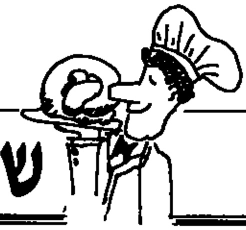

המחשבון ופיתרון משוואות

מאת גיורא מן, האוניברסיטה העברית בירושלים

מבוא

פתרון משוואות היה מאז ומתמיד פרק נכבד בתוכנית הלימודים באלגברה בביה"ס התיכון לאחר משוואות מן המעלה הראשונה הכיר התלמיד את המשוואה הריבועית כמעט תמיד היו מקדמי המשוואות מספרים שלמים, גם הפתרונות היו כרגיל מספרים שלמים, או שברים פשוטים (למשל 2/3) כאשר בתהליך הפתירה היו מופיעים מספרים "לא טובים", היו כולם — תלמידים ומורים — יודעים שמשהו השתבש או שהתלמיד טעה, או שהמורה הציג לו בטעות משוואה שפתרונותיה לא נבדקו כיאות סיבה טובה לגישה זאת הייתה העובדה שמספרים "לא טובים" גררו כמעט בהכרח עבודה טכנית ממושכת שהייתה מסתיימת בדרך כלל בפתרון שגוי במאמר זה אנסה לשתף את הקוראים בניסיון שצברתי בשימוש במחשבון להוראת פתרון משוואות מסוגים שונים, שחלקן אינו מופיע כלל בתוכנית הלימודים

משוואה ריבועית

מלאי המשוואות הריבועיות שנמצא בספרי הלימוד מצומצם למדי הוא כולל גם הרבה משוואות ריבועיות הנפתרות באמצעות פירוק לגורמים כמו, למשל, $x^2 + 5x - 6 = 0$ משוואות כאלה נפוצות בספרי לימוד עד כדי כך, שאצל חלק מן התלמידים מתקבל הרושם כי שיטת הפירוק לגורמים ישימה באותה מידה כמו האלגוריתם לפתרון המשוואה בעזרת הדיסקרימיננטה

כאשר, לעומת זאת, מציגים לתלמיד משוואות כמו $23x^2 - 47x + 31 = 0$, למשל, הוא מבין שאין לו ברירה אלא להשתמש באלגוריתם זאת הזדמנות מצויינת להפסיק את השגרה של כתיבת הפתרונות כאילו קיומם מובטח (שיטה מקובלת, כי בדרך כלל דאגו בספרי הלימוד שיהיו למשוואות פתרונות ממשיים) כך למשל, מתחיל פתרון המשוואה דלעיל בחישוב הדיסקרימיננטה (הנעשה כמובן באמצעות מחשבון)

$$\Delta = (-47)^2 - 4 \quad 23 \cdot 31 = -643$$

למזלנו, סיימנו בכך את פתרון המשוואה — קבוצת האמת היא הקבוצה הריקה

נפתור כעת את המשוואה $23x^2 - 47x - 31 = 0$ הפעם נותן חישוב הדיסקרימיננטה

$$\Delta = (-47)^2 - 4 \quad 23 \cdot (-31) = 5061$$

כיוון ש־$0 < \Delta$, מסיקים שיש שני פתרונות כדי לחשבם נוציא שורש ריבועי ונכניס את התוצאה (71 140706) לזיכרון נחשב את השורש הראשון בסדרת הקשות זו

47 ,- , MR, = , ,2, ,23, =

מקבלים 0 5247979-

בצורה דומה, נחשב את השורש השני

47 , + , MR, = , ,2, ,23, =

והתוצאה היא 2 5682762

בדיקת השורשים נעשית גם היא באמצעות המחשבון אנו מחשבים את $23x^2 - 47x - 31$ עבור כל אחד משני המספרים שמצאנו קודם, כמובן אחרי שהכנסנו את המספר לזיכרון סדרת הלחיצות לצורך הבדיקה היא

