מיחשוב בכתת המתמטיקה: אפשרויות שבאות בחשבון. חלק ב'

מאת **מיכל ירושלמי**, אוניברסיטת חיפה

בחלקו הראשון של מאמר זה (עלייה 10, עמ' 13-7) סקרה המחברת מגוון רחב של תוכנות המסייעות בלימודי מתמטיקה, על סוגיהן השונים בחלק זה נידונים מחקרים שבהם נבדקה השפעת המחשב על הלמידה

בחלק א' הוצגו תוכנות העושות שימוש בייצוגים מתמטיים מסוגים שונים חוזקן של תוכנות אלה בכך שהן חושפות את הלומד לאוסף מגוון של דוגמאות מקובל להניח כי הצגת מושג בדרכים שונות ולמידה דרך דוגמאות מובילות את הלומד להבנה ואף יכולות לגרום לשיפור ביצועיו האלגוריתמים בו בזמן חשוב להבין את הקשיים האופייניים לדרכי הלימוד המוזכרות אם נבין את הנקודות הבעיתיות ואם נשתכנע כי בעזרת המחשב ניתן ליצור סביבה לימודית שונה וטובה, כי אז יהיה טעם להמשיך ולפתח תוכנות נוספות

בפרק זה נדון בחלק מן הקשיים הנילווים ללימוד מייצוגים שונים (בעיקר באלגברה) וללמידה תוך חשיפה לדוגמאות (בעיקר בגיאומטריה) לטענותינו השונות נביא ראיות מחקריות הנוגעות לשימוש בתוכנות

א. לימוד מתמטיקה בסביבה רבת־ייצוגים

נתרכז בשתי בעיות עיקריות המתלוות ללימוד של מושג במספר ייצוגים בעיית העומס הקוגניטיבי ובעיית המיפוי בין ייצוגים קשה למצוא ייצוג יחיד שיאפשר הסבר של מושג מתמטי בשלמותו למשל, אם נסקור ייצוגים של מושג השבר ופעולות בשברים נווכח לדעת כי קיימים ייצוגים רבים לשבר (נקודות וקטעים על ציר המספרים, נקודות וישרים במערכת קרטזית, רצועות מלבניות או גזרות עיגול) ולכל אחד מהם עדיפות על כל שאר הייצוגים בטיפול בהיבטים מסויימים של הנושא

שימוש בייצוגים רבים עלול להוביל אל סיבוך של דרכי ההוראה, ואל עומס על הלומד לעיתים, יהיה צורך להחליט מהו הייצוג המועדף

אין המחשב יכול לפתור את בעית בהירות הייצוג בחירת סוג הייצוג ומהותו צריכה להעשות לאו דוקא בהתאם לסוג המדיום שבו רוצים להשתמש אולם, למחשב יש יתרון הוא מאפשר גמישות, וויסות העומס שיוצרים ייצוגים רבים מקבילים, וזאת על־ידי שימוש בייצוגים שונים בזמנים שונים של הלמידה

כאשר משתמשים בסוגים שונים של ייצוגים, יש לדאוג להבנת ההיבטים השונים של כל אחד מהם יש להקפיד על המינוח המיוחד לכל ייצוג, ולהקנות יכולת של מניפולציות בהתאם לחוקים המקובלים לכל ייצוג גם כאשר כל אחד מהייצוגים מובן, עדיין לא מובטח כי יתרחש קישור ומיפוי בין הייצוגים לטענת שנפלד (Schoenfeld, 1983), מיפוי כזה הוא שעומד בבסיסה של ההבנה של מושג מתמטי בעולם רב ייצוגי גם לסדר בו אנו מלמדים ישנה השפעה על יכולת התפיסה של מגוון ייצוגים בדרך כלל המעבר בין סוגי הייצוג הינו חד כיווני חד כיווניות זו מפריעה ליצירת מיפוי מובן, וכן להפשטה והכללה שלו

תיאורטית ניתן להתגבר על הבעיות בעזרת המחשב המחשב מאפשר לצפות בשינויים המתרחשים במקביל בשני ייצוגים או יותר, ולכן הוראה ולמידה תוך עיסוק מתמיד בשינויים המקבילים עשויה להקל על קשיי המיפוי אם תופנה תשומת לב הלומד למקבילות שבשינויים הללו ישנו סיכוי שהייצוגים השונים אכן יתפסו כביטויים שונים של מושג אחד

כמו כן המחשב מאפשר (כפי שהודגם בחלק הראשון של המאמר) מתן קדימות לייצוג שבדרך כלל נתפס כתלוי בייצוג אחר ומובל על־ידו בצורה זו ניתן להתגבר על בעיית החד־כיווניות של המיפוי

נסקור עתה כמה עבודות בהן נחקרו הבטים המייחדים את השימוש במחשב ככלי המספק גמישות וגיוון בייצוג מתמטי

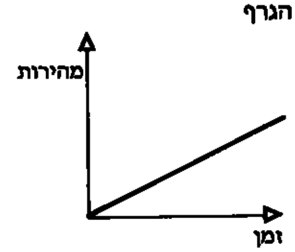
השפעות חזותיות

מאחר שהייצוג הגרפי הוא חלק מרכזי בלימוד ייצוג ממוחשב, ישנה חשיבות מיוחדת בחקירת המושגים המיוחדים שעל הלומד להיות בקי ומאומן בהם כדי שיוכל להפיק תועלת מן הלימוד ברב־ייצוג גולדנברג (Goldenberg et al. 1987) מעלה רשימה של מרכיבים המיוחדים לעבודה עם ייצוג גרפי ממוחשב הוא מתאר תלמידי תיכון "מומחים" הנתקלים בקשיים כאשר הם מנסים לשייך תכונות של גרף לתכונות סימבוליות מוכרות גולדנברג מראה כיצד הגרף מוליך אותם "שולל", ומדגים מצבים בהם השפעת התמונה על תשובות התלמידים חזקה יותר מהידע

