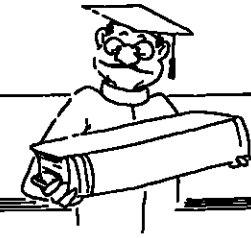


תכנית לימודים

הפונקציה המעריכית

פרופ' ש' עמיצור
האוניברסיטה העברית בירושלים

הערת המערכת מאמר זה נכתב לפני מספר שנים ופורסם ב"שבבים" בהוצאת מכון ויצמן למדע לאור ההחלטה כי בתכנית המאוחדת תוצג הפונקציה המעריכית ב5 יחידות לימוד על-ידי מערכת L, החלטנו לפרסם סדרת מאמרים העוסקים בפונקציה המעריכית ובדרך הצגתה זה המאמר הראשון בסדרה (והוא נדפס בתוספת עדכונים קלים שהזמן גרמם) ובו מסביר פרופ' עמיצור את המוטיווציה והרציונל של מערכת E בגיליון הבא נמשיך את הדיון בנושא

פונקציות גידול (הפונקציה המעריכית)

1. במושג הפונקציה (הממשית) אנו מבינים התאמה $f\ x \rightarrow y$ (או בסימון $y = f(x)$) אשר לכל ערך ממשי מתאים מספר ממשי יחיד y (לעיתים מוגבל x לקטע או קטעים) התאמה זו אפשר להגדיר בצורות שונות ובדרכים רבות למשל, בצורה **מתמטית** על-ידי חוק התאמה המוגדר בעזרת תבנית פשוטה כמו $x \rightarrow x^2$, או מסובכת, בעזרת תהליך גיאומטרי זווית (מרכזית במעגל) ← מיתר, או $x \rightarrow \sin x$ גם על-ידי תהליכים **פיסיקלים** למשל הדרך שעובר גוף נופל $t \rightarrow s(t)$, או הטמפרטורה T של גוף כפונקציה של הזמן אך גם על-ידי תהליכים **כלכליים** כגון יצוא של מדינת ישראל כפונקציה של הסובסידיה בהשקעות של המדינה או, הפונקציה $f\ t \rightarrow f(t)$, המתארת את סכום הכסף שיקבל אדם שישקיע בבנק מכל לירה[1] כעבור t שנים כמעט כל תחום בחיים ובמדע קשור למערכות המתארות או מתוארות בעזרת פונקציות

לעיתים בעזרת גילוי מצבת חוקים בסיסית אפשר לגלות את תיאור הפונקציה הפיסיקלית או הכלכלית בעזרת תבניות כמו בנפילה חופשית $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$, וכך אפשר לחשב את המרחק מראש, אם לצרכים מעשיים מידיים או לתיכנון וניבוי תוצאות של פעולות גם במקרה הכלכלי, אם נוכל לחשב את ערכי הרווח f(t) של השקעה, אפשר לתכנן תכניות חיסכון והוצאות מראש לתקופה ארוכה

חלק נכבד מהמתמטיקה מוקדש לדרכים שאפשר לגלות את הפונקציות או כמה מתכונותיהן מתוך מערכת חוקים, או מערכת אילוצים, ופרק זה מוקדש לאחת הדרכים שבה נמצא טיפוס חדש וחשוב של פונקציה

הגישה המובאת כאן, יש בה, נוסף על גילוי תכונות הפונקציה עצמה, גם הדגמה של אחד התהליכים הבסיסיים בקשר שבין ההפשטה המתמטית והמציאות בעולם הסובב אותנו תהליך זה אפשר לתאר בצורה סכמטית

מציאות (תופעות ותהליכים) ← מצוי ואידיאליזציה ← מודל מתמטי (הנחות אקסיומטיות) ← פיתוח מתמטי (משפטים) ← מציאות (מסקנות).