23, x, MR, x^2, -, 47, x, MR, -, 31 , =

במקרה הראשון (0 5247979-) מקבלים 0 0000034- חשוב להסביר לתלמידים שמספר זה נחשב קירוב טוב לאפס (דרך אגב, אם מכניסים את השורש הראשון לזיכרון מיד לאחר חישובו, רמת הדיוק גבוהה יותר הבדיקה נותנת בדיוק 0י הסיבה לכך היא, כמובן, שהמחשבון שומר בזיכרונו עוד ספרות שאינן מופיעות בצג. דרך פשוטה לגלותן היא להוסיף למספר שבצג את 0 5247979 למרבה ההפתעה מתקבל אז 0 0000004882- כלומר, המספר שחישב המחשבון הוא בעצם 0 52479794882- במקרה השני (2 5682762), מקבלים 0 0000007- ותוצאה זו קרובה עוד יותר לאפס

שיטת הסגירה

נתבונן במשוואה $x^2 - 4x - 1 = 0$ ונניח שטרם למדנו את האלגוריתם לפתרון המשוואה הריבועית ראשית, נרשום לפנינו את סדרת ההקשות במחשבון, המבצעת הצבה של מספר בזיכרון, בתבנית הריבועית $x^2 - 4x - 1$

MR, x^2, , 4, x, MR, -, 1, =

גם ללא מחשבון אנו רואים שהצבת 0 תיתן את התוצאה השלילית 1 אם נציב 5 נקבל תוצאה חיובית 4 מכאן אנו מסיקים שבין 0 ל־5 קיים מספר שהצבתו בתבנית הריבועית תיתן תוצאה שאינה חיובית ואינה שלילית — אפסי במילים

אחרות, "סגרנו" פתרון של המשוואה בין 0 ל־5 נציב 2 ונקבל 5 כעת אנו מבינים שהפתרון לכוד בין 2 ל־5 נציב 3 ונקבל 4- כעת כבר ברור שהפתרון "סגור" בין 3 ל־5 נציב 4 ונקבל 1- סגרנו את הפתרון בין 4 ל־5 נציב 4 5 ונקבל 1 25 כעת ברור שהפתרון סגור בין 4 ל־4 5 מבין האפשרויות — 4 1, 4 2, 4 3, 4 4 נבחר ב־4 3 ונקבל 0 29 לכן נבדוק את 4 2 הנמצא בין 4 ל־4 3, ונקבל 0 16 כיוון שהפתרון כלוא בין 4 2 ל־4 3 ננסה כעת 4 25 ונקבל 0 0625 כלומר, הפתרון נמצא בין 4 2 ל־4 25 כדי להקל על המשך התהליך של מציאת פתרון ב"שיטת הסגירה" ננהיג את הסימון הבא

תוצאה חיובית	תוצאה שלילית
5	0
	2
	3
	4
4 5	
4 3	4 2
4 25	4 23
4 24	4 235
4 238	4 236
4 237	
4 2365	
4 2363	
4 2361	4 23605
4 23607	4 23606
	4 236065
4 236068	4 236067
	4 2360675
	4 2360678
(0 0000001) 4 2360680	(-0 0000003) 4 2360679

כיוון שהגענו לרמת הדיוק המקסימלית שמאפשר לנו המחשבון, ואנו רואים שהצבתו של הגדול יותר מבין שני המספרים נותנת תוצאה קרובה יותר לאפס, נסתפק ב־4 2360680 כבקירוב טוב למדי של הפתרון (דרך אגב, זו גם התוצאה שנקבל אם נפעיל את האלגוריתם') הפעם נוכל למצוא גם את הספרות הבאות ולגלות שבעצם מדובר ב־4 2360679774 גם את הפתרון השני של משוואה זו (0 2360679) נוכל למצוא ב"שיטת הסגירה" (או באמצעות האלגוריתם), אבל אנו נתעניין בגישה הניתנת ליישום גם במשוואות ממעלה גבוהה יותר