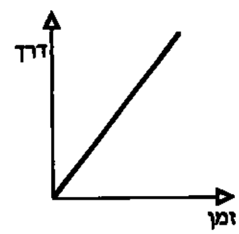
האנליטי הוא מתאר ניסוי שבו עובדת קבוצת תלמידים היודעים את התפקיד הסימבולי של כל אחד מהפרמטרים בתאור הפונקציה הריבועית, $f(x) = ax^2 + bx + c$ התלמידים מודעים לכך שיש לשים לב לשלושה גורמים ויזואלים האם הפרבולה מכוונת למעלה או למטה, עד כמה היא מחודדת ומה מיקומה האופקי והאנכי (במערכת הצירים) הלומדים מנסים להתאים לכל אחד מהפרמטרים את התפקיד החזותי שלו והתאמה זו איננה פשוטה כלל ועיקר (למשל, מהי משמעותם החזותית של שינויים ב־b)

נמירובסקי (Nemirovsky, 1992) העוסק באיבחון קשיים בהבנת מושגים בסיסיים בחשבון דיפרנציאלי, מצביע אף הוא על הטיות ויזואליות הגורמות לתלמידים לקשר בין הפונקציה והפונקציה הנגזרת שלה באופן מוטעה

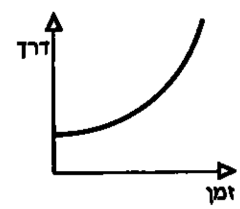
למשל, תלמידים יתאימו לגרף המהירות



את הגרף



ולא את

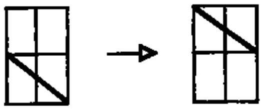


למרות שזוהי אפשרות נכונה

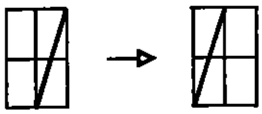
כתוצאה מלימוד באמצעות דוגמאות גרפיות תלמידים מתחילים מפתחים לעצמם מערכת מונחים נאיבית המונחית על־ידי הייצוג הגרפי, מערכת זו העלולה להיות מסובכת ומורכבת הרבה יותר ממערכת מונחים אנליטים

כך, למשל, גולדנברג מצטט חמישה הגדים שונים של תלמידים לתאור מהלך הניתן להגדרה בדרך סמבולית $f(x) \to f(x) + const$ כאשר $f(x) = ax + b$ עבור תמונות שונות ופרמטרים שונים

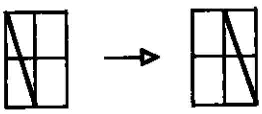
״הקו עולה למעלה״
$|a| \ll 1$



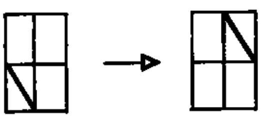
״הקו זז שמאלה״
a חיובי ו־$|a| \gg 1$



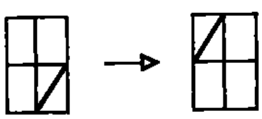
״הקו זז ימינה״
a שלילי ו־$|a| \gg 1$



״הקו זז אלכסונית לצפון־מזרח״
a שלילי ו־$|a| \approx 1$



״הקו זז אלכסונית לצפון־מערב״
a חיובי ו־$|a| \approx 1$

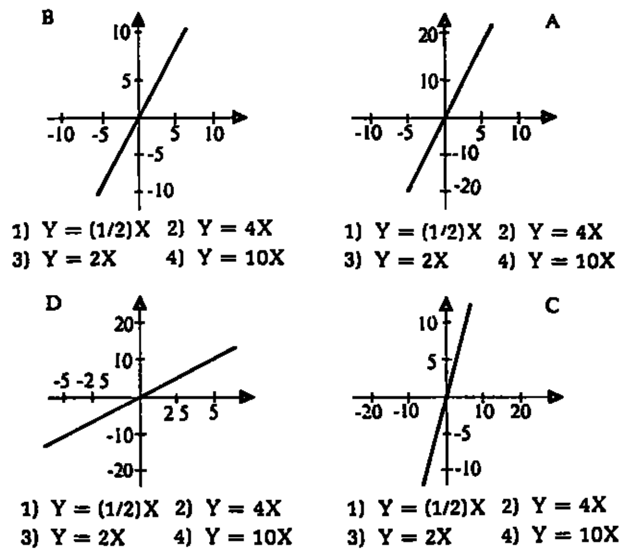


רק פעילות דידקטית תביא את התלמידים לראות את ההכללה האפשרית של חמשת התאורים ממצאים דומים נמצאו בעבודה עם מתחילים בנושא פונקציות כאשר נתבקשו בתחילת הלימוד למיין אוסף גדול של פונקציות קוויות לפי קריטריון כלשהו (Yerushalmy, 1991(a)) קריטריון חזותי נפוץ למיון היה מספר הרביעים בהם עובר גרף הפונקציה, או האם הוא עובר בראשית או לא (בניגוד לקריטריונים של מיון סמבולי המקובלים בתוכנית הלימודים)

