הנושא: **שאלות עם מספר רב של תשובות נכונות**

הוכן ע״י: אורית זסלבסקי, הטכניון חיפה.

תקציר: במאמר מדגימה הכותבת את הפוטנציאל הגלום בהצגת בעיות שיש להן מספר תשובות נכונות. בעיות מסוג זה ניתן ליצור פעמים רבות ע״י שינויים קלים בבעיות שלהן פתרון יחיד. במאמר מתייחסת הכותבת להיבטים שונים של העיסוק בבעיות שלהן מספר תשובות נכונות: חשיפה לגישות שונות לפתרון, הובלת התלמידים להכללות, סיפוק צורך אמיתי להנמקה או להוכחה, יצירת קשר בין תחומים מתמטיים שונים והגברת העניין שבלימוד המתמטיקה.

מילות מפתח: הוראת מתמטיקה, בעיות מתמטיות, שיטות הוראה, אלגברה, פרבולה, קו ישר.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 14, ניסן תשנ״ד, מרץ 1994, עמודים 56-60.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 8 עמודים.

שאלות עם מספר רב של תשובות נכונות

הסטנדרטים של ה- NCTM (NCTM 1989) להוראה מעודדים את השימוש בשאלות המעוררות אינטראקציה בין התלמידים ורב-שיח כיתתי. שאלות שיש להן מספר רב של תשובות נכונות יכולות לסייע ביצירת אינטראקציה כזאת על-ידי כך שתלמידים שונים יגיעו לתשובות שונות וינסו להשוות את מה שהם מצאו עם מימצאים של חבריהם (Socha ,1991). נוסף על תרומתן של שאלות מסוג זה ליצירת רב-שיח כיתתי, הן יכולות להתאים לתלמידים ברמות שונות: כל תלמיד יכול למצוא לפחות תשובה אחת נכונה, ולו רק על-ידי ניסויי וטעייה, ואילו לתלמידים החזקים והמתעניינים יש אפשרות להגיע למספר גדול יותר של תשובות והזדמנות להעלות השערות המוליכות להכללות שונות, להצדיקן או להפריכן.

באמצעות שאלות שיש להן מספר רב של תשובות נכונות יכול המורה, במקרים רבים, לחשוף דרכי חשיבה שונות של התלמידים, שחלקן מצביע על תפיסות שגויות שלהם. תפיסות אלה לא תמיד באות לידי ביטוי בשאלות סטנדרטיות בעלות פתרון יחיד, שדרך שגורה מובילה אליו. שילוב שאלות עם מספר רב של תשובות נכונות יכול להביא את התלמידים לראות בדרך שונה את טבעה של המתמטיקה ואת דרך הוראתה. לא עוד מקצוע סגור, ובידי המורה יש ספר הלימוד ובו התשובה הנכונה לכל בעיה וכל מה שעל התלמיד לעשות הוא לנסות "לקלוע" לתשובה זו; בזכות השאלות עם פתרונות מרובים תהפוך המתמטיקה למקצוע פתוח ליצירה, לחידושים ולהעלאת שאלות. לא לכל בעיה יש נתונים מספיקים כדי לפתור אותה באופן יחיד או חד-משמעי.

את הפוטנציאל שבשאלות עם מספר רב של תשובות נכונות נדגים על-ידי דוגמה וניתוח האפשרויות הגלומות בה. ניתוח זה מבוסס על התנסות בפועל עם קבוצת מורים למתמטיקה[1] ודיווח של אחדים מהם על התנסויות דומות בכיתות שלהם.

דוגמה

נתבונן בשאלה הבאה:

מצאו את מספר נקודות החיתוך של הפרבולה שמשוואתה: $y = x^2 + 4x + 5$
עם הישר: $y = 2x + 5$.

שאלה מסוג זה נפוצה בספרי הלימוד והדרך לפתור אותה שגורה, בדרך כלל, בידי מורים ותלמידים למתמטיקה. סביר להניח שתלמידים יפתרו את מערכת המשוואות (של הפרבולה והישר) ואולי אף ילוו את פתרונם בתיאור גרפי של הבעיה. אחדים אולי יסתפקו בקביעת מספר הפתרונות, מבלי לפתור עד הסוף את מערכת המשוואות. קשה לצפות לגישות ולתשובות מגוונות לשאלה. אולם שינוי קל של אותה השאלה יכול להביא לשינוי משמעותי בסוג האינטראקציות בכיתה ובסוג החשיבה שהתלמידים נחשפים אליה.

