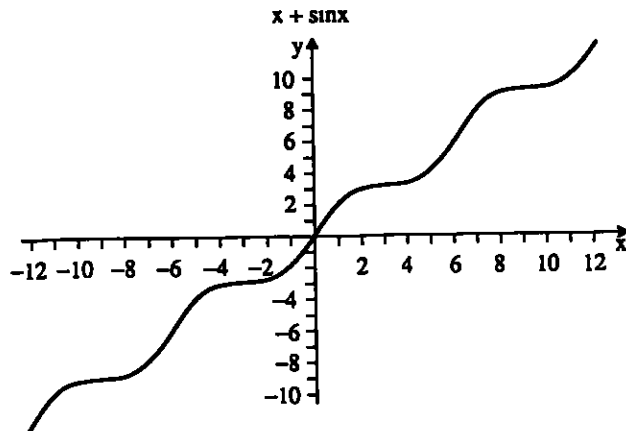


פתרון בעיית חקר בסיוע מחשב



יעל הרמז-רובין
קיבוץ משמר העמק

ברצוני לטפל במשימה שניתנה במסגרת סדנה למורים¹ כשעסקנו במבחני קיצון (מקומי) למשתתפי הסדנה ניתנו היגדים שהיה צריך להפריך אותם או למצוא דוגמה שמקיימת אותם

אחד ההיגדים היה

אמת או שקר
קיימת פונקציה הרציפה בכל ציר ה- x , ללא נקודות קיצון, ולה אינסוף נקודות בהן המשיק לגרף הפונקציה מקביל לציר ה- y נמקו את תשובתכם

מצאתי תשובה בסיוע המחשב – תבנית פונקציה המקיימת תנאים אלו לא הגעתי לפתרון באופן מידי אולי היה רצוי לתאר את דרכי המחשבה והטעויות שעשיתי בדרך לפתרון, מפני שהדרך שבה מנסים לחשוב לא פחות חשובה ממצאית הפתרון לצערי מחקתי וזרקתי את הצעדים המוטעיים ופשוט אינני זוכרת מה היה

אנסה לתאר את התהליך והשיקולים לבניית הפונקציה

אפשר לוודא, כי הפונקציה המבוקשת אכן קיימת

קיימת הפונקציה $y = x + \sin x$ (איור 1) שהיא רציפה ויש לה אינסוף נקודות שבהן המשיק מקביל לציר ה- x תבנית הנגזרת היא $y' = 1 + \cos x$ הנגזרת אי שלילית בנקודות $x = (2n + 1)\pi$ הנגזרת מתאפסת לכן הפונקציה מונוטונית עולה ויש לה פונקציה הפוכה

פונקציה הפוכה זו מקיימת את התכונות שאותן אנחנו מחפשים רואים כי אכן הפונקציה המבוקשת קיימת אפשר לשרטט את הגרף שלה כגרף סימטרי לגרף הפונקציה $y = x + \sin x$ ביחס לישר $y = x$ אפשר להתייחס לשיקולים אלו כלהוכחת קיום אבל את התבנית המפורשת של הפונקציה לא הצלחתי למצוא

ניסיתי לבנות תבנית פונקציה המקיימת את התכונות של ההיגד באמצעות הפונקציות $\sin x$ ו- $\cos x$ עם שימוש בשורשים מסדר שונה ובערך מוחלט – ולא מצאתי דרך לעשות זאת