למעשה נדגים גם כיצד אינטואיציה פרקטית מביאה לידי ניסוח של משפטים מתמטיים (שלא תמיד קל להוכיח אותם)

2. נקודת המוצא שלנו היא תהליך של התרבות (גידול חיובי) או כמילה (גידול שלילי) המשותף להרבה תופעות ותהליכים בכלכלה, ביולוגיה, פיסיקה ועוד   והנה כמה דוגמאות

א **אוכלוסיה** (אנשים, חיידקים, צמחים) אם בזמן מסוים אשר נוח לסמנו $t = 0$ יהיה מספר האוכלוסיה N_0 הרי כעבור t זמן (רגעים, שנים) יהיה מספרם $N(t)$, והרי לפנינו פונקציה $t \rightarrow N(t)$ אשר בתנאים מסוימים כאשר מובטחים לאוכלוסיה מזון ושטח ואפשרויות התפתחות ללא הגבלה – מותר להניח שהמספר $N(t)$ יהיה פרופורציונלי למספר התחלתי N_0 , כלומר אם נתחיל למשל מאוכלוסיה שמספרם כפול, יש לצפות למספר כפול כעבור אותו זמן t במלים אחרות, הפונקציה שלנו צורתה $N(t) = N_0g(t)$ וכך $g(t)$ הוא – מבחינה תיאורטית בלבד – מספר האוכלוסיה שהם צאצאים מיחידה אחת בלבד נעיר כבר כאן שלמעשה תנאים אידיאליים כאלה אינם קיימים במציאות לאורך ימים אפשר אולי לקיימם לתקופה קצרה – וכך שהמסקנה שלנו ש- $N(t) = N_0g(t)$, באשר $g(t)$ היא פונקציה שאינה תלויה בתנאים ההתחלתיים הייתה מסקנה של **אידיאליזציה** של המציאות, ובגורם זה יש להתחשב אחר כך בפירוש המסקנות שנשיג בתהליך המתמטי המופשט

ב **התפשטות מחלה** (מגיפה) אם נסמן ב- $N = N(t)$ את מספר החולים (או הנפגעים) ברגע מסוים, הרי סביר **להניח** שאם

1 הלירה היה שם המטבע הישראלי בתקופה שבה נכתב המאמר

ברגע מסוים $(t=0)$ היה מספר החולים N_0, יהיה מספר החולים פרופורציונלי ל- N_0, כלומר גם כאן $N(t)=N_0g(t)$, ו-$g(t)$ תלויה אך בקטע הזמן t ולא במספר ההתחלתי N_0 $g(t)$ הוא מספר האנשים שידבקו בגלל מחלתו של אדם אחד ושוב, זהירות׳ ההנחה שלנו היא אידיאליזציה של מצב שקיים בשלבים הראשונים של המחלה לפני שמתחילים לאחוז באמצעים ובבידוד החולים

ג **השקעה בבנק** בנק המנהל עסקיו בצורה רציונלית והמעוניין ברכישת כספי לקוחות לצורך פעילות כלכלית – מעוניין להחזיק בכספים אלו לאורך זמן ולכן יהיה מוכן לתת לאדם המשקיע לירה אחת – $f(t)$ לירות כעבור t זמן, וככל שהזמן ארוך יותר תהיה $f(t)$ גדולה יותר (כלומר $f(t)$ מונוטונית עולה), ואם ישקיע האדם k_0 לירות – הרווח שלו אחר t זמן יהיה $K(t)=K_0f(t)$ ו-$f(t)$ אינו תלוי ביום ההפקדה, אלא אך באורך הזמן t בין יום ההפקדה ויום ההוצאה גם כאן יש הנחות שאולי אינן מתגשמות במציאות (מצא כמה מהן)

