הבה נפתור

אסטרטגיות לפיתרון בעיות מתמטיות[1]

מאת **בנו ארבל**, אוניברסיטת תל־אביב

I do believe that problems are the heart of mathematics
Paul R Halmos

המתמטיקאי והמחנך הדגול ג׳ פויה (G. Polya, 1887-1985) כותב, כי "אנו עומדים בפני בעיה אם למען השגת מטרה מסוימת קיים צורך בחיפוש הכרתי אחר תהליך שיביא להשגת אותה מטרה"

אם נעיין ב־Oxford English Dictionary נמצא

> "Problem a doubtful or difficult question; a matter of inquiry, discussion or thought, a question that exercises the mind"

אם ננתח היטב את דבריו של פויה הרי אין הם שונים מאלה המובאים במילון

אפשר לומר כי תהליך פתרון בעיות הוא עניין של בחירה הולמת בחירה זו היא עניין מורכב, ויש צורך להכיר היטב את הגורמים המשחקים תפקיד בתהליך זה נסקור עתה בקצרה את הגורמים הללו

- **פתרון בעיות הוא תהליך שכלי מורכב**, שבו יש צורך לחזות, לדמיין, לטפל, לנתח ולצרף רעיונות אין זה מפליא כי רכישת היכולת לפתרון בעיות קשורה באימון רב, במוטיבציה גבוהה, ביכולת ריכוז, בזמן ממושך ובזיכרון טוב
- **פתרון בעיות דורש תשובות חדשות ומקוריות.** בפתרון בעיות דרושים גמישות, יצירתיות, דמיון ויכולת סריקה
- **פתרון בעיות דורש בסיס רחב של ידיעות** הכוללות מושגים, עובדות ומבנים יש צורך לדלות, באמצעות סריקה מהירה, רעיונות וקשרים החשובים לבעיה הנדונה רק אם ישכיל פותר הבעיה לבחור מבנה המתאר את המצב הנכון בבעיה במונחים הולמים, יוכל להגיע לפתרון
- **פתרון בעיות דורש הבנה מעמיקה של החומר**, וכן יכולת ניתוח שתאפשר לשייך את הבעיה לקטגוריה מתאימה
- **פתרון בעיות דורש מוטיבציה וסקרנות.** המוטיבציה דרושה כדי להקדיש זמן לבעיה, הסקרנות — כדי להמשיך לעסוק בה המוטיבציה צריכה לנבוע מחשיבותו של נושא פתרון הבעיות, ואילו הסקרנות — מהאתגר שיכולה הבעיה להעמיד בפני הפותר

אם כן, מה פירושו **לפתור בעיה?** לפתור בעיה פירושו למצוא סדרה של צעדים, החל מהמצב הנתון בבעיה ועד למטרה המיוחלת, **כך שכל צעד מתקבל מקודמו באמצעות פעולה לוגית** המותרת בעולם הבעיה הנתונה

פתרון בעיות קשור בחיפוש אחר שיטה, רעיון, צעדים, דרך כדי להפוך חיפוש זה ממקרי לשיטתי חייבים להכיר **אסטרטגיות לפתרון בעיות**

פויה החייה את האסטרטגיות ההאוריסטיות לפתרון בעיות (לראשונה בספרו **How to solve it** שהופיע ב־1945) המונח האוריסטיקה (מיוונית), שפירושו גילוי, מופיע לראשונה אצל המתמטיקאי פאפוס מאלכסנדריה (בן המחצית הראשונה של המאה הרביעית) בכרך השביעי של **האנטולוגיה המתמטית** שלו השיטה ההאוריסטית היא תהליך לפתרון בעיות, הכולל

א פיתוח רעיון או תפיסה לגבי הגישה המתאימה לבעיה
ב שימוש בגישה זו לחיפוש אחר פתרון
ג המשך פיתוח רעיונות חדשים לאור זרימת הגילויים ופירוש הנתונים

אסטרטגיות האוריסטיות הן בבחינת המלצות כלליות או מיוחדות, המאפשרות הבנה טובה יותר של הבעיה והתקדמות לקראת פתרונה
אסטרטגיה אינה שיטה. היא נועדה לשפר את יעילותו של **תהליך החיפוש** אחר פתרונות

בספריו עוסק פויה בעיקר באסטרטגיות כלליות פרסום רעיונותיו שימש מקור השראה לאחרים, שאף הם החלו לעסוק בנושא בכתיבת הספר **אסטרטגיות לפתרון בעיות** הובאו בחשבון מאפייניו של תהליך פתרון בעיות כפי שהוזכרו דלעיל בספר מובאות אסטרטגיות שונות, חלקן כלליות וחלקן מיוחדות, המודגמות באמצעות 800 בעיות פתורות במלואן

[1] ספר בשם זה יצא לאור בספטמבר 1990, בהוצאת האוניברסיטה הפתוחה ובהשתתפות בית־הספר למתמטיקה של אוניברסיטת תל־אביב

מבין אלה נדגים מספר קטן של אסטרטגיות באמצעות בעיות המופיעות בספר

1. **ניתוח הבעיה. היקשים.**

הבנה מלאה של הבעיה היא השלב הראשון בדרך לפתרונה היא מורכבת מהבנת כל **מרכיבי** הבעיה — **הנתונים**, **המטרה** וכן **הקשרים בין הנתונים והמטרה**. היקשים "מבריקים" הנובעים מניתוח מרכיביה השונים של הבעיה, מובילים לעיתים לפתרונה נדגים דברים אלה באמצעות שתי בעיות

1.1 אלו מצולעים משוכללים אפשר לחסום באליפסה?

פתרון

נשים לב כי **הנתון** כאן הוא אליפסה ואילו **המטרה** היא לגלות אלו מצולעים משוכללים אפשר לחסום באליפסה **הפעולה** המקשרת בין הנתון (אליפסה) למצולעים המשוכללים היא פעולת **החסימה**

אליפסה היא צורה מוכרת (אם כי יתכן שבהמשך נצטרך לסקור תכונות מיוחדות שלה) אולם כיצד חוסמים בה מצולעים משוכללים? מה מאפיין מצולע משוכלל?

