גישה אלגוריתמית לעומת גישה אינסטרומנטלית בחינוך מתמטי

יהודית גל־עזר, האוניברסיטה הפתוחה
גדעון צבס, אוניברסיטת תל־אביב

רקע

המוטיבציה לכתיבת שורות אלה היא השימוש המוטעה במינוח חשיבה או גישה אלגוריתמית, בהקשר של פתרון בעיות מתמטיות (ראה למשל [10]) במקרים רבים הכוונה היא לחשיבה "מכנית" או "אינסטרומנטלית" ([9]), כמו למשל שיטת "עריפת הראשים" במקרה של גזירת החזקה ה־n־ית של x ה־n שבחזקה "יורד" ומכפיל את x, ובחזקה נשאר אחד פחות שיטה מכנית זו, ספק אם יש בה חשיבה או הבנה כלשהם הוא הדין לגבי דוגמאות נוספות שיובאו בהמשך

אפשר להבחין בשלוש גישות שונות לפתרון בעיות, גישה מתמטית צרופה, גישה אלגוריתמית וגישה אינסטרומנטלית אם רוצים לאפיין כל אחת מן הגישות במשפט אחד, אפשר לומר בקצרה כי בגישה המתמטית הצרופה דנים בתנאים לקיום הפתרון, ולכל היותר מנסים לתת עבורו נוסחה או ביטוי אנליטי, שלא תמיד מאפשרים לבנותו ממש בגישה האלגוריתמית מתעניינים גם בבניית הפתרון הלכה למעשה, כולל שיקולי יעילות ונכונות, ואילו הגישה האינסטרומנטלית מביאה לתיאור מכני "רדודי" של מתכון קבלת הפתרון

בנושא של חשיבה אלגוריתמית כבר דנו מדענים רבים, ביניהם אחדים מן הבולטים בדורנו כמו Maurer, Knuth ו־Ralston ([6], [7], [8]) מדענים אלה מדברים בעיקר על חשיבה אלגוריתמית ובמה היא דומה לחשיבה מתמטית או שונה ממנה Knuth, למשל, נותן את הקווים המשותפים לשתיהן " Formula manipulation, representation of reality, reduction to simpler problems, abstract reasoning, information structures" כמו כן הוא מציין כי לחשיבה המתמטית סממנים נוספים כמו הטיפול באינסוף, ואילו החשיבה האלגוריתמית כוללת תמיד גם שיקולי יעילות

השימוש המטעה במושג חשיבה אלגוריתמית נובע אולי מן העובדה שאלגוריתמים מבוצעים בימינו באמצעות מכונות־מחשבים זו אולי גם הסיבה שהמדע העוסק באלגוריתמיקה נקרא בארצות רבות "מדעי המחשב" ולא אלגוריתמיקה, כפי שמציעים Knuth והראל ([6], [4]) בארצות אחרות אגב, מכונה מדע זה לעתים "אינפורמטיקה" או "קיברנטיקה"

הדעה הטוענת כי חשיבה אלגוריתמית מדגישה רק את הצד האינסטרומנטלי היא מגמדת ומוטעית כל שאפשר לומר הוא כי הגישה האינסטרומנטלית מתרכזת בעצם ההוצאה לפועל של אלגוריתם בצורה מכנית, כפי שהדבר מתבצע על־ידי מכונה

לדעתנו המושג חשיבה אלגוריתמית כולל לא רק הוצאה לפועל של מתכון לפתרון בעיה, אלא גם את הדרך אשר בה נבנה המתכון ומדוע הוא תקף חשיבה אלגוריתמית תמיד תכלול גם שיקולים של יעילות החישוב ונכונותו דווקא משום כך ראוי שהמושג אלגוריתם יתפוש מקום מרכזי מאוד בחינוך המתמטי