בעוד בכל הדוגמאות שהוצגו עד עתה, ההטיה נבעה מקישור בין תמונות שונות לפונקציות שונות על־פי תכונות לא רלוונטיות, הרי יש להתחשב בגורם מסבך נוסף תמונות שונות יכולות לייצג פונקציות זהות ולהפך — תמונות הנראות זהות מייצגות פונקציות שונות הייצוג הגרפי מחייב חשיבה על מערכת נוספת של פרמטרים (מעבר לאלה המוכרים לנו מן הייצוג האנליטי סימבולי) הפרמטרים של קנה מידה במילים אחרות, ישנו צורך להבין את הפרדת תכונות המערכת בה מתארים את העצם מן האובייקט המתואר עצמו השימוש ברב ייצוג ממוחשב מגביר

מאוד את סיכוי ההתקלות בסיבוך זה, מכיוון שבניגוד למערכת קואורדינטות קבועה המשורטטת על דף נייר, חלונות מחשב דינמיים מזמנים שינויים בקנה מידה ההנחה השיגרתית שקנה המידה בציר x ו־y זהה, בדרך כלל איננה מתקיימת בעבודה עם מחשב

בניסוי שבדק הטיה חזותית הקשורה בקנה המידה של מערכת הקואורדינטות (Yerushalmy, 1991(a)) ניתנה משימה הבודקת כיצד מיישבים תלמידים מתחילים סתירה אפשרית בין תמונות לתיאורים סמבוליים של פונקציות



איור 1: (מטלה 4) נתונים ארבעה תיאורים גרפיים של פונקציות ליניאריות במערכות צירים בעלות קני מידה שונים בחר את הפונקציה המוצגת על־ידי כל אחד מהקוים הסבר את בחירתך בכל אחד מהמקרים

איור 1 (מתוך Yerushalmy, 1991)

במשימה ניתנו תמונות זהות לפונקציות שונות ולהיפך התוצאות (טבלה 1) הראו שיש קושי כאשר זוית השיפוע הוצגה כקטנה או גדולה בצורה קיצונית, אולם ברוב המקרים אין הקושי נובע מהטיה ויזואלית אלא מטעויות בחישוב השיפוע

טבלה 1 התפלגות התשובות במטלה 4 (n = 34)

פריט	4x	2x	(1/2)x	10x
(a)	91% (31)*	6% (2)	3% (1)	0% (0)
(b)	0% (0)	94% (32)*	6% (2)	0% (0)
(c)	3% (1)	61% (20)*	24% (8)	0% (4)
(d)	0% (0)	69 7% (23)*	27 3% (9)	3% (1)

* התשובה התקינה

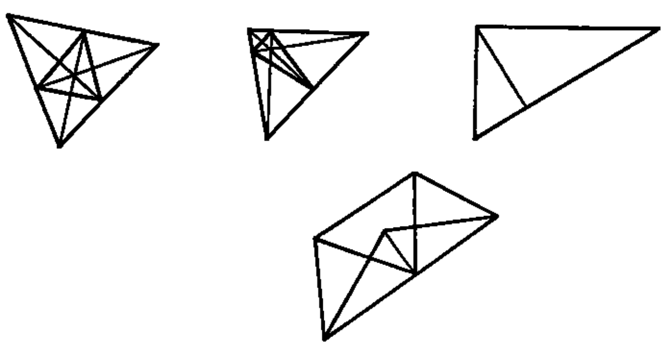
שינויים דינמיים של כל אחד מהייצוגים

האם היכולת לפעול עם ועל הייצוג הגרפי תוך כדי ביצוע של השוואות ויזואליות מפתחת הבנה של המושג המתמטיי

נקודה זו נבדקה במחקרן של רוזברי ורובין (Rosebery & Rubin, 1989) העוסק במעקב אחרי התפתחות של חשיבה סטטיסטית במהלך עבודה בעולם ממוחשב הנקרא Elastic בתוכנה זו המראה ייצוגים ואירגונים שונים של מידע מספרי אפשר לצפות בהיסטוגרמות ולנתח אותן יתרה מזו, אפשר "למתוח" את ההיסטוגרמה (strechy histograms) ולצפות בשינויים הנוצרים במדדים כמו ממוצע וחציון החוקרות מציינות כי העובדה שתלמידים יכלו להזיז ולשנות את המיקום והגודל של המוטות המלבניים ולראות באותו זמן כיצד והאם בכלל יש שינוי במדדים המרכזיים עזרה לתלמידים ואף למורים לאבחן, למשל, עד כמה מדד החציון הוא מדד יציב לעומת רגישותו ואי היציבות של הממוצע

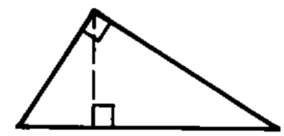
במחקר אחר (Yerushalmy & Chazan, 1990) ניסינו לעמוד על ההשפעה של **המשער הגאומטרי** (ראה עלייה 10, עמ' 9) על היכולת להתגבר על קשיים חזותיים הקשורים להבנת גיאומטריה הקשיים שנחקרו שייכים כולם לחוסר היכולת של הלומד לאבחן תמונה בדרכים ובמצבים שונים מחד גיסא ומאידך גיסא, לנטייה להצמיד תמונה מסויימת סטיריאוטיפית למושג גיאומטרי אחד הממצאים הבולטים מתוך עבודת התלמידים במחשב ומתוך עבודותיהם ללא מחשב, היה שינוי בתפיסת הדיאגרמה כאובייקט סטטי והחלפתה ב

א סדרות של תמונות, כאשר כל תמונה היא דוגמא שונה של אותה הגדרה פורמלית



איור 2

ב "פירוק וקילוף" תמונה בדרכים שונות למשל ישנו קושי ברור לראות שלושה משולשים דומים באיור 2