ברור שהמאפיין הראשון הוא שוויון הצלעות ושוויון הזוויות האם קיים מאפיין בולט נוסף של מצולע משוכלל הקשור בפעולת החסימה? אמנם כן העובדה שניתן לחסום אותו במעגל ומכאן הבעיה פתורה, שהרי מעגל ואליפסה יכולים להיחתך ב־4 נקודות לכל היותר, ומשום כך, אם אפשר לחסום מצולעים משוכללים באליפסה, הרי אלה הם משולש שווה צלעות או ריבוע ואמנם, אפשר לראות באופן מיידי את החסימה — הן של המשולש שווה הצלעות, והן של הריבוע

1.2 מספר שלם חיובי בנוי מספרות 6 ומאפסים. האם הוא יכול להיות ריבוע שלם? (מדובר בהצגה עשרונית)

פתרון

כאן המטרה ברורה נתח, אם כן, את הנתון זהו מספר שלם הבנוי מספרות 6 ומאפסים, שלא נאמר מהו מספר ספרותיו מובן מאליו כי המספר חייב להתחיל ב־6, אך הסיומת יכולה להיות 0 או 6 אם הספירה האחרונה 0, ואם המספר הוא ריבוע שלם — כלומר $n = m^2$ — אז גם m חייב להסתיים ב־0, ועל כן n חייב להסתיים במספר זוגי של אפסים, ולכן, אם משמיטים אפסים אלה חייב גם המספר הנותר להיות ריבוע שלם מכאן שמדובר במספר הבנוי מספרות 6 ו־0, והמתחיל ומסתיים ב־6

לא נותר אלא להתיחס לשתי הספרות האחרונות, שיכולות להיות 66 או 06 מהי התכונה הבולטת של מספר כזה? העובדה שהוא זוגי, כלומר מתחלק ב־2 אולם אם $n = m^2$ מתחלק ב־2, אז גם m מתחלק ב־2, ואז $n = m^2$ מתחלק ב־4 — דבר שלא יתכן, כיוון ש 06 ו־66 אינם מתחלקים ב־4 מכאן שמספר הבנוי מספרות 6 ואפס אינו יכול להיות ריבוע שלם

הערה: בספר אלגברה (לכיתה יא) נמצא תרגיל שבו מתבקשים לפתור את המשוואה

$$\sqrt{x} + \sqrt{x + a - b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

הדרך לפתרון הבעיה ברורה לכאורה העלאה בריבוע אולם אם לא ננתח את המשוואה אנו עלולים להסתבך לעומת זאת, אם נשים לב של־a ול־b אין כאן תפקידים סימטריים, יקל עלינו לבדוק מהי הצורה הנוחה להעלאה בריבוע כמו כן רצוי לחשוב (או לחשב בעל פה) מה צפוי לאחר ההעלאה הצורה שמביאה לפתרון מהיר של הבעיה היא

$$\sqrt{x + a - b} - \sqrt{b} = \sqrt{a} - \sqrt{x}$$

וכך יהיו הביטולים רבים ככל האפשר במקרה זה יתבטלו x, a וגם b

2. **בדיקת מקרים פרטיים**

בדיקת מקרים פרטיים היא האסטרטגיה הטבעית ביותר לפתרון בעיות כדי שבדיקה מעין זו תוכל לעזור לנו, עלינו להשכיל ולבדוק מקרים מאפיינים שיכולים לרמוז על הדרך לפתרון יתר על כן, עלינו ללמוד כיצד לקרוא את תוצאות הבדיקות של המקרים הפרטיים

2.1 תהי נתונה הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad x > 1 \quad .$$

הוכח כי הנגזרות מסדר אי־זוגי חיוביות והנגזרות מסדר זוגי שליליות.

פתרון

עלינו להוכיח כי $f^{(n)}(x) > 0$ אם n אי־זוגי ו־$f^{(n)}(x) < 0$ אם n זוגי, לכל n ברור כי רצוי היה להגיע לביטוי שהוא נגזרת מסדר n, ואז לבחון את המקרה הזוגי ואת המקרה האי־זוגי ננסה, אם כן, ונתחיל לגזור

$$f'(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^{1/2}} > 0$$

ו

$$f''(x) = \frac{-1}{(x^2 - 1)^{3/2}} < 0$$

ונמשיך

$$f'''(x) = \frac{3x}{(x^2 - 1)^{5/2}}$$

$$f^{iv}(x) = -\frac{12x^2 + 1}{(x^2 - 1)^{7/2}}$$

$$f^{v}(x) = \frac{60x^3 + 31x}{(x^2 - 1)^{9/2}}$$

$$f^{vi}(x) = \frac{-(522x^4 + 226x^2 + 31)}{(x^2 - 1)^{11/2}}$$

אך הנסיון לשער את $f^{(n)}(x)$ ולהוכיח את ההשערה באינדוקציה לא יזכה להצלחה — צורת המונה קשה לפיצוח, אם לא בלתי אפשרית. על כן עלינו לבדוק את המקרים הללו ולחפש מאפיינים שיכולים להוביל לפתרון, ושאינם קשורים למציאת הנוסחה לנגזרת ה־n־ית

המכנה, כאמור, אינו מהווה בעיה על כן עלינו להתרכז במונה מתברר כי עבור הנגזרות הזוגיות המונים הם פולינומים עם מקדמים שליליים ממעלה $n - 2$ (של חזקות זוגיות בלבד), ואילו עבור הנגזרות האי־זוגיות המונים הם פולינומים עם מקדמים חיוביים ממעלה $n - 2$ (של חזקות אי־זוגיות בלבד) אם נצליח להוכיח השערות אלה, תסתיים ההוכחה כיוון שאת הבדיקה (בדיקות) כבר ביצענו, נניח כי הטענה נכונה עבור $n = 2i - 1$, ונוכיח אותה עבור $n + 1 = 2i$

יהי
$$f^{(n)} = \frac{p(x)}{(x^2 - 1)^{(2n - 1)/2}}$$

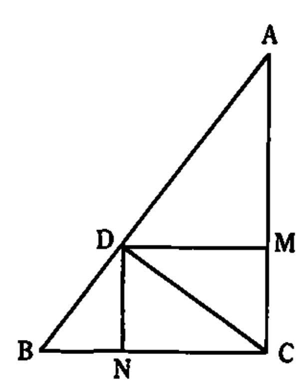
כאשר $p(x)$ פולינום בחזקות אי־זוגיות עם מקדמים חיוביים ממעלה $n - 2$