נתבונן, למשל, בשאלה הבאה, שמתקבלת על-ידי שינוי קל של השאלה המקורית:

מצאו משוואה של ישר החותך בשתי נקודות שונות את הפרבולה שמשוואתה $y = x^2 + 4x + 5$.

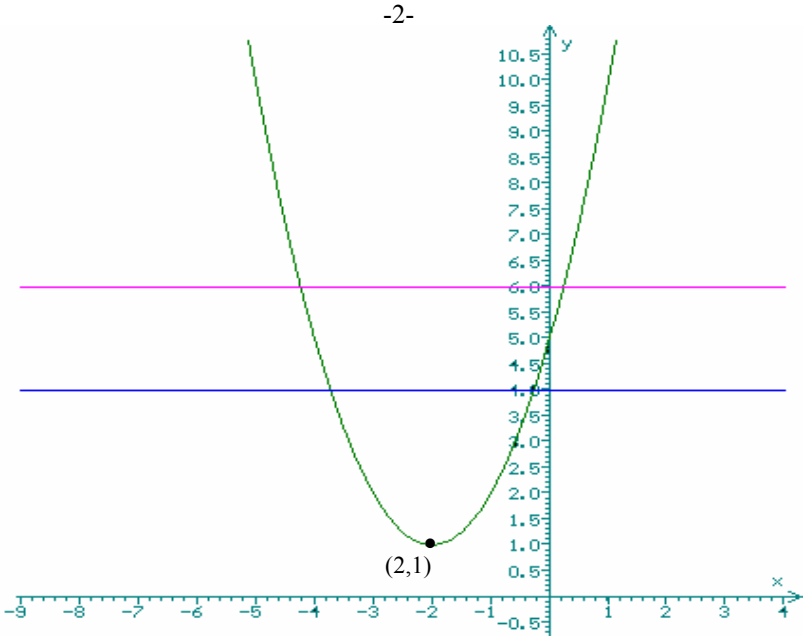
להלן ארבע גישות אפשריות לפתרון הבעיה החדשה.

גישה 1

נעביר ישר מקביל לציר ה- x, שיעבור מעל לקדקוד הפרבולה.

שיעורי הקדקוד הם: (1, -2), לכן הישר $y = 4$, למשל, חותך את הפרבולה בשתי נקודות. אפשר, כמובן, לבחור ישר אחד, למשל $y = 6$ (ראה איור 1).

[1] חלק מהבעיות המופיעות במאמר כבר הוצגו על-ידי המחברת, ביחד עם אלכס קופרמן ושולה ויסמן, במסגרת השתלמות מורים



איור 1

כך, באופן טבעי, למרות שלפי נוסח הבעיה מספיק למצוא ישר אחד, עולה השאלה כמה ישרים שונים החותכים את הפרבולה בשתי נקודות אפשר למצוא? לפי גישה זו, כל ישר מהמשפחה $y = c$, ובתנאי ש- $c > 1$, יקיים את תנאי הבעיה. כלומר, אפשר למצוא בגישה זו אינסוף ישרים שונים שיהיו תשובה לשאלה.