אפשר להתגבר על קושי זה כאשר מסתכלים על השרטוט כ״דו־שכבתי״ וכאשר ישנה נכונות לבדוק כל צורה ותמונה מנקודות מבט שונות
היכולת להפעיל ייצוג יחיד כלשהו ובו בזמן לצפות בשינוי מקביל של כל הייצוגים הנילווים הינה תופעה ייחודית לעבודה עם מחשב ויש להמשיך ולחקור את השפעותיה

לימוד בייצוגים מקבילים

לסיום הדיון ברב־ייצוג נדון בממצאים של עבודות בהן ניסו להתחקות אחר תהליכים המתרחשים כאשר תלמידים לומדים בייצוג מקבילי מושגים מתוך תוכנית הלימודים הרגילה (אשר בדרך כלל נלמדים בעזרת ייצוגים שונים אך בצורה סידרתית, לא מקבילית) נסקור בקצרה התפתחות של איסטרטגיות עבודה חדשות ויכולת איבחון שונה של מושגים

בניסוי עם תלמידי תיכון הלומדים טריגונומטריה מתארת דגדל (Dugdale, 1990) שתי קבוצות הלומדות עם התוכנה Green (Globs & Graphing Equations, Dugdale & Kieby, 1985 במחקר זה נבדקו שתי כתות של תלמידים כל אחת מהכתות למדה טריגונומטריה תוך שימוש בתוכנה המשרטטת גרפים קבוצה אחת תרגלה זהויות טריגונומטריות, למדה והוכיחה את 8 הזהויות היסודיות והשתמשה במחשב לצורך שרטוט גרפים, איבחון שורשים, מציאת אסימפטוטות וגילוי הקשר בין פונקציות הפוכות קבוצה שניה למדה באותו זמן בדיוק אותו נושא כאשר הזהויות הטריגונומטריות הוצגו בצורה גרפית וההצדקה למניפולציות הסמבוליות היתה צריכה לבוא גם מתוך הגרפים תלמידי קבוצה זו נתבקשו לאתר זהויות לפי הייצוג הגרפי בטרם הוכחתם הסימבולית הם אף נדרשו להעלות השערות ולשאול שאלות על קשרים בין פונקציות, פונקציות הפוכות, אפסים ואסימפטוטות על פי הייצוג הגרפי.

לסיכום, ההבדלים בהוראה של קבוצות הניסוי היו בקבוצה הראשונה הוצגו תמיד המושגים בצורה סימבולית, תורגלו ורק אחר־כך גם הוצג השימוש בגרפים בשניה, לא היתה הצגה מוקדמת של הזהויות ונלמדו המושגים תוך כדי חקירה העושה שימוש בשני הייצוגים של הבעיה

בסיום, נבחנו התלמידים בשאלות שגרתיות ובלתי שגרתיות לא נמצא הבדל בין הקבוצות בשאלות העוסקות בתוכן השיגרתי של הוכחת זהויות טריגונומטריות אולם, אובחן הבדל משמעותי לטובת הקבוצה השניה ביכולת שיוך פונקציות לגרפים שלהן
כמו־כן, בחלק שבדק הבנה של גרפים ופונקציות, נרשם ביצוע טוב יותר בכל השאלות שעסקו בגרפים של ביטויים שלא ניתנים לפישוט קל לפונקציות בסיסיות

כלומר, הניסוי הראה שעיסוק בכלי המאפשר ייצוג גרפי עדיין איננו מספיק יש לדאוג לסביבת לימוד ותוכנית הוראה כזו אשר תשלב את העיסוק הטכני מניפולטיבי בהבנת פונקציות וגרפים

במחקר אחר שכבר הוזכר (Yerushalmy, 1991(a)), נבדק האם תלמידים משתמשים בכלים המקביליים שניתנו להם ב־ Function Analyzer (ראה עלי״ה 10, עמ׳ 10) על מנת לפתור בעיות הניתנות לפתרון באחד מן הייצוגים, גם כאשר אינם משתמשים במחשב בניסוי זה, למדה כתה ח׳ את נושא הכרת הפונקציות (הקדמה למושגים שונים הקשורים לפונקציות וגרפים ופרק הפונקציה הקווית) בעזרת מחשב דגש רב הושם על הייצוג הגרפי והשינויים הגרפיים (כמו הזזות, מתיחות, שינוי נקודות חיתוך עם הצירים וכו׳).

באחת ממשימות המבחן (ללא מחשב) נותחו תשובותיהם וטיעוניהם של התלמידים לפי קריטריון הייצוג בו השתמשו כהסבר או כדרך לפתרון האם הוא חזותי או חישובי או מאחד את שניהם

טבלה 2 התפלגות של סוגי נימוקים בחלק ג׳ של מטלה 3 (n = 34)

סוג נימוק	סה״כ	תקין	לא תקין
חזותי	38 2% (13)	24% (8)	14 7% (5)
מספרי	38 2% (13)	29 4% (10)	8 8% (3)
מעורב	11 8% (4)	8 8% (3)	3% (1)
חסר	11 8% (4)		

הממצאים מוצגים בטבלה 2 רואים, כי חלק זעום מהתלמידים מנצל את הייצוגים השונים כדרך לבדיקה ממצא זה תומך, אם כן, בגישה שהודגשה אצל Dugdale יש ללמד תוך כדי שילוב בין הייצוגים בצורה מפורשת וברורה ואין להסתפק ולהניח כי חשיפה בלבד לייצוגים שונים תבהיר ללומד את הפוטנציאל שבשילוב ביניהם

על מנת להמשיך ולמצוא האם וכיצד משתמשים לפתרון בעיות סטנדרטיות בייצוגים שונים נערך ניסוי נוסף, הפעם עם קבוצת מורים שוב נבחנו שתי דרכי עבודה, שתיהן עם מחשב (Yerushalmy & Gafni, 1991) הנחקרים עסקו בפישוט ביטויים אלגבריים תוך קבלת 2 סוגי משוב מן המחשב 1) משוב שיפוטי