אז
$$f^{(n+1)}(x) = \frac{p'(x)(x^2 - 1) - p(x)(2n - 1)x}{(x^2 - 1)^{(2n + 1)/2}}$$

כעת ל־ $p'(x)(x^2 - 1)$ חזקות זוגיות — כי הרי ל־$p'(x)$ חזקות זוגיות, והכפל ב־ $x^2 - 1$ ממשיך לשמור על זוגיות החזקות גם החזקות של $(2n - 1)p(x)x$ זוגיות, זהות לאלה של $p'(x)(x^2 - 1)$ אם a הוא המקדם של x^k ב־$p(x)$, הרי ב־ $p'(x)(x^2 - 1)$ המקדם של x^{k+1} לא יעלה על na, ואילו ב־ $(2n - 1)p(x)x$ המקדם של x^{k+1} יהיה $(2n - 1)a$ על כן, אם $n \geq 3$, המקדמים של $p'(x)(x^2 - 1) - p(x)(2n - 1)x$ יהיו שליליים לכן $f^{(n+1)}(x)$ שלילי

באותו אופן נוהגים במעבר מהמקרה הזוגי לאי־זוגי

2.2 נתון משולש ABC. חסום בתוכו מלבן בעל אלכסון מינימלי. (חסימה, פירושה שניים מקודקדי המלבן על אחת מצלעות המשולש ושניים אחרים על שתי הצלעות האחרות של המשולש).

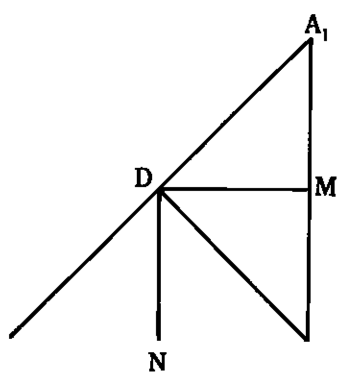


פתרון

אם אין רואים את הפתרון, או אפילו גישה לפתרון, כדאי לחשוב על מקרים פרטיים באיזה משולש קל לחסום מלבןִ המענה ברור במשולש ישר זווית מתי יהיה למלבן NDM אלכסון מינימליִ כיוון שאלכסון זה מחבר קודקוד של משולש עם נקודה על הצלע ממול, התשובה מיידית כאשר CD מאונך ליתר

מצאנו את הדרך לפתרון הבעיה במקרה של משולש ישר זווית.

איך לנצל מקרה פרטי זה במשולש כלליִ ננסה "להפוך" אותו למשולש ישר זווית הכוונה היא, למצוא משולש ישר זווית הקרוב ביותר מבחינת תכונותיו למשולש הנתון אם ABC הוא המשולש הנתון, נעלה מ־C אנך ל־BC, הוא A_1C, השווה בגובהו לגובה המשולש ABC נבנה את BA_1, ונקבל משולש A_1BC — שהוא בעל בסיס BC המשותף עם ABC ובעל גובה A_1C השווה לזה של ABC, ועל כן בעל שטח השווה לזה של המשולש ABC. חסימת המלבן בעל האלכסון המינימלי ב־A_1BC מיידית. מ־C מעבירים גובה קובעים את הנקודה D וכך DMCN מלבן כנדרש וב־A_1BC



כעת אם נמשיך את MD עד למפגש Q עם AB, נקבל שני זוגות של משולשים דומים ΔA_1DM ו־ΔA_1BC, ו־ΔAQP ו־ΔABC כיוון ש־A_1M ו־A_1C הם גם הגבהים של המשולשים AQP ו־ABC בהתאמה, הרי נובע כי $QP = DM$, אולם תוצאה זו תלויה רק בעובדה ש־QM מקביל ל־BC על כן לכל מלבן ב־ΔA_1BC מתאים מלבן חופף ב־ΔABC כיוון ש־DMCN הינו המלבן המבוקש ב־ΔA_1BC, המלבן QPSR החסום ב־ΔABC הינו בעל אלכסון מינימלי

הערה

אם ננסה לפתור את הבעייה כבעיית מינימום, ניווכח מיד כי פונקציה מסובכת זו המאפשרת לחשב את אורך האלכסון, תלויה רק ב־BC ובגובה המשולש מכאן אפשר לקבל השראה לגבי פתרונה, לאו דוקא בצורה אנליטית — אלא בצורה שהובאה דלעיל. פויה מציין, כי כדי לפתור בעיה מותר — ונוסיף כי גם מוטב — לנחש, ואף לנסות כל דרך אחרת שתניב רעיון המוביל לפתרון

3. רעיון הפירוק

שאלה ידועה בבית הספר היסודי, לאחר הוראת פעולות החשבון בשברים פשוטים, היא מציאת שני מספרים שמכפלתם שווה להפרש זוגות מעין אלה הם $(1, 1/2)$, $(1/2, 1/3)$, $(1/3, 1/4)$, וכו' למעשה אפשר לבקש לחשב את הסכום

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{9900}$$

ולשים לב כי מדובר ב־

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$$

שאפשר לכותבו בצורה

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$

$$=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$$

הרעיון שמסתתר מאחורי הפירוק

$$\frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$$

הוא הרבה יותר עמוק ממה שניתן לחשוב למעשה, כל מספר ניתן לרישום בצורה

$$r=\frac{r(r+1)}{2}-\frac{(r-1)r}{2}$$

וכמו כן

$$r(r+1)=\frac{r(r+1)(r+2)}{3}-\frac{(r-1)r(r+1)}{3}$$

ואפילו באופן כללי

$$r(r+1)(r+2)\cdots(r+k)=$$

$$\frac{r(r+1)(r+2)\cdots(r+k+1)}{k+2}-$$

$$-\frac{(r-1)(r)(r+1)\cdots(r+k)}{k+2}$$

ועוד אין זה הכל

$$m\cdot m!=(m+1)!-m!$$

$$\frac{m}{(m+1)!}=\frac{1}{m!}-\frac{1}{(m+1)!}$$

כמו כן קיימים פירוקים קומבינטוריים הפירוקים הללו מאפשרים לחשב סכומים מסוימים בקלות רבה ורעיון הפירוק יכול להפוך לאסטרטגיית חיפוש בחישוב סכומים רעיון זה יעיל לעיתים למקרים שקשה אפילו להעלותם על הדעת, ועל כן רצוי להביא זאת בחשבון כאסטרטגית חפוש