קשה לרדת לעומקם של דברים אלה ללא דוגמאות אחדות כדוגמה פשוטה ביותר אפשר להסתכל על פתרון משוואה ליניארית כגון $2x + 3 = 5x - 4$ על־פי הגישה האינסטרומנטלית, כדי לחשב את x יש לבודד אותו, ואת זאת משיגים על־ידי ביצוע פעולות מן הצורה "העבר מחובר מאגף לאגף ושנה את סימנו"

אולי אין רע בכך שתלמיד ישתמש בכלל מסוג זה בסופו של דבר כדי להקל על הזיכרון, אולם כדי שלפעולותיו יהיה ערך אינטלקטואלי מתמטי, עליו להבין מדוע הוא מפעיל כלל כזה כלומר עליו להבין כי כשנתונה לפיו משוואה לפתרון, אגפיה מאוזנים, ומשמעות פעולות אלה הן החסרת מחוברים שווים משני האגפים, כך שהאיזון יישמר ותתקבל צורה פשוטה יותר של המשוואה בדרך לפתרון

על־פי הגישה האלגוריתמית מנסחים את דרך הפתרון בצורת מתכון לפתרון משוואה ליניארית כללית $(ax + b = cx + d)$, **יחד עם** הנימוקים המתמטיים מדוע המתכון תקף ומביא לפתרון המשוואה הגישה האלגוריתמית כורכת אפוא את האיך עם המדוע

כדוגמה שנייה נביא חישוב של מכנה משותף לצורך חיבור או חיסור של ביטויים אלגבריים בגישה אינסטרומנטלית נהוג לדבר על "כפל בהצלבה", מבלי בהכרח להבין את משמעותו של הליך זה שוב, אין רע בכך שנשתמש בהכפלה בהצלבה כאמצעי לזכור את הפעולות שיש לבצע, אך ברוח של גישה אלגוריתמית הנותנת גם את ההצדקה והתוקף לפעולות אלה

נעבור עתה לדוגמאות אחדות יותר מפורטות, כדי להבהיר מה מותר הגישה האלגוריתמית מן הגישה האינסטרומנטלית, בכל הנוגע לחינוך מתמטי

חישוב שורש ריבועי

נניח שברצוננו לחשב את השורש הריבועי של 3 (כלומר את $\sqrt{3}$) בגישה האינסטרומנטלית מוצע להתחיל עם ערך התחלתי x_0 ובהמשך לחשב בזה אחר זה את איברי הסדרה על־פי המרשם

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right) \tag{1}$$

אפילו במקרים שבהם לא ניתנת נוסחה זו בצורה מוצנחת לחלוטין, ניתן הסבר גיאומטרי "כביכולי" אשר בו הופכים מלבן בעל שטח קבוע 3, שלב אחר שלב לריבוע בעל אותו שטח המלבן ההתחלתי צלעותיו הן x_0 ו־$3/x_0$, צלע המלבן הבא אחריו מתקבלת על־ידי מיצוע צלעות קודמו

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{3}{x_0}\right) \tag{2}$$

וכדי שהשטח יישמר, על הצלע השנייה להיות $3/x_1$, וכו׳ בשלב זה לא ברור מדוע הסדרה מתקרבת ל־$\sqrt{3}$, קל וחומר לא ברור באיזה "מהירות" היא מתקרבת ל־$\sqrt{3}$, כלומר מה היא יעילותו של המרשם, שאלה שהיא מרכיב טבעי ומרכזי של חשיבה אלגוריתמית

על־פי הגישה האלגוריתמית היינו הולכים בעקבות ניוטון, שהציע לפתור משוואות מן הצורה $f(x) = 0$ בעזרת שיטת משיקים במקרה שלנו $f(x) = x^2 - 3$ בשיטת ניוטון משתמשים בנגזרת של $f(x)$, וכל קרוב עוקב, מתקבל מנקודת החיתוך של המשיק המתאים עם ציר ה־x־ים