חילוק פולינומים

נניח ש־M הוא מספר כלשהו בזכרון המחשבון ננסה כעת למצוא מספרים A ו־R כך ש

$$x^2 - 4x - 1 = (x - M)(x - A) + R$$

ביצוע הכפל באגף ימין נותן לנו

$$x^2 - 4x - 1 = x^2 - (M + A)x + MA + R$$

לפיכך $M + A = 4$ ו־ $MA + R = -1$ נובע מכאן ש $A = 4 - M$, ולכן $R = M^2 - 4M - 1$

לסיכום, אנו יכולים לחלק פולינום ממעלה שניה בפולינום ממעלה ראשונה ולקבל גם את המנה $(x + M - 4)$ וגם את השארית $R = M^2 - 4M - 1$ במקרה המוצלח שבו M הוא פתרון של המשוואה, מתאפסת השארית (מדוע?) כלומר, אם M הוא פתרון של המשוואה הריבועית $x^2 - 4x - 1 = 0$ אז המשוואה $(x - M)(x - A) = 0$ שקולה לה, ולכן גם $A = 4 - M$ הוא פתרון שלה הפתרון השני הוא על־כן,

$$4 - 4\ 236068 = -0\ 236068$$

השיטה לחילוק פולינומים אינה חיונית לפתרון משוואה ריבועית, אך השילוב שלה, של שיטת הסגירה ושל האלגוריתם לפתרון המשוואה הריבועית, יוצר אלגוריתם המאפשר פתרון כל משוואה ממעלה שלישית

משוואה ממעלה שלישית

נתבונן במשוואה $x^3 - 5x + 1 = 0$, וננסה למצוא פתרון שלה בשיטת הסגירה להלן סדרת החישובים עם הפתרון

תוצאה חיובית	תוצאה שלילית
3	1
2 5	2
2 3	2 1
2 2	
2 15	
2 13	2 11
	2 12
	2 125
2 129	2 128
2 1285	2 1283
2 12845	2 1284
2 12843	2 12841
2 12842	2 128415
	2 128418
2 1284195	(-0 0000005) 2 128419
2 1284193	
(0 0000003) 2 1284191	

רואים כי $M = 2\ 1284191$ הוא פתרון של המשוואה ממעלה שלישית ננסה כעת לחלק את הפולינום $x^3 - 5x + 1$ בפולינום $x - M$ במלים אחרות, נחפש מספרים A, B ו־R כך ש

$$x^3 - 5x + 1 = (x - M)(x^2 - Ax - B) + R$$

נפתח את הסוגריים באגף ימין ונקבל

$$x^3 - 5x + 1 =$$

$$x^3 - (M + A)x^2 + (MA - B)x + (MB + R)$$

מכאן נובע $M + A = 0$ ו־ $MA - B = -5$ ו־ $MB + R = 1$

לכן, $A = -M$, ו־$B = 5 - M^2$, ו־ $R = M^3 - 5M + 1$

אם M הוא פתרון של המשוואה יוצא ש־ $R = 0$, כלומר המשוואה הנתונה שקולה למשוואה

$$(x - M)(x^2 + Mx + M^2 - 5) = 0$$

ברור ששאר הפתרונות של המשוואה הנתונה הם פתרונות המשוואה הריבועית $x^2 + Mx + (M^2 - 5) = 0$ שהדיסקרימיננטה שלה שווה ל

$$M^2 - 4(M^2 - 5) = 20 - 3M^2 = 6.4094964,$$

ושני שורשיה (לפי האלגוריתם של המשוואה הריבועית) הם 2.3300587- ו־0.2016396 נוכל לוודא בקלות שאלה הם אמנם פתרונות של המשוואה המקורית $x^3 - 5x + 1 = 0$

