



שאלות חלופיות ללומדים עם מהשבונים גרפיים, קיץ תשנ"ה

$$2x^3 - x = 0$$

$$x(2x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

ב נקודות אפס

חנה פרל
האוניברסיטה העברית בירושלים

אסימפטוטות

$$\frac{2x^3 - x}{x^3 + x^2 + 2} = \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 2$$

$y = 2$ אסימפטוטה אופקית

$$g(x) = x^3 + x^2 + 2 = 0$$

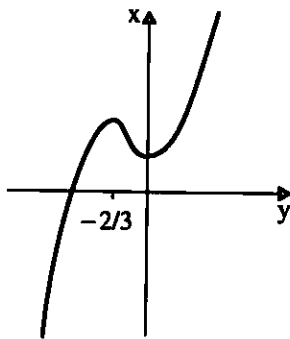
$$g'(x) = 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(3x + 2) = 0$$

$$x = 0, x = -\frac{2}{3}$$

אסימפטוטה אנכית

לפונקציית המכנה שתי נקודות קיצון (0,2) מינימום ו- $(-\frac{2}{3}, 2.148)$ מקסימום מכיוון שהמכנה הוא פולינום ממעלה שלישית עם מקדם 1 של x^3 הגרף שלה הוא



ולכן חותך את ציר ה- x פעם אחת בלבד
יש אסימפטוטה אנכית אחת.

על-ידי סרטוט הגרף של המכנה מוצאים כי $x = -17$ אסימפטוטה אנכית

$$f(x) = \frac{2x^3 - x}{x^3 + x^2 + 2}$$

5 יחידות לימוד

נתונה הפונקציה

א סרטוט בעזרת המחשבון סקיצה של גרף הפונקציה המעידה היטב על התנהגות הפונקציה סמן על הצירים שנתות ומספרים

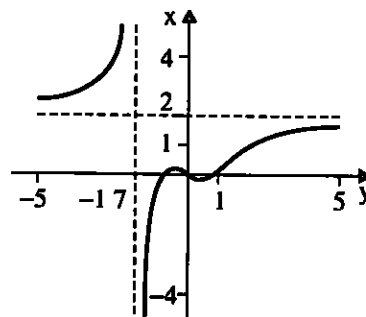
ב הוכח כי בגרף המסורטט מופיעות כל נקודות האפס של הפונקציה וכל האסימפטוטות המקבילות לצירים מצא בעזרת המחשבון קירוב מספרי של האסימפטוטות שאי אפשר לחשבן חישוב אלגברי הסבר את דבריך

ג נתונה הנגזרת של הפונקציה

$$f'(x) = \frac{2x^4 + 2x^3 + 13x^2 - 2}{(x^3 + x^2 + 2)^2}$$

חקור את פונקציית המונה של הנגזרת והראה כי מספר נקודות הקיצון שמצאת בגרף מתאים למספר האפסים של $f'(x)$