בהזדמנות זו נציין שלכאורה נראה שבכל המקרים הללו $t \ge 0$, אך למעשה אפשר למצוא גם פירוש לפונקציה עבור $t<0$ שליליים, לפחות לגבי חלק הפונקציות שלפנינו אם $N(t)$ הוא גודל האוכלוסיה כעבור t זמן מזמן נתון $t=0$, הרי עבור t שלילי $t=-p$ $(p>0)$, $N(-p)$ הוא גודל האוכלוסיה **לפני** p זמן וכנ״ל בהשקעה $K(t)=K_0f(t)$, אם הכסף מונח כבר בבנק ובזמן שנבחר באופן רצוני ונקבע בצורה שרירותית כ-$t=0$ הרי עבור $t=-p$ $p>0$ $(t<0)$, $K(-p)$ הוא הסכום שעמד לרשות המשקיע לפני p זמן

ד **רדיואקטיביות** – חומר רדיואקטיבי מתפרק במשך הזמן, ומכל גרם של חומר רדיואקטיבי יישארו $g(t)$ גרמים כעבור t שנים, הרי מ- M_0 גרמים יהיו $M_0g(t)$ גרמים כעבור t שנים גם כאן יש הנחות פיסיקליות ויש מובן ל-t שלילי (מהם׳) דוגמה דומה היא טיפוס של **ריאקציות** כימיות כאשר מכל גרם של החומר המקורי שמוכנס למערכת נשארת כמות של $g(t)$ גרמים מ- M_0 גרמים נשארים $M_0g(t)=M(t)$ גרמים כאן יש אידיאליזציה רצינית של מצב עניינים, כי בריאקציה כימית בסביבה מוגבלת הריאקציה תלויה גם בריכוז החומרים הנוצרים

ה **חדירת גוף** בנוזל או במוצק כאשר גוף הנע במהירות קבועה חודר לגוף, אם הוא נע בתוך סביבה המתנגדת למהירותו הרי שמהירות V לאחר שעבר מרחק x תלויה במהירותו ההתחלתית V_0 ובדרך x שהגוף עבר ושוב בהנחות סבירות יהיה $V(x)=V_0g(x)$, אשר $g(x)$ הוא הנותן את נפילת המהירות מכל יחידה של מהירות התחלתית כאן מונחת הנחה שהגוף הומוגני ואין חשיבות היכן קובעים את נקודת האפס, כל עוד שהמהירות V_0 נמדדת באותה נקודה שבה נקבע האפס ואשר ממנה נמדד x כך $\begin{matrix}A & B\\ & C & D\end{matrix}$ מפל המהירות מ-A ל- B או מ-D ל-C הוא זהה כל עוד $AB=CD$ והמהירות של גוף ב-A תהיה אותה מהירות אם יימצא ב-C ייתכן שמבחינה פיסיקלית אין הצדקה להנחה זו או אולי אפילו לאידיאליזציה של המצב אם נצליח לחשב את $g(x)$ ולערוך ניסויים בסביבות בעלי עובי שונה ובמהירויות שונות והמספרים שנמצא יתאימו לערכים התיאורטיים שנחשב, הרי נוכל כאן לאמת במידה מלאה (או חלקית) את ההנחות שלנו זה תהליך אחר שבו המסקנות התיאורטיות מאשרות או מפריכות את ההנחות הפיסיקליות המקוריות

3. ההנחה המשותפת בכל הדוגמאות הללו היא שבמצב אידיאלי (אף אם אינו קורה למעשה) קיימת פונקציה $f(t)$ שאם ברגע מסוים נמדד, נספר או הושקע K_0 הרי כעבור זמן t או לפני זמן $(t=-p,p)$ תהיה התוצאה בתהליך $K_0f(t)=K(t)$

נטפל רק באחד המקרים שישמש לנו כמודל והוא ההשקעה בבנק K_0 הושקעו ומתקבל $K_0f(t)=K(t)$ כעבור t שנים החשוב הוא שהפונקציה $f(t)$ תלויה **רק** בהפרש הזמן בין יום ההפקדה ויום ההוצאה, ולא **בתאריך** ההפקדה, אם זה ב-1977 או 1910 או ב-2000 $f(t)$ הוא הסכום שיתקבל מכל ל״י שתהיה מופקדת במשך t שנים