כך מתקבלת הנוסחה האיטרטיבית (1) יתר על־כן, האלגוריתם המתקבל מאפשר חישובו של שורש ריבועי של מספר חיובי כלשהו a כמו כן מאפשרת גישה זו להוכיח כי מתקיים

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| \le |x_n - \sqrt{a}|^2 \tag{3}$$

משמעותו של אי־שוויון זה היא כי ההתקרבות ל־$\sqrt{a}$ היא בקצב ריבועי מן ההתקרבות הריבועית אפשר להסיק כי דרושות רק איטרציות אחדות כדי לקבל את השורש בדיוק גבוה מאוד דרך לבנות את האלגוריתם הזה על־פי תכנון, וללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי, וכן על יעילותה של שיטה זו ביחס לשיטות אחרות, אפשר למצוא ב־[1] וב־[11] בגישה זו איננו מלמדים רק לחשב את השורש, אלא גם מדוע אנו מקבלים את השורש בדיוק רצוי, ואיך נבנתה השיטה האיטרטיבית לפיכך, לימוד כזה יכול לעזור גם לפתרון בעיות אחרות (ראה [2])

בולט אם כן ההבדל בין הגישה האינסטרומנטלית המדגישה רק את ה"איך", לבין הגישה האלגוריתמית הכוללת גם את המדוע וכיצד, ומביאה עמה יתרונות נוספים כגון

- מפתח להכללות שונות (בדוגמה שלנו חישוב שורש שלישי, פתרון $f(x) = 0$ באופן כללי, ועוד)
- אשנב ללימוד נושאים רחבים יותר (אצלנו לימוד תהליכים איטרטיביים באופן כללי, חשיבות הקירוב ההתחלתי בתהליכים כאלה, תכנון תהליכים איטרטיביים בעלי התנהגות מסדר שלישי ויותר)
- התמודדות עם נושאים מתמטיים נוספים ה"צומחים" בצורה טבעית (אצלנו סדרות חסומות, סדרות מונוטוניות, ערך מוחלט, אי־שוויונים שונים ועוד) [1]

גישה אלגוריתמית לפתרון מערכת משוואות

פתרון מערכת משוואות ליניאריות הוא נושא מרכזי בחינוך המתמטי בבית הספר התיכון ובמוסדות על־תיכוניים הגישה הנפוצה בלימודים התיכוניים של נושא זה, היא הגישה האינסטרומנטלית, המדגישה את המתכון ותו לא בלימודים במסגרת השכלה על־תיכונית נתקלים לעתים בגישה המתמטית הצרופה, שבה מסתפקים בחקירת התנאים לקיום הפתרון, בכתיבת נוסחה כללית (באמצעות מטריצות במקרה זה), מבלי להתעכב על הביצוע הלכה למעשה (ראה [7]) במלים אחרות, בהינתן מערכת $Ax = b$ (בכתיב מטריציאלי), באילו תנאים קיימת A^{-1} כך שהפתרון יכול להיכתב בצורה $x = A^{-1}b$ (פתרון הנתון בצורה כזו גם מזכיר את $x = b/a = a^{-1}b$ שהוא הפתרון למשוואה הסקלרית $ax = b$) אולם, בחישוב A^{-1} חבוי עולם ומלואו, וקשיים חישוביים לא מעטים, ובכלל, זו אינה הדרך המומלצת לפתרון מערכת משוואות ליניאריות בעבר היו מלמדים גם את כלל Cramer הנותן את הפתרון באמצעות דטרמיננטות, ולכן מתאים אולי לניסוח תנאים, אך **בלתי יעיל לחלוטין** לחישוב הפתרון