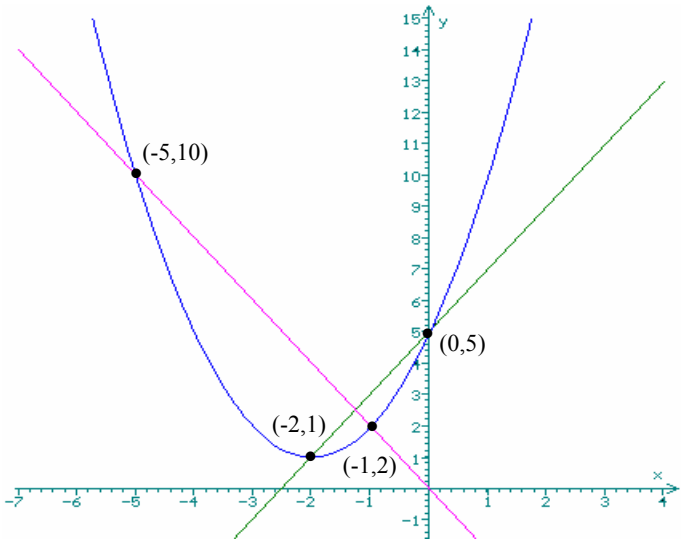
מיד עולות שאלות נוספות, כגון

- מה קורה אם $c = 1$?
- האם משפחה זו של ישרים כוללת את כל הישרים שמקיימים את תנאי הבעיה, כלומר, חותכים את הפרבולה בשתי נקודות?

גישה 2

נמצא שתי נקודות על הפרבולה ונעביר דרכן ישר.

נבחר, למשל, את הנקודות (1, -2) (קדקוד הפרבולה) ו- (5, 0). את משוואת הישר העובר דרך שתי הנקודות הללו אפשר למצוא בקלות: $y = 2x + 5$. אפשר, כמובן, לבחור שתי נקודות אחרות על הפרבולה, למשל (2, -1) ו- (10, -5), ולקבל את הישר - $y = -2x$ (ראה איור 2)



איור 2

גם לפי גישה זו עולות שאלות שונות, כגון

- אילו שתי נקודות יש לבחור, כדי לקבל ישר מהמשפחה שקיבלנו בגישה הראשונה, כלומר ישר מהמשפחה $y = c$, כאשר $c > 1$?
- האם בדרך זו אפשר למצוא כל ישר שחותך את הפרבולה בשתי נקודות שונות?
- כיצד אפשר לתאר באופן כללי את כל הישרים המתקבלים לפי גישה זו?

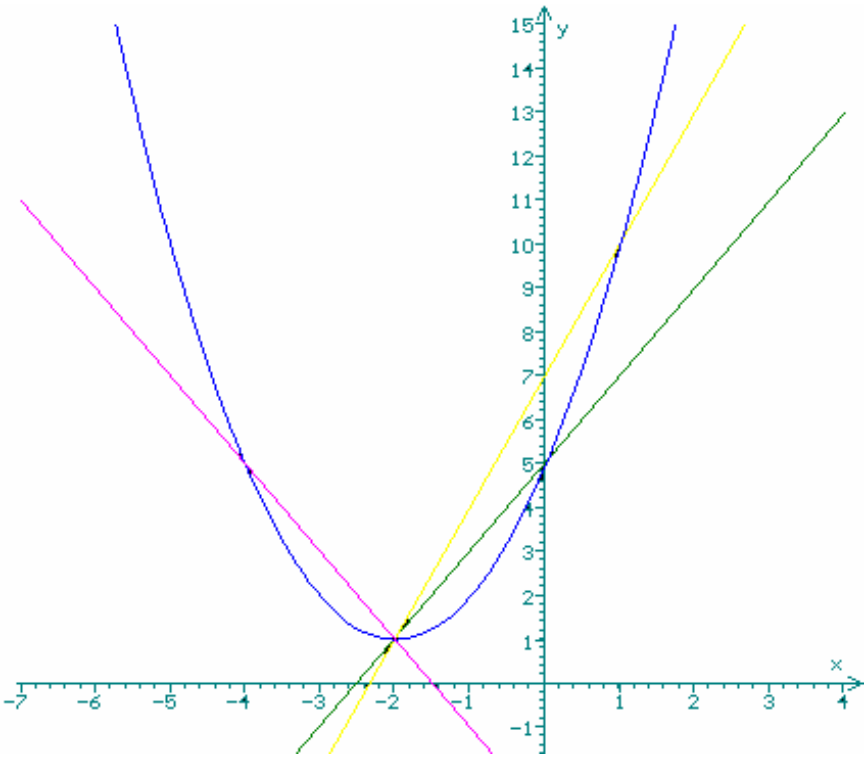
התשובה לשאלה האחרונה איננה פשוטה ודורשת הכללה ברמה גבוהה.

גישה 3

נמצא נקודה כלשהי על הפרבולה ונקבע את שיפוע הישר העובר דרכה, כך שיחתוך את הפרבולה בנקודה נוספת.