מהם האילוצים שפונקציה $f(t)$ מוגבלת על-ידם׳
האם פונקציה המחשבת את ההפקדה בתוספת ריבית קבועה p% בכל שנה (פרופורציונלית לזמן, כלומר מחושבת בסוף תקופת ההפקדה) נותנת פתרון סביר׳ במקרה זה הרווחים אחרי t יהיו $\frac{K_0\ pt}{100}$ אם נסמן $r=\frac{p}{100}$, אחרי t זמן יתקבל הסכום
$K_t=K_0+K_0rt=K_0(1+rt)$ ל״י (1)

נניח שאדם השקיע 1000 ל״י בריבית של 15% לשנה, אחרי שנתיים יקבל $1300=1000+\frac{1000\ 15\ 2}{100}$ ל״י – אך אם הוא פיקח, הוא יוציא את הכסף בסוף השנה הראשונה ויכניס אותו מיד בחזרה לשנה נוספת כי אז בסוף שנה א יקבל $1150=1000+\frac{1000\ 15}{100}$ ובסוף שנה ב יקבל מ-1150 ל״י שיהיו מונחים שנה אחת $1322\ 5=1150+\frac{1150\ 15}{100}$ וכך זכה ב-22 5 ל״י נוספות ואם הוא מוכן לטרוח ולעשות זאת כל חודש, במשך השנתיים הרווח שלו יהיה אף גדול יותר (כ-1347 ל״י המקסימום שיוכל להגיע בריצה כזו הוא בערך עד 1350 ל״י) לכן ברור כי הנוסחה (1) כלומר $f(t)=1+rt$ איננה פתרון טוב לבעיית ההשקעה – אך **האם בכלל קיים** פתרון $f(t)$ כך שימנע מהלקוח התרוצצויות ומהבנק טירחה של רישומים נוספים כך שלא יהיה כדאי לו בהתחכמות שהצבענו עליה׳ – אולי אין

מבחינות לא מתמטיות כנראה שיש פתרון רצוי, כי אותה הנחה של פרופורציונליות לתנאי ההתחלתי K_0 טובה עבור הבנק ועבור הרדיואקטיביות והדוגמאות האחרות אשר להן אנו עדים לקיומן יש פונקציה מוגדרת $f(t)$ שאפילו אפשר למדוד אותה (כגון ברדיואקטיביות)

מכל מקום **אם נצא מההנחה שקיימת** פונקציה $f(t)$ במקרה הבנק, מהם התנאים שהיא צריכה לקיים, (למשל, בכדי למנוע את ההתחכמות שהזכרנו לעיל)

ראשית, נרשום את התנאי על הגדרתה

(E1) $f(t)$ **פונקציה המוגדרת עבור כל t ממשי** (וערכיה ממשיים), ואינה אפס באופן זהותי למעשה בהנחה זו יש קצת מן האבסורד – הרי אדם לא ישקיע כספים למיליון שנים, ואפילו במקרה הרדיואקטיביות הרי לכל הדעות לא היה החומר קיים בצורה זו לפני מיליארדי שנים ואף על פי כן נוח לנו להניח מצב אידיאלי שבו גורמים אחרים אינם משפיעים ואזי $f(t)$ מוגדרת לכל t אך העובדה ש-$f(t)$ איננה באופן זהותי אפס מוצדקת מאוד (מדוע?)