לכל צעד (נכון או שגוי), 2) משוב איכותי המראה את הביטוי בכל שלב כגרף של פונקציה במשתנה אחד אם נעשתה טעות בשינוי הצורה האלגברית של הביטוי היא צריכה להתבטא בשינוי הגרף שינוי נכון של הצורה האלגברית לא יגרום לכל שינוי בגרף מטרתו העיקרית של הניסוי היתה לבדוק כיצד מגיבים ומטפלים בשגיאות אלגבריות בנוכחות משובים מייצוגים שונים (זאת מכיוון שהגרף לא רק משתנה בעת שגיאה אלא מאפשר גם לראות את מהות השגיאה, הוא מצביע על "מיקומה" בביטוי אצל הנבדקים אובחנו שתי צורות עבודה ה"תחבירית" (syntatic manipulation) בה כל שגיאה גורמת להתחלה מחדש של תהליך הפישוט עד להגעה לתשובה הנכונה לעומתה הצורה ה"סמנטית" (semantic interpretation) שבה מנסים לאתר את השגיאה תוך שימוש בגרף ובגרף ההפרש (בין הביטוי הנכון והביטוי השגוי) ותוך תפיסת המבניות של הביטוי (החזקות, עומק הסוגריים וכו') מכיוון שכל נבדק עבד בשתי גירסאות התוכנה — עם גרפים ובלי גרפים — אפשר היה לעקוב אחרי השוני באיסטרטגיות העבודה שננקטו בכל אחד מהמצבים אלו שאכן היו מסוגלים להשתמש באינפורמציה מתוך הגרף להבנת המבנה האלגברי של הביטוי הנתון והשגוי, שגו פחות וביצעו פישוט בדרכים קצרות יותר.

מאוחר יותר, נערכו ראיונות עם חלק מהנבדקים רבים מאלו שבעבודתם לא ניכר היה שימוש בגרף לתיקון שגיאות פישוט נימקו את צורת עבודתם בחוסר יכולת לשנות את הרגליהם הקודמים לדבריהם, הם התרגלו בעבר לפשט ביטויים אלגבריים לפי חוקים מאוד מסויימים וכמובן ללא כל הזנה מפונקציות וגרפים

לשלוש העבודות שהוצגו כאן משותפים ההבטים הבאים

(1) כולן עסקו בתוכן שגרתי של תוכנית הלימודים,

(2) דובר בתכנים שנלמדים בדרך כלל תוך הדגשת פעילות מניפולטיבית סימבולית (זהויות טריגונומטריות, פישוט אלגברי, חישוב משוואת קו ישר)

(3) בכולם נבדקה תרומת הייצוגים כפונקציה של דרך הלמידה

הממצאים שהוצגו מראים, כי נוכחות של ייצוגים מקבילים איננה גורם מספיק לתפיסת מושג בייצוגים שונים לימוד הנושא תוך כדי שימוש מקבילי רבגוני בפתרון בעיות סטנדרטיות ולא סטנדרטיות הינו הכרחי לממצאים אלו צריכה כמובן להיות השפעה על תוכנית הלימודים ודרך ההוראה

ב. למידה מדוגמאות

יכולתו של המחשב לספק כמות גדולה של מקרים להדגמת מושגים מתמטיים שונים ברורה ואף הודגמה בתוכנות שונות בחלקו הראשון של המאמר. לעומת זאת, פחות ברורים אופני השימוש של הלומד, של המורה, ושל תוכנית הלימודים בגודש האינפורמציה המסופק על־ידי המחשב, אפילו כאשר המידע העשיר מסופק לפי דרישת המשתמש

בספרות ניתן למצוא רשימת קשיים המתעוררים כחלק בלתי נפרד מכל למידה אינדוקטיבית בעזרת דוגמאות

1) ישנה נטייה להגביל את מרחב ההשערות לסיטואציות פשטניות במקום לבחון את כל האפשרויות העולות מאוסף דוגמאות מסויים

2) קיימת הטייה אינדוקטיבית הקרויה "פרדוקס האישוש" (The confirmation paradox Holland et al, 1986) אנשים נוטים למצוא את הדוגמאות אשר מאשרות השערה מוקדמת שלהם ומניחים כי הדוגמאות מייצגות את כל האפשרויות כאשר נופלת בחלקם דוגמא סותרת הם מתעלמים ממנה

3) ישנה נטייה לפשט מצבים על־ידי יצירת קשר סיבתי בין X ו־Y ללא הצדקה מספקת כלומר, המצאות מאורעות X ו־Y באוסף הדוגמאות היא סיבה מספקת להניח כי X הוא הגורם ל־Y

כתוצאה מנטיות אנושיות אלו, אובחנו במחקרים שונים קשיים ביצירה ובתפיסה של מושגים מתמטיים

מץ ((Matz, 1982 מציינת כי שגיאות רבות באלגברה נובעות מרצון להכללת־יתר של דוגמאות ידועות תוך התעלמות מגורמים קריטיים או אי־ידיעתם למשל כמה דוגמאות מן הסוג של $2(x + y) = 2x + 2y$ יביאו תלמידים לטעון כי $(x + y)^2 = x^2 + y^2$

ריסלנד (Rissland, 1981) ואחרים (Hershkovitz, Hoz 1981, 1987), שמו לב כי תלמידים מכלילים דוגמאות מסויימות של דיאגרמות בגיאומטריה למודלים ואינם דוגמים את התופעות במצבים שונים אם כן, אלו מיומנויות של למידה מדוגמאות אנו צריכים לפתח בתלמידינו

העלאת השערות העלאת השערות כרוכה לרוב ברעיון ראשוני מכוון אשר בלעדיו אין טעם אף להתחיל ולאסוף דוגמאות, וביצירת רעיונות בכיוונים חדשים תוך כדי חקירה

יצירת אוספים טובים של אינפורמציה.

