רבים לא היו מרוצים מהוכחה המבוססת על מחשב אך ככל שפרטי ההוכחה ושלביה נעשו ברורים יותר, כן התקבלה ההוכחה על־ידי הקהילה המתמטית פתרון בעית ארבעת הצבעים הונצח על־ידי חותמת דואר מיוחדת באורבנה, אילינוי (איור 14)