פתרון
א



ג האינטגרל הוא שטח המלבן שגובהו $\frac{\pi}{2}$ ואורכו $\frac{2}{A}$

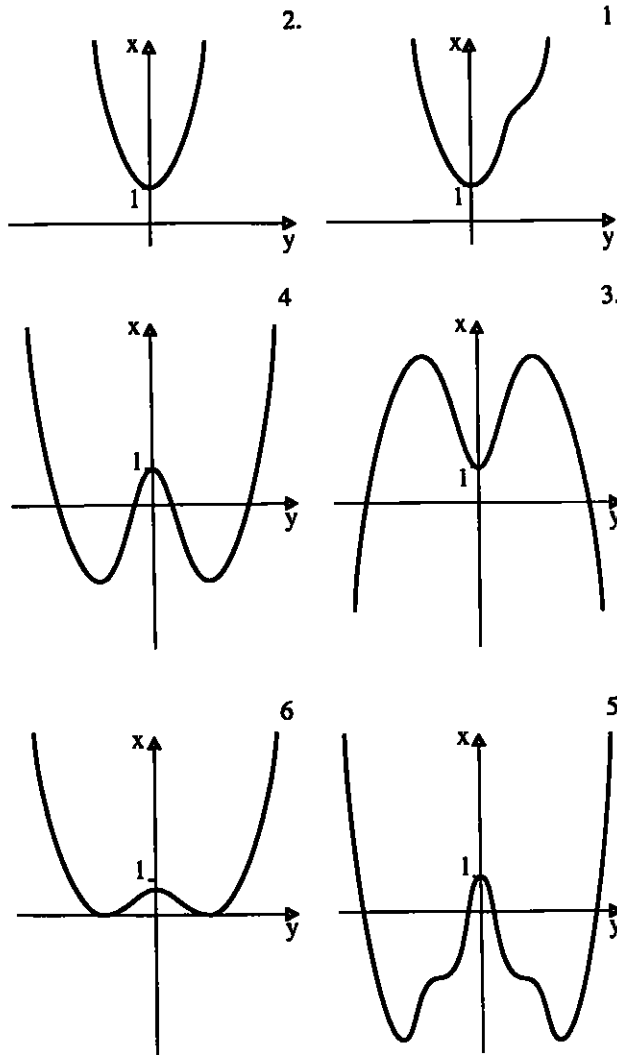
לכן

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{A} = \frac{\pi}{A}$$

4 יחידות לימוד

נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = x^4 - Ax^2 + 1$, A ממשי
א אילו מבין הגרפים הבאים יכולים לתאר גרף של פונקציה
מהמשפחה, ואילו לא? הוכח את טענותיך

ב בשביל הגרפים האפשריים מצא את ערכי A שעבורם הם
מתקבלים



הערה: בגרף מספר 5 גם בנקודות x_1 ו- x_2 המשיק לגרף המקביל
לציר ה-x

ג פונקציית המונה של הנגזרת היא פולינום ממעלה 4

$$k(x) = 2x^4 + 2x^3 + 13x^2 - 2$$

$$k'(x) = 8x^3 + 6x^2 + 26x$$

$$2x(4x^2 + 3x + 13) = 0$$

$$x = 0, 4x^2 + 3x + 13 = 0$$

למשוואה $4x^2 + 3x + 13 = 0$ אין שורשים

לכן $(0, -2)$ נקודת מינימום יחידה של $k(x)$ פולינום ממעלה
4 עם מקדם עליון 2 לכן ל- $k(x)$ יש שני אפסים בדיוק מהגרף
בסעיף א רואים כי אכן יש לפונקציה שתי נקודות קיצון

א הוכח כי הפונקציה $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ היא פונקציה
קבועה בתחום הגדרתה מצא את ערך הפונקציה

ב נתונה המשפחה $f(x) = \arcsin Ax + \arccos Ax$, $A > 0$ כיצד
משפיע הפרמטר A על גרף הפונקציה הוכח את טענתך וסרטט
שני גרפים של נציגים מהמשפחה (סמן שנתות ומספרים)

ג בטא את האינטגרל $\int_{\frac{1}{A}}^{\frac{1}{A}} (\arcsin Ax + \arccos Ax) dx$ במונחים
של A

פתרון
א

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$f(x) = c \Leftarrow$$

נחשב את f בנקודה $x=0$

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

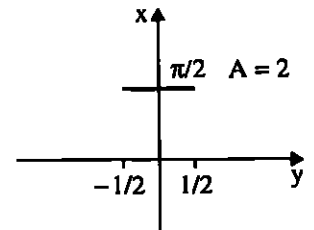
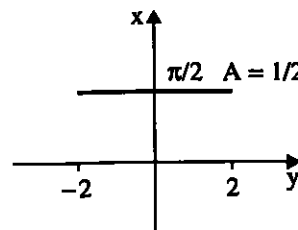
$$-1 \leq x \leq 1 \text{ בתחום } f(x) = \frac{\pi}{2} \Leftarrow$$