3.1 חשב את הסכום

$$\left[\frac{m+1}{2}\right]+\left[\frac{m+2}{2^2}\right]+\cdots+\left[\frac{m+2^k}{2^{k+1}}\right]+\cdots$$

כאשר $[x]$ מציין את הערך השלם של המספר הממשי x

פתרון:

נרשום את הסכום בצורה

$$\left[\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{m}{2^2}+\frac{1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{m}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]+\cdots$$

כעת, לכל x ממשי אפשר לראות כי

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$$

ואז

$$\left[\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{m}{2^2}+\frac{1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{m}{2^k}+\frac{1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{m}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]+\cdots=$$

$$=[m]-\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{m}{2}\right]-\left[\frac{m}{4}\right]+\left[\frac{m}{2^k}\right]-\left[\frac{m}{2^{k+1}}\right]+\cdots=[m]=m$$

הערה: נשים לב כי הסכום הנתון לחישוב הוא סופי, כי הרי עבור $k>\log_2 m$

$$\left[\frac{m}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]=0$$

3.2 חשב את הסכום

$$s=\tan d+\frac{1}{2}\tan\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\tan\frac{\alpha}{2^{n-1}}$$

פתרון

כאשר ניגשים לחישוב סכום מעין זה וחושבים על רעיון הפירוק, הרי יש צורך למצוא נוסחה שתביע את אברי הסכום כהפרשים של ביטויים "עוקבים"

נשים לב, כי מחוברים עוקבים בסכום דלעיל הם מהצורה $\tan x$ ו־$\tan 2x$ נוסחה המקשרת ביניהם היא כידוע

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

אולם אין צורה זו מובילה להפרשים, ולכן, כדאי להתבונן "בהיפוך" (ראה סעיף 4 במאמר זה) נוכל לרשום

$$\text{cotan}\,2x=\frac{1}{2}(\text{cotan}\,x-\tan x)$$

או $2\cotan 2x = \cotan x - \tan x$

ואז $\tan\alpha = \cotan\alpha - 2\cotan 2\alpha$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \cotan\frac{\alpha}{2} - 2\cotan\alpha$$

$$\tan\frac{\alpha}{2^2} = \cotan\frac{\alpha}{2^2} - 2\cotan\frac{\alpha}{2}$$

נכפיל את השוויון הראשון ב-1, השני ב-1/2, השלישי ב- $1/2^2$ וכו׳ ונחבר נקבל

$$s = \frac{1}{2^{n-1}}\cotan\frac{\alpha}{2^{n-1}} - 2\cotan 2\alpha$$

3.3 חשב את הסכום

$$T = 1\ 1! + 2\ 2! + 3\ 3! + \ \ + m\ m!$$

פתרון

אם מעלים על הדעת את רעיון הפירוק אפשר להגיע בקלות יחסית לנוסחה שתפתור את הבעיה אם נתבונן ב- $m\ m!$, הרי ברור כי בנוסחת הפירוק צריכה להופיע עצרת על כן אפשר להתחיל ב $m\ m! = (m+1)! - a$ (חייבים להתחיל ב-$(m+1)!$ לפחות כי באגף שמאל מופיע $(m \cdot m!)$

מכאן נקבל בקלות את הפירוק $m\ m! = (m+1)! - m!$

שיוביל לחישוב הסכום $T = (m+1)! - 1$

4. התבוננות בהיפוך והחלפת תפקידים.

כבר ראינו בסעיף הקודם, בפתרון בעיה 3 2, כי לפעמים כדאי להתבונן בהיפוכים של הביטויים הנידונים כמו כן, בביטויים שמופיעים בהם משתנים ופרמטרים כדאי להחליף את התפקידים בין הפרמטרים והמשתנים — ולפעמים אף להחליף את תפקידי המשתנים עצמם נביא דוגמאות להבהרת הדברים האמורים לעיל

4.1 מצא, ללא שימוש במושג הנגזרת, את הערכים המינימליים והמקסימליים של הפונקציה:

$f(x) = \sqrt{100 + x^2} - x$, $x \geq 0$

פתרון

כיוון ש- $f(x) > 0$ ניתן להתבונן ב-

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{100+x^2}-x} = \frac{\sqrt{100+x^2}+x}{100}$$

ואז ברור כי אם $x = 0$, ל-$g(x)$ יש מינימום, ואילו מכסימום אין לה על כן לפונקציה $f(x)$ יש מכסימום עבור $x = 0$ וערכו 10, ואילו מינימום אין לה

4.2 איזה מספר גדול יותר

$A = \frac{10^{1986}+1}{10^{1987}+1}$ או $B = \frac{10^{1987}+1}{10^{1988}+1}$,

פתרון

נתבונן ב-$1/A$ ו-$1/B$

$$\frac{1}{A} = \frac{10(10^{1986}+1)-9}{10^{1986}+1} = 10 - \frac{9}{10^{1986}+1}$$

$$\frac{1}{B} = \frac{10(10^{1987}+1)-9}{10^{1987}+1} = 10 - \frac{9}{10^{1987}+1}$$

כיוון ש $\frac{1}{A} < \frac{1}{B}$ הרי $A > B$

4.3 פתור את המשוואה (מצא את x) $\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x$

פתרון:

הרעיון המיידי הוא להעלות בריבוע, פעולה שמובילה למשוואה ממעלה 4 ב-x

כעת נחליף את התפקידים של x ושל a המשוואה הופכת להיות $a^2 - (2x^2+1)a + x^4 - x = 0$

שפתרונותיה

$$a = \frac{(2x^2+1) \pm \sqrt{4x^4+4x^2+1-4x^4+4x}}{2} =$$

$$= \frac{2x^2+1 \pm (2x+1)}{2} = \begin{cases} x^2+x+1 \\ x^2-x \end{cases}$$

ואז יש לפתור את המשוואות $x^2+x+1-a=0$ ו- $x^2-x-a=0$

שפתרונותיהן $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \left(a - \frac{3}{4}\right)^{1/2}$

ו $x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \left(a + \frac{1}{4}\right)^{1/2}$