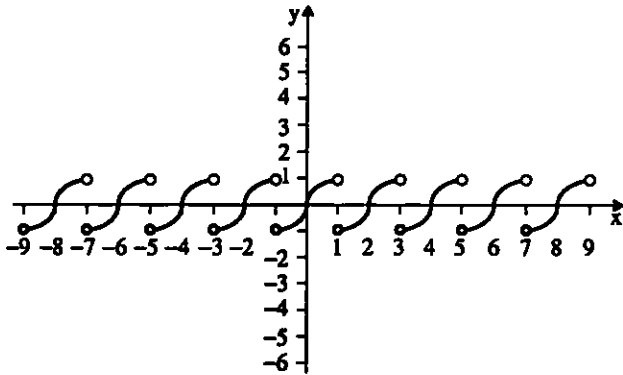
חיפשתי בכיוונים אחרים תחילה, פונקציה שלגרף שלה משיק מקביל לציר ה- y בנקודה כלשהי קבוצה מוכרת למי שמלמד אנליסה בתיכון ומלמד חקירת פונקציות היא פונקציות-שורש מסדר אי-זוגי, כמו $\sqrt[3]{x}$ או $\sqrt[5]{x}$ לפונקציות אלו קיימת נקודה אחת על הגרף שבה המשיק מקביל לציר ה- y $x = 0$ איך לגרום לכן שנקודה כזו תחזור על עצמה?

ניכרתי בפונקציות מחזוריות מהצורה $y = ax - [ax]^2$ פונקציות אלו לא מוכרות כל כך, אבל הן מהוות קבוצה חשובה וכדאי להכירן

2 כמה שבועות קודם לכן ניתנה סדנה עלידי נעמי ורטהימר, ממשותפות הסדנה, שעסקה בפונקציות מחזוריות שאינן פונקציות טריגונוטריות בדקנו בעזרת מחשב פונקציות הבנויות מסכומים של חערך חשלים של פונקציות ליניאריות (שיסומן עלידי []) ופונקציות ליניאריות באופן כללי לגמרי, בדקנו תכונות של פונקציות מהצורה $y = ax - [ax]$ מטרת הסדנה הייתה לחדד תכונות של מחזוריות עלידי בדיקת פונקציות שאינן מוכרות כל כך

1 באצבע הגליל מתקיימת סדנה למורי מתמטיקה של בתי ספר תיכוניים במסגרת הפרוייקט "ימחר 98" ז"ר אורית זסלבסקי היא ראש הצוות במסגרת זו נכללות פעילויות הקשורות בלימוד מתמטיקה בסיוע מחשב במיוחד עוסקת בכך ז"ר אלה שמוקלר, אשר פיתחה לסדנה משימות חקר המחודדות תכונות של קבוצות פונקציות שונות באופן בסיסי, המטלות מתקשרות לתבנית הלימודים הרגילה, אבל השימוש במחשב פותח אפשרויות רבות ומגוונות להרחיב ולהעמיק את היריעה לא כל המשימות שניתנו נפתרו מראש על דינו החיפוש המשותף נותן טעם מיוחד לסדנה זו

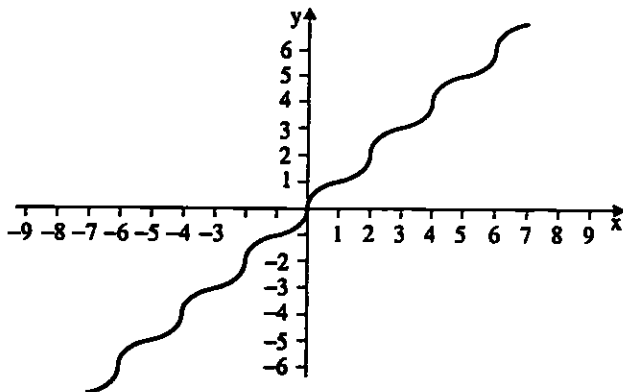
$$(4) y = (2(0.5x - [0.5x + 0.5]))^{1/3}$$



העיגולים המלאים בקצה השמאלי של כל ענף מדגישים שהנקודה שייכת לגרף הפונקציה העיגולים הריקים בקצה הימני של כל ענף מדגישים שהנקודה אינה שייכת לגרף הפונקציה