ב A משפיע על תחום הפונקציה בלבד $-\frac{1}{A} \leq x \leq \frac{1}{A}$ כאשר

$A > 1$ התחום מצטמצם ואילו כאשר $0 < A < 1$ התחום
מתרחב הפונקציות נשארות קבועות

$$f'_A(x) = \frac{A}{\sqrt{1-(Ax)^2}} - \frac{A}{\sqrt{1-(Ax)^2}} = 0$$

$$f_A(x) = \frac{\pi}{2}$$



פתרון

א גרף 1 אינו מתאים, כי איננו מתאר פונקציה זוגית וזוגית
 $f(-x) = (-x)^4 - A(-x)^2 + 1 = x^4 - Ax^2 + 1 = f(x)$

גרף 3 אינו מתאים כי זרועות הגרף כלפי מטה ואילו זרועות גרף של פולינום ממעלה רביעית עם מקדם חיובי של x^4 הן כלפי מעלה $x^4 - Ax^2 + 1$ מתנהג כמו x^4 בשביל $|x|$ ים גדולים
 גרף 5 אינו מתאים כי הנגזרת מתאפסת ב-5 נקודות ואילו נגזרת $f(x)$ היא פולינום ממעלה שלישית המתאפס לכל היותר ב-3 נקודות

כדי לבדוק אם 2, 4 ו-6 אפשריים יש לחקור את הפונקציות

$$f'(x) = 4x^3 - 2Ax = 0$$

$$2x(2x^2 - A) = 0$$

$$x = 0, \quad x^2 = \frac{A}{2}$$

אם $A \leq 0$ יש רק נקודה אחת חשודה $x = 0$ והיא נקודת מינימום כי הפונקציה מתנהגת כמו x^4
 ii כאשר $A > 0$ יש שלוש נקודות חשודות

$$x = \pm\sqrt{\frac{A}{2}}, \quad x = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 - 2A$$

$$f''(0) = -2A < 0$$

$$\Leftarrow x = \pm\sqrt{\frac{A}{2}} \text{ נקודת מקסימום}$$

$$f''\left(\pm\sqrt{\frac{A}{2}}\right) = \frac{12A}{2} - 2A = 4A > 0$$

$$\Leftarrow x = \pm\sqrt{\frac{A}{2}} \text{ נקודת מינימום}$$

הערה: אפשר לקבל תוצאה זו על-ידי ניתוח כללי של פולינום ממעלה רביעית עם מקדם עליון חיובי מכיוון שבקצוות הפונקציה מתנהגת כמו x^4 ו- $A > 0$ ברור כי $x = \pm\frac{\sqrt{A}}{2}$ הן

נקודות מינימום ו- $(0,1)$ מקסימום

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{A}{2}}\right) = \frac{A^2}{4} - \frac{A}{2} = \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{2} + 1 = 1 - \frac{A^2}{4}$$

$$\left(\pm\sqrt{\frac{A}{2}}, 1 - \frac{A^2}{4}\right) \text{ נקודות מינימום}$$

$$1 - \frac{A^2}{4} < 1 \text{ בשביל } A > 0$$

מסקנה: גרף 2 אפשרי בשביל $A \leq 0$
 גרפים 4 ו-6 אפשריים בשביל $A > 0$

חישוב ערכי A

גרף 6 מתקבל כאשר

$$1 - \frac{A^2}{4} = 0$$

$$A = \pm 2$$

אולם יש 3 נקודות קיצון רק כאשר $A < 0$ לכן $A = -2$
 גרף 4 מתקבל כאשר

$$1 - \frac{A^2}{4} < 0$$

$$A^2 > 4$$

$$A < -2 \text{ או } A > 2$$

כאשר $A > 2$ יש רק נקודת קיצון אחת לכן $A < -2$