נבחר נקודה על הפרבולה, למשל הקדקוד (1, -2), ושיפוע, למשל 3. מכאן אפשר למצוא בקלות את משוואת הישר, שהיא $y = 3x + 7$ (ראה איור 3). יש מקום לעורר בתלמידים את הצורך לבדוק שלישר הזה אמנם קיימת נקודת חיתוך נוספת עם הפרבולה הנתונה. בדיקה כזאת יכולה להביא את התלמידים לפתור מערכת משוואות מן הסוג המופיע בגרסה המקורית של הבעיה מתוך הכרה בצורך לעשות זאת, ולא רק משום שזוהי דרישת המורה. כלומר, במקום שפתרון מערכת המשוואות יהיה המטרה, הוא יכול להיות אמצעי להשגת מטרה מעניינת יותר, שנובעת משאלות של התלמידים עצמם.

אפשר, כמובן, להגיע לישר אחר על-ידי קביעת שיפוע אחר, למשל -2. כך מתקבל הישר שמשוואותו $y = -2x - 3$ (איור 3). שוב נוצרת הזדמנות טבעית לתרגל (לפחות באופן חלקי) פתרון של מערכת משוואות, כדי לוודא שגם לישר הזה נקודת חיתוך נוספת עם הפרבולה.



איור 3

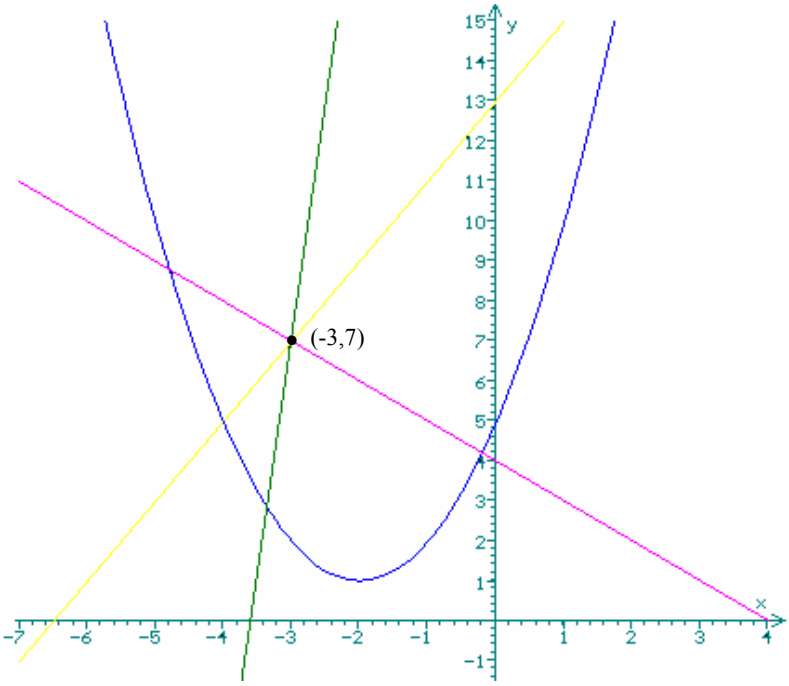
גישה זו מעלה שאלות רבות, כגון
- האם לכל שיפוע שנבחר, הישר העובר דרך קדקוד הפרבולה חותך אותה בנקודה נוספת?
- מה אם נבחר ישר ששיפועו 1?
- ומה אם הישר מקביל לציר ה- y?
- מה אם נקבע נקודה אחרת על הפרבולה - אילו מספרים אפשר לבחור כשיפוע של ישר, כך שיובטח כי אם הישר עובר דרכה הוא יחתוך את הפרבולה בנקודה נוספת?

התשובה לשאלה האחרונה מתקשרת למושגים מתחום האנליסה - הנגזרת והמשיק, כי כדי להבטיח שלישר שנבחר תהיה נקודת חיתוך נוספת עם הפרבולה, יש לדאוג לא לבחור כשיפועו את שיפוע המשיק לפרבולה בנקודה שנקבעה.

גישה 4

נמצא ישר כלשהו, שאיננו מקביל לציר ה- y, העובר "בתוך" הפרבולה.