אך התנאי החשוב במיוחד

(E2) **לכל** s, t **ממשיים** $f(t+s) = f(t)f(s)$

כיצד הגענו לתנאי זה? – כאן אנו משתמשים בהנחה המשותפת לכל התופעות שהזכרנו והיא שהתוצאה פרופורציונלית לתנאי ההתחלה – וזו ההנחה המונעת את התחבולה שהזכרנו לעיל כיצד אדם שהשקיע את הלירה שלו למשך $t+s$ שנים יקבל $f(t+s)$ לירות (אם פונקציה $f(\ )$ קיימת), אך אם יתחכם וכעבור t שנים יוציא את כספו יקבל $A = f(t)$ ל״י ושוב ישקיע ל-s שנים, יהיה הכסף שיעמוד לרשותו $Af(s)$ לירות שהם $f(t)f(s)$ ובשני המקרים יהיה הכסף מונח $t+s$ שנים אם הבנק מעוניין שהכסף יהיה מונח זמן רב יותר והוצאת ביניים לא תהיה כדאית, הרי שעליו לשלם כעבור $t+s$ שנים יותר מאשר $f(t)f(s)$ ל״י, אך את המינימום ההכרחי מעל סכום זה, כלומר הסכום שהוא ישלם $f(t+s)$ יהיה בדיוק $f(t)f(s)$ וזהו בדיוק התנאי (E_2) והנחה זו (פרופורציונלית לתנאי התחלה) הנכונה לכל הדוגמאות שהזכרנו – נותנת שכל הפונקציות הללו תקיימנה את (E_2)

האם יש עוד תנאים שהפונקציות מקיימות? למשל רצוי להניח

(E3) **הפונקציה מונוטונית** (עולה או יורדת)

כי ככל שיארך זמן ההשקעה ישלם הבנק יותר, או למשל במקרה הרדיואקטיביות הולכת כמות החומר המקורי ויורדת

בניגוד להנחות הקודמות הרי הנחה זו תמלא תפקיד רק בשלבים מאוחרים של הפיתוח המתמטי

אפשר גם להניח כי $f(0) = 1$, כי אם השקענו לירה בזמן $t = 0$ ומיד הוצאנו את הכסף נקבל שוב את הלירה (נתעלם מהוצאות ניהוליות) – אך למרבה הפלא – הנחה זו היא מסקנה **מתמטית** מההנחות הקודמות וכאן המסקנה המתמטית מתיישבת יפה עם ההנחות הסבירות במציאות

4. נעבור אם כן לטיפול מתמטי בקבוצות פונקציות f, שתיקראנה פונקציות E המקיימות את התנאים

(E1) **מוגדרות עבור כל t ממשי ואינן באופן זהותי 0**

(E2) **לכל** t, s **ממשיים** $f(t+s) = f(t)f(s)$

ובשלב מאוחר יותר גם

(E3) **פונקציה מונוטונית (עולה או יורדת).**

הדרישה (E2) ידועה **כמשוואה הפונקציונלית** של הפונקציות השייכות למשפחה E

אנו נתייחס לדרישות (E1) ו-(E2) (ומאוחר יותר גם ל-(E3)) כמערכת אקסיומטית של הפונקציות $f(t)$ השייכות למשפחה E, וננסה עתה לבנות מערכת משפטים שכל פונקציה f המקיימת דרישות אלו תמלא

משפט א. לכל t ממשי $f(t) \neq 0$

הוכחה אם קיימת נקודה a שעבורה $f(a) = 0$ אזי נקבל מ-(E2) כי לכל x $f(x) = f(a)f(x-a) = 0$ כלומר $f(x) \equiv 0$, הנוגד הדרישה (E1)

משפט ב. $f(0) = 1$

הוכחה $f(0) = f(0+0) = f(0)f(0)$ ואם נחלק ב-$f(0)$ ה-$\neq 0$ לפי משפט א, נקבל $f(0) = 1$

משפט ג. לכל s, t ממשיים $f(t-s) = \dfrac{f(t)}{f(s)}, f(-t) = \dfrac{1}{f(t)}$

הוכחה מ-(E2) $f(t) = f(s)f(t-s)$ ולכן $f(t-s) = \dfrac{f(t)}{f(s)}$ ומותר לחלק ב-$f(s)$ כי $f(s) \neq 0$ ממשפט א ואם נציב $t = 0$ נקבל $f(-s) = \dfrac{1}{f(s)}$