1) יש ליצור מאגרי דוגמאות בגודל "נכון" מה פרושי הרי אי אפשר לתת תשובה מספרית אחידה לכך כאמור, זוהי בעיה מרכזית בלמידה מתוך דוגמאות (Holland, 1986) והיא בעייתית במיוחד בלימוד מתמטיקה אשר בדרך כלל אינו נשען רשמית על דוגמאות להיפך בגיאומטריה דיאגרמה אחת היא המייצגת בדרך כלל את כל אוסף הדוגמאות הנחוץ כמות הדוגמאות הינה פונקציה של הידע של התלמיד ושל היכולת שלו להשתכנע כי מספר וסוג הדוגמאות שנאספו הן אכן הדוגמאות המייצגות

2) יש לבחון ולכלול בתוך מאגר הדוגמאות מקרי קיצון

3) יש להתבסס על ידע קודם של מושגים ולא לדגום אלמנטים שונים ללא תכלית.

ניתוח האינפורמציה על התלמיד לדעת לנתח את המידע, לסדר את הדוגמאות לסידרה משמעותית, לשים לב לדוגמאות סותרות, לדעת לארגן מידע מספרי בשיטות השוואה אריתמטיות ואלגבריות (יחסים, הפרשים, סכומים) וללמוד להשוות מידע חזותי

הערכת השערות על התלמיד לפתח בעצמו יכולת בקרה על טיב השערותיו עוד לפני ביצוע ההוכחה המתמטית השלמה יש לראות כי ההשערה אינה טריויאלית (חזרה לנתון, חזרה על תכונת מושג בסיסי ידוע וכו'), יש לבחון האם ואיך היא "מתיישבת" עם אמיתות קודמות ידועות, האם היא תוצאה ישירה של ידע קודם או אולי סותרת ממצאים קודמים ובכלל, האם ההשערה "שווה" עיסוק בהוכחה או אולי היא כבר הוכחה קודם לכן או נמצא לה מקרה סותר

מן המעט שהוזכר למעלה, ברור כי למידה מתוך דוגמאות מצריכה פיתוח מיומנויות שהן לא תמיד חלק מתוך העיסוק השגרתי בלימוד מתמטי, והן אף אינן טריויאליות ומוכרות לרוב התלמידים

תוכנה מסוגו של המשער הגיאומטרי איננה מספקת ישירות כל עזרה בתחומים אלו למשל

1) התוכנה **איננה מפקחת על סוג הדוגמאות** שהתלמיד משתמש בהן ניקרסון ופרקינס (1985) מתארים את התופעה של "הטיות דגימה" (sampling biases), תופעה היכולה להתרחש, כמובן, גם בעבודה עם תוכנה היא מופיעה בעיקר אצל לומדים לא מנוסים אשר בוחרים לראות רק דוגמאות אשר מאשרות את הנחתם המקורית ומובילות אותם להכללות לא נכונות
2) התוכנה **איננה מדריכה כיצד לנתח** את האינפורמציה שנאספה לתלמידים יש נטיה לדחות דוגמאות שאינן מתאימות לדימוי המושג שקיים אצלם, ולתוכנה אין כל מושג, כמובן, איזה דוגמאות נדחות או מתקבלות על־ידי התלמיד מעבר לכך, יש תלמידים המעדיפים לא להשתמש באופציית ה"חזרה" של ה"משער" שהיא האפשרות המרכזית ליצור דוגמאות מבוקרות לטענתם הם עושים זאת מכיון שהם לא "מאמינים" לדוגמאות שראו והם מעדיפים לשוב ולבצע את התהליך "ידנית"
3) התוכנה מספקת דרכי אירגון של מידע חזותי ומספרי אבל **איננה מפקחת על השימוש שעושה** בו התלמיד למשל, תלמידים נכשלו בהכללות מדוגמאות מכיון שבדקו יחס בין מדידות של שני הקפים M1 ו־M2, פעם M1/M2 ופעם M2/M1 ולא הבחינו בהבדל

בעוד שבמאמר הבא אעסוק בדרכי בניית תוכנית לימודים המשלבת את ההוראה והתירגול של המיומנויות הללו, אסכם כאן כמה השפעות של למידה מתוך דוגמאות בכתות בהן הונהגה הוראה משולבת זו.

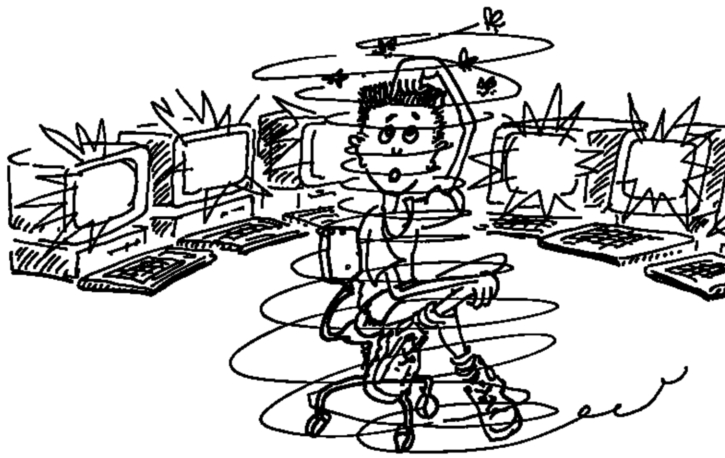
לימוד מושגים בסיסיים בגיאומטריה מתוך מדוגמאות