מתעוררת, כמובן, השאלה האם השיטה טובה לכל משוואה ממעלה שלישית. חלק מן התלמידים עשויים אף לשאול מי מבטיח בכלל שיש לכל משוואה ממעלה שלישית פתרונות ממשיים (במקרה של משוואה ריבועית יתכן בהחלט שלא יהיו פתרונות ממשיים!) זה המקום ללמד את התלמידים שכאשר מדובר במספרים גדולים בערכם המוחלט קובעת החזקה השלישית בכל פולינום ממעלה שלישית את תוצאת ההצבה בפולינום. זאת, הן מבחינת הסימן והן מבחינת ערכה המוחלט (השגיאה היחסית כאשר משמיטים את שאר החזקות הופכת זניחה כאשר הערך המוחלט של ההצבה שואף לאינסוף). משום כך מובטח בכל מקרה שאם נלך שמאלה על ציר המספרים, נגיע תמיד למספר שהצבתו בפולינום תיתן תוצאה שלילית (אם המקדם של x^3 חיובי). מאידך, אם נלך די רחוק ימינה נגיע למספר שהצבתו בפולינום תיתן תוצאה חיובית (ולהיפך במקרה שהמקדם של x^3 שלילי). מכאן ששיטת הסגירה תפעל תמיד במקרה של משוואה ממעלה שלישית.

משוואות אחרות

שיטת הסגירה שאיפשרה חישוב מקורב של שורשי משוואות ממעלה שלישית ישימה גם למשוואות אחרות, כאשר מנצלים לצורך זה גם ידע על גרפים של פונקציות (רצוי בסיוע מחשב או מחשבון גרפי). נדגים את הרעיון במקרה של המשוואה $\log x = \cos x$. כדי לקבל מושג כללי על פתרונות המשוואה, נשרטט את הגרפים של שתי הפונקציות $y = \log x$ ו־ $y = \cos x$ במערכת צירים אחת.

מן הגרפים אנו למדים שיש למשוואה בדיוק שלושה פתרונות, הנמצאים בין 1 ל־2, בין 5 ל־6 ובין 6 ל־7. אין כל בעיה לחשב כעת את שלושת הפתרונות של המשוואה בשיטת הסגירה, כאשר אנו מתיחסים לתבנית המספר $\log x - \cos x$. כלומר, אם הכנסנו מספר לזכרון המחשבון, סדרת ההקשות היא

MR, LOG, -, MR, COS, =

(אל תשכח לשים את המחשבון במצב RAD כדי לקבל את הפונקציה המעגלית COS). הפתרונות הם 1.4184065, 5.552112 ו־6.8630821.

סיכום

השתדלתי להביא במאמר זה כמה רעיונות לניצול המחשבון (או המחשב, אם הוא מצוי בהישג יד) לצורך פתרון משוואות. קפיצת הרמה הטכנית המתאפשרת בזכות הטכנולוגיה החדשה מחייבת גם שיקולים מתמטיים חשובים, שאינם מופיעים על פי רוב בזמן הלימוד הקלאסי של פתרון משוואות. יש כאן הזדמנות ללמוד על רציפות (אם פונקציה רציפה מקבלת ערכים הפוכי סימן בקצות קטע, אזי היא חייבת לקבל את הערך אפס בתוך הקטע — הבסיס הרעיוני לשיטת הסגירה), להשוות אלגוריתמים (למשל שיטת החצייה במקום שיטת הסגירה), להכרת המשפט על התחלקות פולינומים (אם M הוא שורש של הפולינום $P(x)$, אזי $(x - M)$ מחלק את $P(x)$ ללא שארית), וכן לניצול כלים גרפיים (רצוי ממוחשבים) על מנת לקבל נתונים ראשוניים על פתרונות משוואה. חשוב להדגיש שאת כל הרעיונות המוצגים במאמר זה ניסיתי בכיתה, ובהצלחה. רצוי שהקוראים ינסו גישות כאלה בכיתותיהם כדי לקבל משוב בלתי אמצעי מתלמידיהם לקראת השינוי המתבקש בתוכנית הלימודים.

איור 1