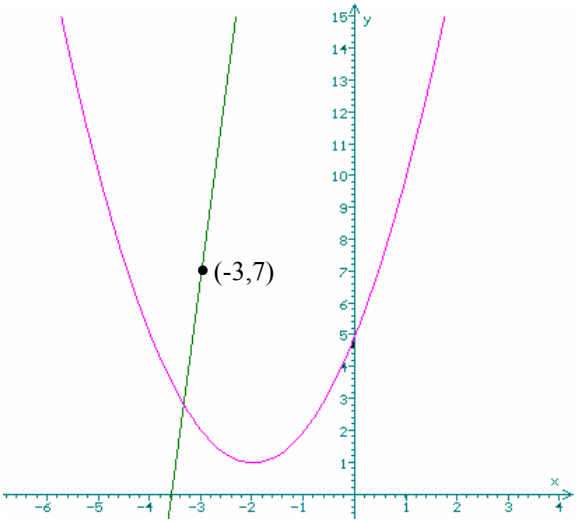
כדי להבטיח שהישר יעבור בתוך הפרבולה נקבע נקודה בתוכה, שדרכה יעבור הישר. נקבע, למשל, את הנקודה (7, -3), ונבחר שיפוע עבור הישר, למשל -1. מכאן מתקבל הישר שמשוואתו $y = -x + 4$. ישר זה עובר בתוך הפרבולה. אם נבחר שיפוע אחר, למשל, 2, יתקבל הישר: $y = 2x + 13$ (ראה איור 4). גם בגישה זו, בדומה לגישה 3, יש מקום לעורר את הצורך לבדוק את ההשערה, שלכל אחד מהישרים הללו אומנם יש שתי נקודות חיתוך עם הפרבולה.



איור 4

גישה זו מוליכה לשאלות נוספות, כגון
- האם לכל ישר העובר דרך הנקודה (7, -3) ואיננו מקביל לציר ה- y יש שתי נקודות חיתוך עם הפרבולה הנתונה?
- מה אם השיפוע גדל, למשל, ל- 12?
- האם גם לישר $y = 12x + 43$ יש שתי נקודות חיתוך עם הפרבולה?

באיור 5 מתוארים הפרבולה הנתונה וישר ששיפועו 12 העובר דרך הנקודה (7, -3), הנמצאת בתוך הפרבולה. כמה נקודות חיתוך יש לפרבולה ולישר?

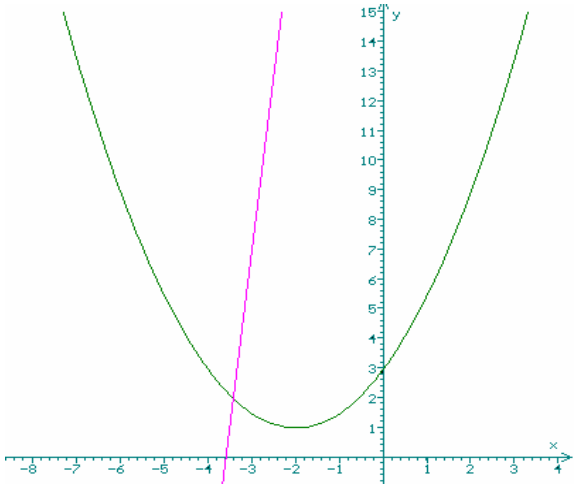


איור 5

בגלל מגבלות הדף נראה כאילו לישר ולפרבולה יש רק נקודת חיתוך אחת. הסתמכות על מה שנראה לעין לצורך אינטרפטציה של גרף היא תופעה נפוצה, ויש מקום לזמן מצבים החושפים תפיסות מוטעות הנובעות מכך (Leinhardt et al. 1990, Zaslavsky, 1990). במקרה זה, פתרון אלגברי של המשוואה: $x^2 + 4x + 5 = 12x + 43$ מוכיח שלמשוואה זו יש שני שורשים ממשיים (הדיסקרימיננטה חיובית). פירוש הדבר שקיימת נקודת חיתוך נוספת שאיננה מופיעה באיור, ואף קשה לדמיין אותה, מכיון שנראה כאילו הפרבולה הולכת ומתרחקת מהישר. זאת הזדמנות טבעית להיעזר במחשב או במחשבון גרפי כדי לשרטט את הפרבולה והישר בתחום המאפשר לראות את שתי נקודות החיתוך, או לפחות את נקודת החיתוך הנוספת.