אחד מהכשלים החוזרים ומופיעים אצל תלמידים צעירים ומבוגרים כאחד נובע מהשפעה דומיננטית של **דימוי מושג** שאינו מכיל את **כל** האספקטים המופיעים **בהגדרת המושג** ממצאים על תופעה זו בלימוד הגיאומטריה מוצגים אצל הרשקוביץ (על"ה 10) "דימוי מושג" כזה נוצר לעתים בשל אוסף קטן מדי ולא מגוון מספיק של דוגמאות בדקנו איפוא במחקר השוואתי (Yerushalmy, 1991(b)) כיצד משפיע לימוד מיומנויות חקירה ושימוש בדוגמאות מגוונות והנאספות על־ידי התלמיד עצמו, על דרך לימוד ותפיסת מושגים בסיסיים בגיאומטריה

לאחר כשנת לימודים בעזרת המשער הגיאומטרי בכתה ח', נבחנו תלמידי כתות הניסוי ותלמידי כתות הביקורת (כולם היו אז בתחילת כתה ט') המבחן היה מבחן לבדיקת מושגים בסיסיים בגיאומטריה, שפותח על־ידי המחלקה להוראת המדעים במכון וייצמן ב־8 מתוך 11 השאלות שנכללו במבחן אובחן הבדל משמעותי לטובת תלמידי קבוצת הניסוי־
אנו נעסוק כאן בניתוח ממצאים של אחת השאלות

שאלה 7 עוסקת במושג הגובה במשולש בשאלה מוצגים משולשים מסוגים שונים ובהטיות שונות נושא על הכוונת הוא יכולתם של התלמידים לבנות בצורה נכונה גובה לצלע a במשולשים שונים

התוצאות מרוכזות בטבלה 3



טבלה 3 אחוז של תשובות תקינות לכל פריט בשאלה 7
(הפריטים מסודרים לפי שיטתם של וינר והרשקוביץ על פי CCP שמשמעו Common Cognitive Path — מסלול קוגניטיבי משותף)

פריט	1	3	6	2	4	10	11	7	8	12	14	5	9	13
קבוצה														
ניסוי (n = 46)	93 5	93 5	91 3	82.6	80.4	76 1	82 6	84 4	76 1	80 4	80 4	89.1	84 8	84 8
ביקורת (n = 99)	91 9	92 9	83 8	61 6	59 6	51 5	58 6	41 4	38 4	41 4	41 4	45 5	40 4	36 4
Chi Square	00	00	91	* 5 46	* 5 20	** 6 87	** 7 06	*** 22 16	*** 16 38	*** 17 70	*** 17 70	*** 23 05	*** 23 18	*** 27 58

תוצאות המבחן כולן מראות כי בעזרת המשער הגיאומטרי, תלמידים יצרו לעצמם את הדימוי הנכון של המושג הגיאומטרי אין ספק, כי חלק מהשיפור חל בזכות תוכנית הלימודים שחשפה את התלמידים לעבודה אינדוקטיבית ובזכות דרכי העבודה הבלתי שגרתיות (למידה בזוגות במעבדת המחשבים ודיונים קבוצתיים על הממצאים) עם זאת, היה כאן למחשב תפקיד מרכזי ככלי המאפשר לחזות במספר גדול ולא סטיריאוטיפי של דוגמאות לפי בקשת המשתמש ולפי קריטריונים מתמטיים ברורים, הוא תרם בוודאי תרומה משמעותית ביותר לשינוי שהתחולל אצל הלומד

הקשר האינדוקטיבי — דדוקטיבי

בעוד תרומת מאגר דוגמאות ליצירת דימוי מושג נכון יותר ולאיבחון התכונות הקריטיות של הגדרת המושג נראית כאפשרית, הרי הקשר בין שימוש בכמות גדולה של דוגמאות ובין הבנת גיאומטריה — מקצוע המבוסס על מערכת לוגית דדוקטיבית — נראה לא ברור ואפילו פרדוקסלי ומסוכן האם ייתכן כי **שימוש אינטנסיבי בתוכנה המייצרת "ראיות" יעלים את הצורך בהוכחה מתמטית** ובכלל, מה הקשר בין לימוד אינדוקטיבי והוכחה דדוקטיבית?

חזן (Chazan, 1988) חקר הבטים של הקשר הזה הוא אכן נוכח כי ישנם תלמידים הסוברים שאין צורך בהוכחה אחרי שדגמו מספר ראיות ממצאיו הבהירו כי

(א) יש תלמידים החושבים כי עובדה שהוכחה בדרך דדוקטיבית עדיין ניתנת לעירעור על־ידי מקרה אחר, או שהיא בעצמה מהווה דוגמא (ראה הרשקוביץ, עלייה 10)

(ב) יש תלמידים שבעיניהם ראיות הן הוכחה

ממבחנים וראיונות שערך חזן הוברר כי מחשבות אלו משותפות לתלמידים הלומדים או שאינם לומדים עם ה"משער הגיאומטרי" ובכך אין לחשיפה לדוגמאות כל השפעה שלילית תרומתו של "המשער" היא בכך שאפשר להשתמש בו ללימוד המדגיש את חשיבות ההוכחה ומבליט את הקשרים וההבדלים שבין דוגמאות וראיות לבין הוכחה חזן אף מציע לבנות את הוראת הגיאומטריה סביב שילוב של הבטים אינדוקטיביים והוכחות בבסיס הוראה כזו עומדים העקרונות הבאים