5. חישוב או מניה בשני אופנים או יותר

בבעיות לא מעטות קיימת אפשרות לחשב אותו גודל בשני אופנים ואפילו יותר עובדה זו יכולה להוביל למציאת נוסחאות "חדשות" או להוכחת נוסחאות קיימות בבעיות קומבינטוריות המניה הכפולה חשובה ביותר, אולם חישוב בשני אופנים אינו אופייני רק לבעיות כאלה

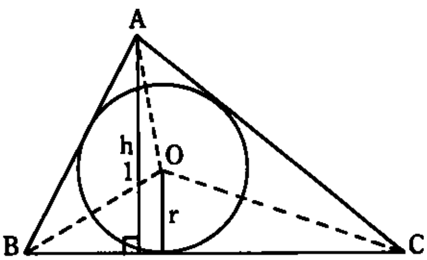
שימוש ידוע בחישוב בשני אופנים הוא לקבלת משפט פיתאגורס המוכלל, כאשר מחשבים גובה במשולש המתאים ב"שני

אופנים" — ליתר דיוק, בשני משולשים נביא עתה דוגמאות

5.1 הוכח כי אם h_1, h_2 ו־h_3 מציינים את הגבהים במשולש ABC ואם r הוא רדיוס המעגל החסום במשולש, אז:

פתרון

אם נחשב את שטח המשולש ABC במספר אופנים נגיע לנוסחה הנדרשת



$$S_{ABC} = \frac{BC\ h_1}{2} = \frac{AC\ h_2}{2} = \frac{AB\ h_3}{2} = \frac{BC\ r}{2} + \frac{AC\ r}{2} + \frac{AB\ r}{2}$$

ואז

$$2S_{ABC} = BC \cdot h_1 = AC\ \ h_2 = AB\ \ h_3 = (BC + AC + AB)\ r$$

וכאן

$$\frac{1}{h_1} = \frac{BC}{2S},\ \frac{1}{h_2} = \frac{AC}{2S},\ \frac{1}{h_3} = \frac{AB}{2S}$$

ו־

$$\frac{1}{r} = \frac{BC+AC+AB}{2S}$$

אם נחבר

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{BC+AC+AB}{2S} = \frac{1}{r}$$

5.2 הוכח כי לכל a, b, m שלמים חיוביים

$$\binom{a+b}{m} = \binom{a}{0}\binom{b}{m} + \binom{a}{1}\binom{b}{m-1} + \quad + \binom{a}{m}\binom{b}{0}$$

פתרון

נתבונן בתיבה שבה a כדורים אדומים ו־b כדורים כחולים עלינו לבחור מתוכה m כדורים מספר האופנים $\binom{a+b}{m}$

הוא האגף השמאלי של אי־השוויון הנדרש

אנו יכולים למנות את מספר הבחירות האפשריות של m כדורים מתוך a+b אם נביא בחשבון את צבע הכדורים שנבחרו (במניה הראשונה לא התחשבנו בצבע הכדורים) האפשרויות שבאות בחשבון הן 0 כדורים אדומים ו־m כחולים, כדור אחד אדום ו־(m - 1) כחולים, וכו' בצורה כללית, i כדורים אדומים ו־m - i כדורים כחולים

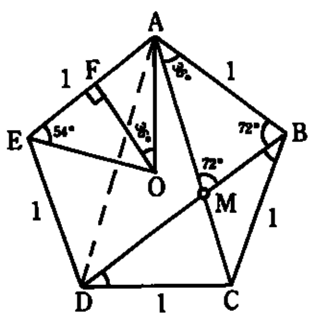
אולם מספר האפשרויות לבחור i אדומים ו־m - i כדורים כחולים הוא

$$\binom{a}{i}\binom{b}{m-i}$$

אם נחבר את כל האפשרויות נקבל את הנוסחה הדרושה

בפתח הסעיף ציינו כי חישוב בשני אופנים יכול להביא למציאת נוסחאות "חדשות" שקשה מאוד להוכיחן בדרך אחרת נדגים זאת

נתבונן במחומש משוכלל ABCDE שוב, נחשב את שטחו בשני אופנים ללא הגבלת הכלליות ניתן להניח כי צלע המחומש היא יחידת אורך אחת



נשים לב, כי EAMD (ראה תרשים) מקבילית יתר על כן, המשולש AMB שווה שוקיים על כן, שטח המחומש

$$S_{ABCDE} = 3\ \frac{1\ 1}{2}\ \sin 108° + \frac{1\ 1}{2}\ \sin 36° = \frac{3\sin 72° + \sin 36°}{2}$$

אולם אפשר לחשב את שטח המחומש גם על ידי חישוב שטח המשולש OEA

ואמנם

$$\cot an\ 36° = \frac{OF}{\frac{1}{2}} = 2\ \ OF$$

ואז

$$S_{OEA} = \frac{1\ \cot an\ 36°}{4}$$

ואילו שטח המחומש

$$S_{ABCDE} = \frac{5}{4} \cot an\ 36°$$

אם נשווה נקבל

$$3\sin 72° + \sin 36° = \frac{5}{2}\mathrm{cotan}\ 36°$$

או $$6\sin 72° + 2\sin 36° = 5\mathrm{cotan}\ 36°$$

נוסחה שאפשר להציע לתלמידים להוכחה

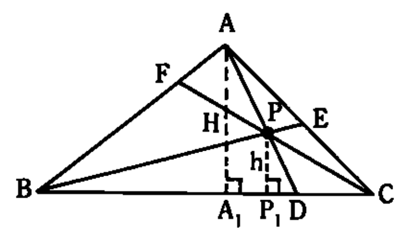
6. מושג השטח ופתרון בעיות

מושג השטח הוא בעל חשיבות עליונה במתמטיקה מבחינה אינטואטיבית הוא נקלט בקלות ומתברר כי ניתן לנצלו הן להוכחת משפטים גיאומטרים והן לפתרון בעיות בסעיף הקודם ראינו כבר את השימוש במושג השטח כהנחייה כללית בפתרון שתי בעיות. אפשר לומר כי מושג זה יכול לעזור בפתרון בעיות, שבהן מתבקשים להוכיח קשרים (שוויונים או אפילו אי־שוויונים) בין גדלים במשולש או במצולע הנדון. נביא עוד דוגמאות

6.1 תהי P נקודה בתוך המשולש ABC. תהיינה D, E, ו־F נקודות המפגש של AP, BP ו־CP עם הצלעות BC, CA ו־AB בהתאמה.