אפשר להמשיך ולשאול:

- מה אם ניקח נקודה אחרת בתוך הפרבולה?
- האם לכל ישר העובר דרכה ואיננו מקביל לציר ה- y יש שתי נקודות חיתוך עם הפרבולה הנתונה?
- מה אם הנקודה קרובה יותר לגרף, למשל (7, -4) והשיפוע גדול?
- ומה אם הפרבולה הנתונה "רחבה" יותר, למשל, $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$? האם כל ישר העובר בתוכה ואיננו מקביל לציר ה- y חייב לחתוך גם אותה בשתי נקודות? (ראה איור 6).



איור 6

דיון בשאלות אלה יכול להביא להבנה עמוקה יותר של מושג הפרבולה והתנהגותה כאשר ערכי x הולכים וגדלים או קטנים בלי סוף. זוהי הזדמנות לעסוק במושגים נוספים כמו מושג הגבול ומושג האין סוף, גם אם ברמה אינטואיטיבית בלבד.

בעיות נוספות עם מספר רב של תשובות נכונות

הדוגמה לעיל מדגימה את הרעיון, שאפשר להעשיר ולגוון את סיטואציות הלמידה בכיתה באמצעות שינויים קלים בבעיות ובתרגילים השגורים בספרי הלימוד, וזאת מבלי לסטות מתכנית הלימודים המחייבת וללא השקעה מרובה מדי מצד המורה בבניית בעיות חדשות. להלן דוגמאות אחדות של בעיות עם מספר רב של תשובות נכונות המבוססות על בעיות רגילות שמצויות בספרי הלימוד.

1. מצאו מספר טבעי הנותן שארית 1 בחילוק בכל אחד מהמספרים: 2, 3, 5, 8.
2. הציבו מספר במשבצת: $17 \cdot 5 + 83 \cdot \square$, כך שהסכום שיתקבל יהיה קטן מ- 500.
3. עבור איזה ערך של a תתקבל משוואה שיש לה פתרון חיובי, אם נתון: $2x + a = -5$?
4. רשמו איבר במקום הריק (האחרון), כך שיהיה אפשר לפרק לגורמים את הביטוי: $x^2 - x - \square$.

   הערה: השוו את הבעיה הזאת עם תרגיל מן הסוג: "פרקו לגורמים את הביטוי: $x^2 - x - 6$".
5. רשמו משוואה שהפתרון שלה הוא $\frac{1}{2}$.
6. מצאו משוואת ישר העובר דרך הנקודה (1, -3).
7. נתון הישר: $y = 3x + 2$. מצאו משוואה של ישר החותך את הישר הנתון.
8. מצאו משוואה ריבועית שיש לה בדיוק שורש ממשי אחד.
9. מצאו משוואת פרבולה שקדקודה (-1, 2).
10. מצאו משוואת פרבולה העוברת דרך הנקודות (5, 2) ו- (5, -2).
11. מצאו משוואת פרבולה החותכת את ציר ה- x בנקודות: (0, -5) ו- (0, 2).
12. מצאו משוואה של פונקציה ממעלה שלישית החותכת את ציר ה- x בנקודות (0, -5) ו- (0, 2).
13. מצאו זוג מספרים (x ,y) המקיימים את השוויון: $\log (x+y) = \log x + \log y$.
14. תנו דוגמה של פונקציה שמתאפסת ב- 0 ובעלת נגזרת ראשונה שהיא שלילית בכל התחום שלה.
15. בנו מקבילית לפי אלכסוניה.

דיון מסכם

הפיכת שאלה או בעיה רגילה שיש לה בדיוק תשובה אחת נכונה לבעיה עם מספר רב של תשובות נכונות עשויה להיות כרוכה בשינוי קל בלבד. אולם השינוי הקטן בבעיה יכול לגרום לשינוי מרחיק לכת בסוג הלמידה המתרחשת. שילוב בעיות עם מספר רב של תשובות נכונות יכול לתרום ללמידה במספר כיוונים.