משפט ד. לכל t ממשי $f(t) > 0$

הוכחה לפי (E1) $f(t) = f\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\right) = f\left(\frac{t}{2}\right)f\left(\frac{t}{2}\right) = f\left(\frac{t}{2}\right)^2 > 0$

מסקנה הפונקציות f מעתיקות את המספרים הממשיים לתוך המספרים החיוביים

5. נעצור לרגע ונשאל אם גם יש מובן שימושי למערכת המשפטים שקיבלנו, אם אפשר למצוא להם גם תרגום לעובדות במסגרת המקרים שהביאו אותנו להנחה שהתופעה מתוארת על-ידי פונקציה מהמשפחה E

לכמה מהמשפטים יש אכן מובן פשוט ביותר ואחרים מגלים שבתנאים מסוימים המובן אינו סביר – וכך מתגלות המגבלות

באידיאליזציה של המצב, שהייתה אבן-פינה להנחה שהביאה לפונקציה ממערכת E

משפט ב האומר $f(0)=1$ מבטא עובדה פשוטה וברורה, אם התחלת בגרם אחד של חומר רדיואקטיבי הרי נשאר לך גרם אחד בהתחלה $t=0$ ויותר בולט במקרה הבנק אם השקעת לירה אחת ומיד תרצה להוציא את הכסף, לא תקבל יותר מ- $f(0)=1$ הלירה שהשקעת

משפט ד – אומר במקרה הבנק שתמיד יהיה לך כסף בבנק כי $f(x)>0$ ולא שתהא אי פעם חייב לבנק $(f(x)<0)$ אולם במקרה של הרדיואקטיביות או בהתפשטות מגפה – אומר המשפט שתמיד יישאר חומר רדיואקטיבי – תמיד יישארו אנשים שלא נפגעו במגפה עובדות אלו אינן מתקבלות על הדעת במקרה שגודל האוכלוסיה, או כמות החומר הרדיואקטיבי קטנים ביותר –מספר אטומים או כמניין אנשים הרי כעבור זמן קצר ייעלם כל החומר – האדם האחרון ייפגע ויחלה, האטום האחרון יתפרק ומה המסקנה? סתירה במתמטיקה? ודאי שלא, אלא שההנחה על הפרופורציוניות למספר ההתחלתי מותרת רק עבור קבוצות גדולות מאוד ולא עבור איברים בודדים

6. נשאל את השאלה ההפוכה האם יש עובדות המתקבלות על הדעת במציאות המקרים שהדגמנו, המתוארים בעזרת פונקציות E, שאפשר לנסח אותן כעובדות או נכון יותר כמשפטים מתמטיים המתקיימים עבור כל פונקציות המשפחה E ואכן יש ויש, ובדרך כלל המשפטים המתאימים אינם קלים להוכחה והרי מספר דוגמאות

במקרה ההשקעה בבנק בנק א (הנוהג לפי פונקציה $(f(t))$ נותן עבור השקעה של 1 לירה בסוף השנה הראשונה $f(1)=a$ ל"י, ובנק ב (הנוהג לפי פונקציה $(g(t))$ גם הוא נותן את אותו הסכום a ל"י בסוף השנה הראשונה היכן כדאי יותר להשקיע? – הדעת נותנת שאם בתהליכים אין אילוצים השונים בבנק א מבנק ב, הרי אין כל סיבה לבכר את א על ב, כלומר, אם כספים יושקעו בזמנים שווים בשני הבנקים, הם יתנו פירות זהים, וזהו המשפט המתמטי האומר

משפט ה. יהיו $f(t)$, $g(t)$ שתי פונקציות השייכות ל-E אם $f(1)=g(1)$ אזי לכל t ממשי $f(t)=g(t)$ (יתר על כן לכל $a>0$, קיימת פונקציה f ב-E כך $f(1)=a$)