הוכח ש:

$$\frac{AP}{PD}+\frac{BP}{PE}+\frac{CP}{PF}\geq 6$$



פתרון

נסמן ב־S_1, S_2 ו־S_3 את שטחיהם של המשולשים PBC, PCA ו־PAB בהתאמה נסמן ב־h ו־H את גובהי המשולשים PBC ו־ABC (לצלע BC) בהתאמה

מדמיון המשולשים AA_1D ו־PP_1D נובע $\frac{H}{h}=\frac{AD}{PD}$

ואז

$$\frac{S_1+S_2+S_3}{S_1}=\frac{S_{ABC}}{S_{PBC}}=\frac{H}{h}=\frac{AD}{PD}$$

מכאן

$$\frac{AP}{PD}=\frac{AD-PD}{PD}=\frac{S_2+S_3}{S_1}$$

ובאותו אופן

$$\frac{BP}{PE}=\frac{S_1+S_3}{S_2}\ ,\ \frac{CP}{PF}=\frac{S_1+S_2}{S_3}$$

נחבר את שלושת השוויונים ונקבל לאחר "סידור"

$$\frac{AP}{PD}+\frac{BP}{PE}+\frac{CP}{PF}=\left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_1}\right)+\left(\frac{S_2}{S_3}+\frac{S_3}{S_2}\right)+\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right)$$

$$\geq 2+2+2=6$$

שוויון אם ורק אם

$$\frac{S_3}{S_1}=\frac{S_1}{S_3}\ ,\ \frac{S_2}{S_3}=\frac{S_3}{S_2}\ ,\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{S_2}{S_1}$$

זאת אומרת כאשר $S_1=S_2=S_3$

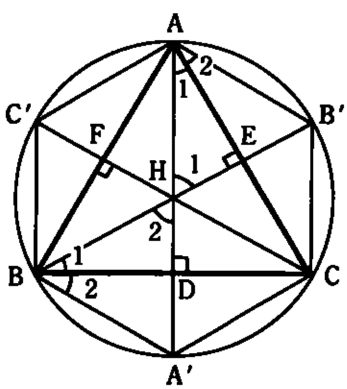
השתמשנו כאן באי־שוויון $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

המתקיים לכל $a, b>0$ (שוויון אם ורק אם $a=b$)

נסיים את הסקירה בדוגמה של בעיה שהוצעה לפתרון בכתב העת School Science and Mathematics

6.2 המשולש ABC חסום במעגל. AD, BE ו־CF הם הגבהים במשולש ABC. הנקודות A′, B′ ו־C′ הן נקודות המפגש של הגבהים AD, BE ו־CF עם המעגל בהתאמה.

הוכח ש: $$\frac{AA'}{AD}+\frac{BB'}{BE}+\frac{CC'}{CF}=4$$



פתרון

ניצור את המשושה $AB'CA'BC'$ נשים לב כי $\measuredangle A_1=\measuredangle B_1$ כמשלימות ל־$90°$ של הזווית הקדקודיות $\measuredangle H_1$ ו־$\measuredangle H_2$, אך $\measuredangle A_1=\measuredangle B_2$ ו־$\measuredangle A_2=\measuredangle B_1$ הן זווית היקפיות הנשענות על אותן קשתות מכאן ש־$\measuredangle A_1=\measuredangle A_2$ ועל כן המרובע $AB'CH$ הוא דלתון מכאן $HE=EB'$ וכן $HF=FC'$ ו־$HD=DA'$ (1)

כעת נתבונן בשטחים

נשים לב כי $S_{AB'CA'BC'}=2S_{ABC}$

כעת

$$BC\cdot AD=AC\cdot BE=AB\cdot CF=2S_{ABC} \qquad (2)$$

יתר על כן

$$BC \cdot HD + AC \cdot HE + AB \cdot HF = 2S_{ABC}$$

או אם נשתמש בקשרים (1)

$$BC(AA' - AD) + AC(BB' - BE) + AB(CC' - CF) = 2S_{ABC}$$

אם נציב את (2) נקבל

$$\frac{2S_{ABC}}{AD}\left(AA' - AD\right) + \frac{2S_{ABC}}{BE}\left(BB' - BE\right) +$$

$$\frac{2S_{ABC}}{CF}(CC' - CF) = 2S_{ABC}$$

אם נצמצם ונעבור אגפים נקבל

$$\frac{AA'}{AD} + \frac{BB'}{BE} + \frac{CC'}{CF} = 4$$

כנדרש

קרל פרידריך גאוס (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855) היה מתמטיקאי, פיסיקאי ואסטרונום גרמני הוא נחשב בעיני רבים לאחד המתמטיקאים הגדולים בכל הזמנים. את תרומתו למתמטיקה ולמדע נוהגים להשוות לזו של ארכימדס ושל ניוטון. בני זמנו העניקו לו תואר "נסיך המתמטיקאים".

גאוס למד באוניברסיטת גטינגן ולאחר מכן במשך שנים רבות כיהן בה כפרופסור למתמטיקה ולמדעים. הוא ניהל שם מצפה אסטרונומי שלידו הקים מצפה לחקר השדה המגנטי של כדור הארץ

כישרונו המתמטי יוצא הדופן נתן את אותותיו כבר בהיותו של גאוס ילד קטן. אומרים, שכשהיה בן שלוש הוא גילה טעות בחישובי משכורות לעובדים אצל אביו. בבית־ספר עורר תשומת לב רבה כאשר המציא נוסחה לסכום של סדרה חשבונית. תגליתו המקורית הראשונה של גאוס היתה בנייה באמצעות סרגל ומחוגה של מצולע משוכלל בן 17 צלעות. מתמטיקאים רבים התמודדו עם בעיה זו קודם לכן, אך גאוס היה הראשון שהצליח לפותרה.

אף על פי שתחום התעניינותו של גאוס היה רחב מאד, הוא חיבב במיוחד את האריתמטיקה, שאותה כינה בשם "מלכת המתמטיקה". הוא האמין שאריתמטיקה יכולה להחליף את הגיאומטריה בתפקיד שזו האחרונה מילאה עד אז — תפקיד היסוד שעליו מושטטת המתמטיקה כולה. עם זאת, יש לציין, שתרומתו לגיאומטריה היתה בהחלט לא מבוטלת. הוא נחשב לאחד האבות של הגיאומטריה הלא־אוקלידית

פרטים רבים על פעילותו הרב־גונית של גאוס ניתן למצוא בהתכתבותו הענפה עם עמיתיו והן ביומן שניהל מגיל 17, מאותו יום שבו הצליח לפתור את בעיית הבנייה של מצולע משוכלל בן 17 צלעות גאוס העדיף לגנוז אחדים מרעיונותיו בשל סברה שאין עוד הקהילה המדעית בשלה לקבלם.