חשיפה לגישות שונות

כפי שהודגם לעיל, תשובות שונות לבעיה יכולות לנבוע מגישות שונות לפתרון. גיוון התשובות יכול לעורר סקרנות אצל כל תלמיד להשוות בין תשובתו לתשובות חבריו, ולשם כך להקשיב לאחרים ולהתעמק בהצעותיהם. הדוגמה שהוצגה לעיל בפירוט רב מדגימה את אחד העקרונות של בעיות מסוג זה: הכוונה היא שכמעט כל תלמיד יוכל לגשת אל הבעיה, כל אחד לפי יכולתו, ולהגיע לאיזושהי תשובה נכונה. באופן כזה, מעורבות התלמידים והפתיחות שלהם זה לדברי זה, עשויים להתחזק.

הכללה בכיוונים שונים וברמות שונות

למרות שהבעיות שהוצגו במאמר אינן מחייבות הכללה כלשהי אלא דורשות דוגמה מסוימת אחת, הרי שעצם ריבוי התשובות הספציפיות הנובעות, לעיתים, מבחירה אקראית של מספר או נקודה, מעוררות שאלות מהסוג:
- מה מיוחד בנתון מסוים שתלמיד זה או אחר בחר?
- האם כל בחירה של מספר, למשל, תביא לתשובה נכונה?
- אילו מגבלות יש לגישה מסוימת? ועוד.
באופן כזה יכולה כל גישה לפתרון להוליך באופן טבעי, מתוך שאלות של התלמידים עצמם, להכללות בכל מיני רמות.

סיפוק צורך אמיתי להנמקה, להצדקה ואף להוכחה

אין לצפות מהמורה להיות מוכן מראש עם כל התשובות הנכונות לבעיה מן הסוג שהודגם, וגם אין בטחון שהמורה יחשוב מראש על כל הגישות האפשריות לפתרון. לכן, המצב המקובל שבו המורה הוא המקור היחיד כמעט לאישור נכונות התשובות מוכרח להשתנות. שינוי זה מחייב את התלמידים למצוא דרכים לשכנע את עצמם ואת חבריהם בנכונות דרכם. מכאן עולה צורך פנימי לנמק, להצדיק, ואולי אף להוכיח - לא מתוך דרישה חיצונית של המורה, אלא כחלק מהתקשורת המתמטית הנוצרת בין המורה לתלמידים ובינם לבין עצמם.

יצירת קשר בין תחומים שונים במתמטיקה

הדוגמה שלעיל מדגימה כיצד אפשר לקשר בין בעיה הנוגעת למצב ההדדי בין קו ישר לפרבולה - בעיה שאפשר לדון בה במסגרת לימודי האלגברה בסוף חטיבת הביניים, לבין מושגים מתקדמים באנליסה כמו המשיק, נגזרת, גבול, אין-סוף. גישות שונות לפתרון הבעיה יכולות לפתוח פתח לתחומים שונים במתמטיקה ולמנוע מהתלמידים לפתח דימוי של המתמטיקה כאוסף של נושאים בלתי תלויים ובלתי קשורים.

הגברת העניין בלימוד המתמטיקה

מצבים שבהם כל תלמיד יכול לתרום לשיעור על-ידי מתן תשובה מיוחדת משלו ולחדש לעיתים אפילו למורה, יכולים לעורר עניין ולהניע את התלמידים לקחת חלק פעיל יותר בשיעורים. נוסף על כך, באמצעות בעיות עם מספר רב של תשובות נכונות אפשר להביא את התלמידים לתרגל ביצוע של מניפולציות אלגבריות שונות ולפתור בעיות סטנדרטיות כחלק מסיטואציה מעניינת יותר וכאמצעי להשגת מטרה שהם עצמם הציבו.

רשימת ספרות

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics, Commision on Standards for School Mathematics (1989). *Curriculum and Evalution Standards for School Mathematics*, Reton, VA.: The Council.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching, *Review of Educational Research* 60 (1), 1-64.

Socha, S. (1991). Questions with Multiple Answers, *Mathematics Teacher* 84, 638-640.

Zaslavsky, O. (April, 1990). *Conceptual obstacles in the learning of Quadratic Functions,* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Boston.