המשפט נכון והוכחתו המתמטית אינה קלה חלקים ממנה יוכחו מאוחר יותר

דוגמה אחרת: אם $f(t)$ מתאר את כמות החומר הרדיואקטיבי שנשאר, או כמות השקעה כפונקציה של הזמן t הרי ללא כל ספק התהליך אינו תלוי באיזה יחידה אנו מודדים את הזמן, בשנים, שעות, שניות בכל מקרה הפונקציה צריכה להיות מאותו טיפוס המתארת השקעה או התפרקות וכדומה

כיצד מתבטא בצורה מתמטית השינוי ביחידת הזמן? אם מדדנו בשנים הרי אם נציג $t=12$ ו-s ימדוד את הזמן בחודשים, ואם מדדנו t בשניות הרי $r=\frac{t}{60}$ יהיה המדידה בדקות $t=60$ שניות תהיינה $r=1$ דקה אחת אם הפונקציה של הזמן $f(t)$ ניתנת ביחידה של t חודשים אז הפונקציה כפונקציה של הזמן s בשנים היא $g(s)=f(12s)$, וכן $g(r)=f\left(\frac{t}{60}\right)$ כפונקציה של הזמן r הנמדד בשניות בשני המקרים הפונקציה $g(s)$ היא פונקציית גידול המתארת אותה תופעה ומשום כך צריכה לקיים את אותן הדרישות, כלומר, הן מקיימות את האקסיומות (E1) (E2) של המערכת E וזהו המשפט המתמטי האומר

משפט ו. אם $f(t)$ מקיימת את (E1) ו-a מספר קבוע, אזי גם הפונקציה $f(at)=g(s)$ שייכת למשפחה E (כפונקציה של t)

משפט זה קל להוכיח ברור כי $g(s)$ מוגדר עבור כל s ממשי. כלומר $g(s)$ מקיים את (E1) הוכחת הדרישה (E2) יהי $p=at$ $q=as$

$$g(p+q)=f(at+as)=f(at)f(as)=g(p)g(q)$$

דוגמה שלישית (מסובכת יותר) נטפל במקרה ההשקעה – האם הדרישות (E1)(E2) מכילות בתוכן כמסקנה את אחת הבעיות שהעלינו והיא שהבנק מעוניין שהלקוח ישאיר את כספו בבנק במשך זמן רב ככל האפשר ולא יוציא אותו מוקדם יותר ראינו קודם שלא כדאי להוציא את הכסף ומיד להשקיע אותו בחזרה לפי אותה פונקציה (אם היא שייכת למשפחה E) עתה נסתכל במקרה שונה בהשקעה בריבית של p% כעבור (t שנים) יתקבל מלירה $K_t^1=1+rt$ לעומת זאת בהשקעה לפי פונקציה $g(t)$ השייכת למשפחה E יתקבל $K_t^2=f(t)$

המטרה המוצהרת היא שגם אם לזמן קצר ייתכן שהשקעה בריבית גבוהה p (r גדול) היא כדאית, לזמן ממושך, בסופו של דבר, כדאית ההשקעה בשיטה השנייה – כלומר החל מזמן T גדול למדי, יהיה לכל $T<t$ $K_t^1<K_t^2$ מהו המשפט המתמטי – (נכון) המתאים

משפט ז. יהי $r>0$, $f(t)'$ פונקציה השייכת למשפחה E, אזי קיים $0<T$ כך שלכל $T<t$ יהיה $1+rt<f(t)$

ומה המצב עד אותו רגע שבו הם משתווים – האם יש בשיטת ההשקעה לפי $f(t)$ היתרון של כדאיות החזקת הכסף עד אותו זמן? (לאחריו – ודאי, כפי שראינו)
ואמנם, נניח $f(1)=1+rt$ זאת אומרת – שבסוף השנה (או יחידת הזמן) ההשקעה בריבית רגילה $p\left(r=\frac{p}{100}\right)$ תשווה לכסף המתקבל בשיטת f לפני תום הזמן לא כדאי להוציא את הכסף – אם הוא לא הושקע בריבית הרגילה כלומר אם