גישה אלגוריתמית לפתרון מערכת משוואות, מעוררת שאלות שלא היו עולות כלל בגישות שהוזכרו למשל, אם פותרים מערכת ליניארית של n משוואות, ב־n נעלמים, בשיטת גאוס (שילוש + הצבה לאחור), מה היא סיבוכיות החישובי כלומר בהקשר של פתרון המערכת, כמה פעולות חישוב (כתלות ב־n) דרושות לקבלת הפתרון ומה היא יעילות החישוב של שיטת פתרון זו בהשוואה לשיטות פתרון אחרות למשל, בשיטת Cramer שהוזכרה לעיל הסיבוכיות היא מסדר גודל של $n!$, לעומת שיטת גאוס שהיא בעלת סיבוכיות של n^3

בגישה האינסטרומנטלית לפתרון הבעיה, לא הייתה עולה שאלה זו כלל היינו מתרכזים אך ורק בפעולות החישוב בדרך לפתרון, כלומר באיך ולא במדוע ובאיזו יעילות אילו אימצנו לעצמנו חשיבה אלגוריתמית, היינו מתמודדים גם עם שאלות כמו רגישות

1 "צומחים בצורה טבעית" להבדיל מהתמודדות עם פתרון תרגילים שונים הניתנים לתלמידים בסגנון של "פתור/י את תריסר האי־שוויונים המופיעים בעמוד בספרי"

הפתרון לשינויים קלים במקדמים. יתר על־כן, היינו צריכים לדון בשאלה אם רגישות זו נובעת משיטת הפתרון, או שהיא טבועה בעצם הבעיה הנתונה (במקרה הראשון אפשר לתקן את השיטה ולהקטין את הרגישות, ובמקרה השני אפשר רק לאתר אותה) ראה [3].

אפרוקסימציה פולינומיאלית

נסיים בדוגמה מתוך לימודי המתמטיקה באוניברסיטה, אשר תמחיש את המיוחד שבחשיבה אלגוריתמית נוסף על החשיבה המתמטית הצרופה. מדובר במשפט האפרוקסימציה של ויירשטרס, הטוען כי אפשר להתקרב במידה שווה לפונקציה רציפה בקטע סגור, על־ידי פולינום. בניסוח מתמטי מקובל: נתונה $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סופי $[a, b]$. לכל $\varepsilon > 0$ קיים n ופולינום ממעלה n, כך שלכל x בקטע $[a, b]$ מתקיים $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$

למשפט זה ידועות הוכחות אחדות, וביניהן הוכחות "קונסטרוקטיביות", הבונות את הפולינום $P_n(x)$. למעשה מתברר, כי לדרישות דיוק יחסית צנועות, הפולינום המתקבל הוא לעתים קרובות ממעלה גדולה מאוד, כך שהשימוש בו אינו מעשי. יוצא, אפוא, כי גם הוכחות "קונסטרוקטיביות" אלה, לא יוכלו לשמש בסיס לבניית פולינום, שייצג את הפונקציה הלכה למעשה, למשל בספריית הפונקציות של מחשב, ברמת הדיוק שבחרנו.

החשיבה האלגוריתמית מנחה אותנו לשאול שאלת אפרוקסימציה פולינומיאלית מסוג אחר: נתונה $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סופי $[a, b]$. מכל הפולינומים ממעלה $\geq n$ שנקבע מראש, האם קיים פולינום המקרב טוב ביותר את הפונקציה במידה שווה, ומיהו פולינום זה?

אף כי שאלה זו לא מנוסחת עדיין בניסוח מתמטי קפדני, היא הנותנת לנו כיוון חיפוש וחקירה, שיאפשרו לנו בסופו של דבר ליצור אלגוריתם שבאמצעותו יהיה אפשר לבנות את הפולינום המבוקש, הלכה למעשה.

בלימודי המתמטיקה, נכנסים במקום זה משפטי צ'בישב המוכיחים את קיומו ויחידותו של הפולינום הזה. יתר על כן, המשפטים נותנים גם איפיון של הפולינום, ומראים כיצד לחשב אותו באופן איטרטיבי וביעילות (אלגוריתם Remez). בדרך זו מתקבל פולינום מקרב ממעלה סבירה (בהשוואה לנאמר לעיל).