הרעיונות האלה מוכרים לנו היום הקיבוזות תתאוהים מתוך התכתבותו עם עמיתיו ומתוך יומניו של גאוס, שהתפרסמו רק 43 שנים לאחר מותו היומנים והמכתבים של גאוס הם המקור היחיד של ידיעותינו על פריצת הדרך שביצע בנושא הפונקציות של משתנה מרוכב (אנליטיות) ובעניין הגיאומטריה הלא־אוקלידית

עובד על־סמך

Matematyka — Encyklopedia Szkolna, 1990

בין אינטואיציה למתמטיקה

מאת **עופר ליבה**, ביה"ס התיכון אורט רמות ע"ש גדיש, ירושלים

ספרו של פרופסור אפרים פישביין מאוניברסיטת תל־אביב Intuition in Science and Mathematics[1] מהווה מזיגה נדירה בין ראיה תיאורטית של התופעה הנקראת אינטואיציה, אירגון הממצאים המחקריים, והשלכות מעשיות למישור החינוכי־דידאקטי

המושג **אינטואיציה** מובן לרובנו (בדרך כלל הוא מובן אינטואיטיבית!) ונסיון "לפרק אותו לגורמים" ולהגדירו בצורה מדוייקת ובהירה אינו דבר קל **אינטואיציה מבטאת צורך עמוק של התנהגותנו השכלית.** בכל תהליך חשיבה מורכב, בין שיהיה שיטתי ובין שיהיה רצוף ניחושים ותיקונים, אנו מסתמכים על רעיונות "בטוחים" כלשהם (הרי איננו יכולים להטיל ספק **בכל דבר**), ואלה מהווים "דבק" בשרשרת החשיבה הגיע הזמן שנתייחס לאינטואיציה כאל מרכיב מרכזי בהווייתנו הקוגניטיבית

הכמיהה לוודאות

לא נוכל להצביע על משמעות אחידה למושג בהקשרים מסויימים אינטואיציה מהווה מקור, מעיין (ממשי או מדומה) לידע כך רואים זאת דקארט (R Descartes) ושפינוזה (B Spinoza) עבורם התופעות הנצפות בעולמנו הן אוסף של אשליות לדעת אחרים כמו ברגסון (H. Bergson) מדובר בשיטה, באיסטרטגיה שכלית, המביאה אותנו למהות, לשכבת הבסיס של החיים ושל התופעות עבור פיאזיה (J Piaget), אינטואיציה היא סוג של קוגניציה ראשונית שאינה דורשת הסברים, כגון תפיסת המרחב והזמן בין כל הפרשנויות מקשר הצורך הנצחי של האדם לוודאות, החיפוש אחר האמת המוחלטת, הרצון **לראות עם שכלנו** כמו שאנו רואים עם עינינו

1) Fischbein, Efraim **Intuition in Science and Mathematics.** Reidel, 1987

אף אם נשמע הדבר פרדוקסאלי, דווקא המירוץ אחר הפורמליזציה של המדע בכלל ושל המתמטיקה בפרט הביא להבנתם ולשכלולם של המנגנונים האינטואיטיביים בתהליכי ההבנה, התרת בעיות, היצירה והגילוי וכמו שהאינטואיציה עזרה וקידמה, היא גם הפריעה לא מעט הגילויים על הגיאומטריות הלא־אוקלידיות, על האינסופים "בפועל" (actual infinities) ורעיונות דומים הצביעו על־כך שהמובן מאליו אינו מושג נרדף לוודאות. איך יתכן שפונקציה תהיה רציפה בכל נקודה ואי־גזירה באף נקודה? איך ניתן להבין **אינטואיטיבית** את השקילות בין קבוצת המספרים הטבעיים לבין קבוצת המספרים הזוגיים, או גרוע מכך, לקבוצת המספרים הרציונליים? הרי עד קאנטור (G Cantor) היה מובן מאליו שהשלם גדול מכל אחד מחלקיו ואיך ניתן להבין (שוב, אינטואיטיבית) $a^0 = 1$? אם כן, עם כל הברכה והתועלת שהאינטואיציה מספקת לנו, היא יכולה גם להטעות, ולכן צריך גם להזהר ממנה

העולם המתמטי

המתמטיקה עוסקת במושאים אידיאליים (במובן מן השכל), ובפעולות אידיאליות, אשר מובנן נקבע באופן מדוייק על־ידי הגדרות וכללים פורמליים במלים אחרות, **עצם קיומם** של "הדברים" המתמטיים נקבע על־ידי אקסיומות, הגדרות, כללים לוגיים וכיוצא באלה התוצרת המתמטית היא פרי הפיתוחים הדדוקטיביים וההוכחות הפורמאליות זהו עולם מיוחד, שונה לחלוטין מזה של העצמים והמאורעות הממשיים, עולם שכולו תוצרות מנטליות, אשר כפופות לחוקי תורת ההגיון

האם ניתן להסיק שהמתמטיקה היא אוטונומית לחלוטין, בתור עולם של מהויות פורמליות? התשובה היא שלילית בשני מובנים: במובן אחד, פורמאלי דווקא, כתוצאה ממשפט אי־השלמות של גדל (K Godel) במובן השני, הפסיכולוגי, אשר יותר מעניין אותנו כאן יש כיום ראיות מצטברות למכביר, **ששום יצירה מתמטית אינה אפשרית תוך שימוש באמצעים פורמליים בלבד.** כדי לפתור בעיה וליצור משפטים, יש צורך ביותר מאשר ידע פורמלי (הגדרות, משפטים וכו') על הנושא אפילו הילברט (D Hilbert), אבי הפורמליזם והשיטה האקסיומטית התבטא פעם באלה המלים "מי לא מדמיין, יחד עם אי־השוויון $a < b < c$, שלוש נקודות על אותו ישר הממחישות היטב את הבין לבין?"