נבנה עכשיו את הפונקציה הרציפה הענף העובר דרך ראשית הצירים אמור להישאר במקומו זה שמתחיל ב- $x = 1$ אמור לעלות ב- 2 (כדי לשמור על רציפות), הבא אחריו המתחיל ב- $x = 3$ אמור לעלות ב- 4 תבנית נקודות האיר-רציפות של הפונקציה היא $2n + 1$ כאשר n שלם כדי לסלק את האיר-רציפות, צריך לסלק את הקפיצה, דהיינו להעלות כל ענף ב- $2n$ במקביל לציר ה- y כדי לבצע זאת עלינו להוסיף לפונקציה הנוכחית פונקציית מדרגות שאורך מחזור 2, הפרש הגובה בין שתי מדרגות סמוכות הוא 2, והיא שווה לאפס כאשר $x - 1 \leq 1$ פונקציית המדרגות המבוקשת היא $2[0.5x + 0.5]$ נוסיף את (4) לפונקציה הנוכחית ונקבל

$$(5) y = (2(0.5x - [0.5x + 0.5]))^{1/3} + 2[0.5x + 0.5]$$

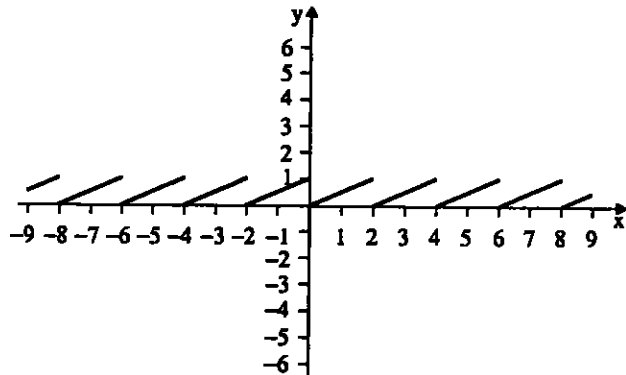


זוהי פונקציה הממלאת את תנאי המשימה זוהי פונקציה רציפה, מונוטונית עולה, שאין לה נקודות קיצון מקומיות ושיש לה אינסוף נקודות שבהן המשיק מקביל לציר ה- y האם אפשר למצוא עוד פונקציות הממלאות את התנאים המבוקשים בהיגדי נשמח לשמוע

ההשערות שבעזרתן ניסיתי לפתור את המשימה נסו על צג המחשב המחשב מאפשר בדיקה וניסוי בצורה נוחה וקלה מטעמי נוחות התלטי על אורך מחזור בן שתי יחידות - המקדם המספרי יהיה 0.5

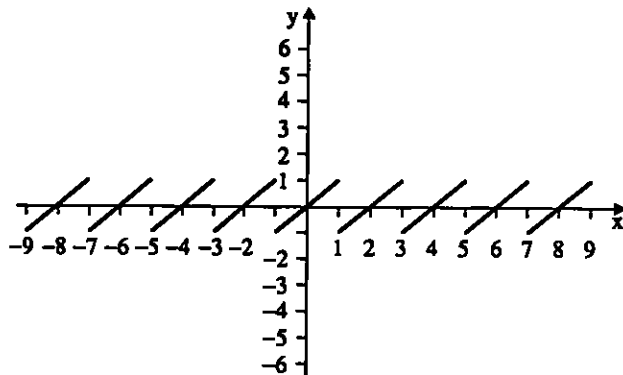
$$(2) y = 0.5x - [0.5x]$$

טווח ערכי הפונקציה יהיה $[0,1)$ כמתואר באיור (2)



אנו מעוניינים להוציא שורש אי-זוגי ממשנתה שתחמו $[-1,1)$ לשם כך צריך ליצור פונקציה מחזורית אי-זוגית שטווח ערכיה $[-1,1)$ תוספת 0.5 לערך השלם שאותו מחסרים וכפל ב-2 יגרמו להזזה ולטווח הרצויים

$$(3) y = 2(0.5x - [0.5x + 0.5])$$



הפונקציה איר-רציפה בקטעים שנתקבלו, אפשר להוציא שורש שלישי מהפונקציה ולקבל אינסוף ענפים שכל אחד מהם מונוטוני עולה ולכל אחד קיים משיק מקביל לציר ה- y