סיכום

נחזור ונדגיש כי הוראה בגישה אלגוריתמית מעודדת את הלומדים לחשוב לא רק "איך" אלא גם "מדוע". גישה כזו תכלול תמיד מרכיבים של יעילות חישובית וניתוח נכונות האלגוריתם. השימוש המטעה במושג חשיבה אלגוריתמית לתיאור חשיבה אינסטרומנטלית, מסלף ומגמד את משמעות המושג.

הגישה האינסטרומנטלית בהקשר של פתרון בעיות, אינה אלא ביצוע מכני של האלגוריתם המתאים, ואין היא מטפחת חשיבה אלגוריתמית שביצוע מכני זה מהווה בה מרכיב קטן בלבד. מרכיבים מרכזיים הם כיצד נבנה האלגוריתם, מדוע הוא עובד, ומה סיבוכיותו בהשוואה לאלגוריתמים אחרים.

מרכזיותה של הגישה האלגוריתמית בחינוך המתמטי משתקפת היטב במאמרו של Knuth [5] שבו אומר המחבר (בתרגום חופשי): "מי שטופחה בו החשיבה האלגוריתמית יודע לטפל באלגוריתמים, לנתח אותם, לבנות אותם, להבין אותם, ולשנותם...", ועוד נאמר שם:

"זהו מכשיר מנטלי כללי שיעזור בבניית נושאים אחרים ושונים. לעתים קרובות אומרים כי אין אדם מבין משהו ממש עד אשר לימד אותו למישהו אחר. למעשה אין מבינים משהו לעומק, עד אשר מלמדים אותו למכונה אוטומטית, למשל מחשב, ופירושו מבטאים שאותו כאלגוריתם... כך הלומד מובל לדיוק מחשבתי קפדני, דבר שאותו יש לטפח בלימודי המתמטיקה".

אנו מצטרפים לדעתו של Knuth, בעניין הערך הפדגוגי של הגישה האלגוריתמית. גם אנו מאמינים כי טיפוח חשיבה אלגוריתמית יתרום להבנת מושגים רבים ושונים, ויתמוך, לפחות באופן עקיף, בהתמודדות עם בעיות מתחומים אחרים. ראוי אפוא להדגיש ולטפח חשיבה אלגוריתמית כחלק מרכזי בחינוך המתמטי.

רשימת ספרות

[1] S. Breuer and G. Zwas, "Computer Root Extraction by A PRIORI Design", *Comput. Educ.* 8, 3 (1984) 305-316

[2] S. Breuer and G. Zwas, *Numerical Mathematics — A Laboratory Approach*, Cambridge University Press, 1993

[3] J. Gal-Ezer and G. Zwas, "An Algorithmic Approach to Linear Systems", *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 15, 4 (1984) 501-519

[4] D. Harel, *Algorithmic: The Spirit of Computing*, Addison-Wesley, 1987

[5] D.E. Knuth, "Computer Science and its Relation to Mathematics", *Amer. Math. Monthly* 81 (1974) 323-343

[6] D.E. Knuth, "Algorithmic Thinking and Mathematical Thinking", *Amer. Math. Monthly* 92 (1985) 170-181

[7] S.B. Maurer, "The Algorithmic Way of Life is Best", *College Math. J.*, 2-18, Jan. 1985

[8] S.B. Maurer and R. Ralston, *Discrete Algorithmic Mathematics*, Addison-Wesley, 1991

[9] R.R. Skemp, "Relational Understanding and Instrumenatl Understanding", *Mathematics Teaching* 77 (1976) 20-26

[10] ש' וינר, "ההתנהגות אלגוריתמית אמיתית ואלגוריתמית לכאורה בלמידת מתמטיקה", עלה 2 (1986) 10-15, עלה 3 (1987) 16-24

[11] ג' צבס, "איטרציות מסדר שני", עלה 6 (1990) 13-18