אינטואיציה ישנה ואינטואיציה חדשה

מבין הפרשיות המתמטיות המפורסמות אשר הביאו לקונפליקט קשה בין אינטואיציות סותרות ואף ל"מהומות" בקהילה המתמטית, בולטת תגליתו של קאנטור (G. Cantor) על העוצמות האינסופיות במכתבים שכתב לידידו דדקינד (R. Dedekind) מתבטא קאנטור בדרמטיות ואף בפתטיות לגבי הספקות שלו עצמו והנסיונות המכאיבים שלו ליישב בין האינטואיציות לבין ההשלכות הלוגיות של ממצאיו. דוגמא בולטת היא השקילות בין קבוצת המספרים הממשיים (הישר) לבין קבוצת הזוגות של המספרים (המישור) הרי "ברור אינטואיטיבית" שזה לא יתכן, ובכל זאת "אני רואה זאת, אך אינני מאמין" כותב קאנטור לדדקינד.

קנטור נלכד בין שתי אינטואיציות שאינן מתיישבות אחת עם השנייה, והדבר לא נתן לו מנוח. הוא ממשיך וכותב לידידו "לא אוכל למצוא את שלוות נפשי עד אשר אקבל ממך אישור באשר לנכונות ממצאיי"

מול מבוכת התלמיד

בתהליך החינוכי־לימודי, על המורה להעמיד מחדש המשגות מוטעות של התלמיד ובמתמטיקה אין זה קל. הרי אין מדובר בתיקון עובדות, כגון "לימה אינה בירתה של קולומביה אלא של פרו". אנו דנים כאן בהריסה ובבנייה מחדש של מבנים קוגניטיביים מגובשים ומושרשים מה קורה כשהתלמיד נדרש להתרגל לכך שכפל יכול גם "להקטין", או שהוא חי על כדור ענק שמסתובב מהר מאוד! עליו לוותר על מספר רב של אמונות בסיסיות שיש לו על המציאות, אותן עובדות שהיה משוכנע באמיתותן, אינן עובדות כלל. זהו עול אינטלקטואלי ורגשי לא קטן עבור התלמיד, והתוצאה עלולה אף להיות שיבוש תהליכי החשיבה שלו, מאחר שלא יוכל להסתמך יותר על אינטואיציות "בריאות".

כדי לפתור חלקית את מבוכת התלמיד, פישביין ממליץ למחנך להציג בפניו את הדוגמאות מההיסטוריה של המתמטיקה וכן להדגיש ולשוב ולהדגיש **שמדובר בהתנהגות שכלית נורמלית לחלוטין**, ושתמיד כדאי **להשאיר צוהר קטן לספק**, אפילו אם אנו משוכנעים במאת האחוזים שאנו צודקים.

המספרים הלא־אינטואיטיביים

במשך מאות בשנים היו המספרים השליליים מוקצים מחמת מיאוס. לכאורה, המושג של מספר שלילי נוגד את מושג המספר עצמו. ישנם שני מחסומים אינטואיטיביים בנוגע להבנת המספרים השליליים:

א מספר מייצג עבורנו כמות, "יותר מכלום". משום כך, למספר שלילי אין שום משמעות מעשית. יותר מזה **אין שום צורך מעשי במספרים שליליים**. אנו יכולים לתאר כל תופעה באמצעות המספרים הלא־מכוונים. אומנם אנו אומרים לפעמים "יש לי 2000- ש"ח בבנק" אך ניתן גם לאמר: "אני בחוב של 2000 ש"ח". המספרים השליליים הם המצאה מתמטית הנובעת מאילוצים פנימיים, משיקולי הרחבה ועקביות, ואינם מייצגים תופעות קיימות. יש לשים לב שלמספרים השליליים ניתנה "לגיטימציה" רק במאה ה־19, לאחר מאות שנים של ויכוחים.

ב. הרחבת הפעולות למספרים השליליים מעלה קושי נוסף לדוגמא, כל עוד אנו מכפילים מספר חיובי בשלילי, נוכל להתייחס לכפל כאל פעולת חיבור חוזרת:

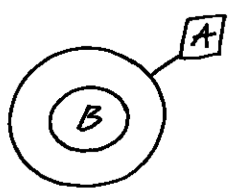
$$(-2)\cdot(+3) = (-2)+(-2)+(-2) = (-6)$$

אך כפל מספר שלילי במספר שלילי אינו יכול לקבל את המובן הזה. יש צורך לקבוע הסכמים חדשים וכל העניין נעשה קשר מאוד לעיכול אינטואיטיבי

לאור זאת טוען פרוידנטל (H. Freudenthal) שצריך להציג את המספרים השליליים בפני התלמיד באופן פורמאלי מן ההתחלה, כי זאת ההזדמנות הראשונה עבור הלומד לעשות היכרות עם מושגים מתמטיים מנקודת ראות פורמאלית־דדוקטיבית.

דיאגרמה ואינטואיציה

דיאגרמה היא מודל גראפי מקובל מאוד להמחשת מושגים ויחסים, והיא בדרך כלל כלי טוב בשירות האינטואיציה נתייחס לדוגמא לדיאגרמות ון ולאופן השימוש בהן. יחסים כמו הכלה ושוויון, פעולות כמו איחוד וחיתוך, והתכונות שלהן מומחשות ויזואלית על־ידי הדיאגרמה



אך זהירות! ניקח לדוגמא את יחס ההכלה. מגדירים $B \subset A$ אם כל איבר של B הוא גם איבר של A זה איננו משתמע בהכרח מהדיאגרמה (נשוב לכך בהמשך). מה שההגדרה אומרת הוא שלכל איברי B ישנה התכונה של איברי A (ואולי עוד תכונות). כל הריבועים הם מלבנים אך לא ההיפך כמו־כן, לפי ההגדרה, יתכן מצב של שוויון: $A = B$. הדיאגרמה אינה מראה זאת הדיאגרמה נראית יותר כמו (לדוגמא) ביצה, אשר מורכבת משני חלקים זרים אז מה יהיה עם פעולות איחוד„ ויתוך' הדיאגרמה לא תשקף את מה שהיא צריכה לשקף, לגבי פעולות אלה במלים אחרות, חוסר הכנה מספקת לשימוש בדיאגרמות ון עלול יותר לסבך את ההבנה של המושגים והיחסים בתורת הקבוצות מאשר להאיר אותם אינטואיטיבית