(1) **הוכחה כחלק מאינטראקציה חברתית** רעיון זה איננו חדש ומוזכר כבר אצל פוסט (Fawcett, 1938) לפי עקרון זה, ההוכחות באות בשלב בו הכתה דנה בהשערות, הגיעה למסקנה כי יש צורך בהוכחה (למשל, אם הקבוצה לא מצאה כל דוגמאות סותרות ומצאה מספיק דוגמאות תומכות) הכתה גם תדון בטיב ההוכחה ובנכונותה כלומר, ההוכחה צריכה להיות חלק מתהליך יצירה מתמטי, משותף לכתה

(2) **הוכחה ככלי בעל ערך "הסברתי"** ולא כתהליך פורמלי גרידא הבא בדרך כלל כדי לתעד מה שכבר ברור ומובן בשל חוסר במספר ובמגוון של דוגמאות המאפיין, כפי שציינו, את לימוד הגיאומטריה, באות ההוכחות לצורך תירגול מהלך דדוקטיבי בעבודה עם המשער הגיאומטרי על ההוכחה להוות את אחד הכלים ההסברתיים המיישבים את הראיות שנאספו מדוגמאות ההוכחה גם תוצג כתהליך אשר מסוגל להכליל את שנאסף בדוגמאות ולכן היא מהווה חלק הכרחי בתהליך המתמטי

(3) **לימוד הוכחה שחושף את בעיות התלמידים בקשר לתפקיד ההוכחה** אם תלמיד חושב כי ראיה היא הוכחה יש לתת לו משימות העוסקות במדידות, למשל, אשר דרכן אפשר יהיה להיווכח כי מדידות, בניגוד להוכחה, הן למספר מסויים ומוגבל של מקרים והן אינן מדוייקות פעילויות מסוג זה אפשר למצוא אצל חזן (Chazan et al, 1989)

ג. סיכום

מתברר אם כן, כי השימוש במחשב יכול אמנם להוסיף מרכיבים חדשים ללמידה מדוגמאות בסביבה רב ייצוגית, אולם בו בזמן, שימוש זה גורם למורכבות חדשה שלא הוכרחנו לטפל בה קודם ראינו, כמו כן, כי השפעת הלימוד בעזרת מחשב תלוייה מאוד בדרך ההוראה והלמידה, אולי יותר מאשר בתכונות שבתוכנה עצמה התוצאות שהוצגו מעידות בחלקן כי יש שכר לצידם של הקשיים ולכן יש צורך להמשיך להעלות רעיונות לשילוב המחשב בתוכנית הלימודים ולחקור את ביצועם על דרכי שילוב שונות בחלק הבא

רשימת ספרות

Chazan, D , Proof and Measurement an unexpected misconception, Borbas, A , *Proceedings of the 12th meeting of PME*, Hungary, 1988, 207-214

Chazan, D , Houde, R , *How to Use Conjecturing and Microcomputers to Teach Geometry*, National Council of Teaching of Mathematics, Reston, Virginia, 1989

Dugdale, S , An Undercurrent-Enhanced Approach to Trigonometric Identities, *The Journal of Mathematical Behavior*, 1990 233-288

Fawcetti, H P (1938) *The Nature of Proof*, National Council of Teaching of Mathematics, 13th year book, NY

Goldenberg, P E , Harvey, W , Lewis, P G , Umiker, RJ , West, J , Mathematical, Technical and Pedagogical Challenges in the Graphical Representation of Functions, Education Development Center Inc , Newton, MA, 1988

Holland J H , Holyoak KJ , Nisbett R E , Thagard P R (1986) *Induction Processes of Inference, Learning and Discovery*, MIT press

Hoz, R (1981) The Effects of Rigidity on School Geomerty learning *Educational Studies in Mathematics 12* 171-190

Matz, M (1982) Toward a process model for high school algebra errors *Intelligent Tutoring Systems* (Sleeman and Brown eds) Academic Press

Nemirovsky, R , Rubin, A , Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivative, TERC, Handson, vol 14, 1991

Nickerson R S , Perkins D N , Smith E E (1985) *The Teaching of Thinking*, Erlbaum publishers, NJ

Rissland (Michener), E 1977, *Epistemology, Representation, Understanding, and Interactive Exploration of Mathematical Theories*, Unpubl Doctoral dissertation, Massachusetts Institute for Technology, Cambridge, MA

Roseberry, A S , Rubin, A , Reasuning Under Uncertainty Developing Statistical Reasoning, *The Journal of Mathematical Behavior*, 1989, vol 8, 205-221

Schoenfeld, A 1986, 'On having and using geometric knowledge', in J Hiebert (ed), *Conceptual and Procedural Knowledge The Case of Mathematics*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ

Yerushalmy, M (1991a) "Students Perceptions of Aspects of Algebraic Function Using Multiple Representation Software" *Journal of Computer Assisted Learning* Blackwell Scientific Publications vol 7, 42-57

Yerushalmy, M (1991b) "Enhancing Acquisition of Basic Geometrical Concepts with the Use of the SUPPOSER" *Journal of Educational Computing Research* vol 7, 407-420

Yerushalmy, M & Chazan, D (1990) "Overcoming Visualization Obstacles with the Aid of the SUPPOSER" *Educational Studies in mathematics* vol 21 199-219

Yerushalmy, M & Gafni, R (1991) "The Effect of Graphic Representation An experiment involving algebraic transformations " In *The Proceeding of the 15th annual meeting of the Psychology of Mathematics International Group (PME)*, (vol 3 pp 372-277), Assisi, Italy