$0<t<1 \quad f(t) < 1+rt$, והוא המשפט הניתן להוכחה מתמטית

משפט ח. יהי $r>0$, $f(t)$ פונקציה השייכת ל-E ויהי $f(1)=1+r$ אזי לכל $0<t<1 \quad f(t) < 1+rt$

נוכיח את המשפט, במקרה שבו $t=\frac{1}{2}$ (הוצאת כספים במחצית השנה)

בריבית הרגילה יקבל הלקוח $1+r\frac{1}{2}$ ובהשקעה המוצעת לפי E

יהי $f\left(\frac{1}{2}\right)$ בסוף השנה הראשונה שתי ההשקעות נותנות את אותן הפירות כלומר $f(1)=1+r$ עתה קל לחשב את $f\left(\frac{1}{2}\right)$, כי

$$f\left(\frac{1}{2}\right)^2 = f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = f(1)$$

ולכן $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{f(1)}=\sqrt{1+r}$ והמשפט שלנו טוען כי

$$\sqrt{1+r} < 1+\frac{r}{2}$$

ואכן תוצאה זו נובעת מהוצאת השורש הריבועי של האי-שוויון

$$1+r < \left(1+\frac{r}{2}\right)^2$$

בהזדמנות קודמת ראינו כיצד לחשב את $f\left(\frac{1}{2}\right)$ של פונקציה ממשפחה E, כשידוע ערך אחד לפחות, במקרה שלנו $f(1)$ הסיבה היא התכונה E(2) ואמנם בעזרתה אפשר לחשב את ערך הפונקציה בכל נקודה רציונלית את התוצאה ננסח במשפט הבא

משפט ט. תהי $f(t)$ שייכת למשפחה E ויהי $f(1)=a>0$ אזי

1 לכל n,m, $f(n)=a^n$, $f\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{a}$, $f\left(\frac{n}{m}\right)=(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

ובצורה כללית יותר

2 לכל x ממשי $f\left(\frac{m}{n}x\right)=\sqrt[n]{f(x)^m}$

ההוכחה פשוטה למדי

$$f(n)=f(1+\quad+1)=f(1)f(1) \quad f(1)=f(1)^n=a^n$$

ובדרך דומה $f(nx)=f(x+\quad+x)=f(x)^n$ ועבור $\frac{1}{n}$ נקבל

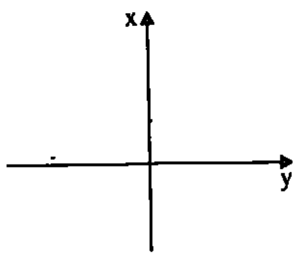
$$a=f(1)=f\left(n\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

ולכן $f\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{a}$ שאר חלקי המשפט נובעים בנקל מהשוויון

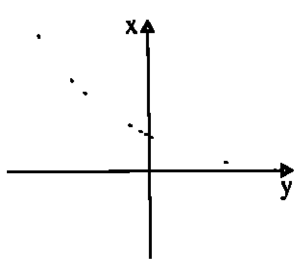
$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=f\left(m\frac{1}{n}x\right)=f\left(\frac{1}{n}\quad m\quad x\right)$$

המשפט האחרון קובע שאם $f(1)=a$ נתון הרי נקבעו כל הערכים $f\left(\frac{p}{q}\right)$ לכל $r=\frac{p}{q}$ רציונלי, ובזה מוכח למעשה בחלקו משפט ה שניסוחו בא מתרגום המסקנה הכלכלית טיפול בערכים אירציונלים נשאיר לסוף

עתה נוכל גם לתאר את נקודות הגרף, לפחות עבור ערכים שלמים עבור $a>1$ הגרף צורתו תהיה



ועבור $0<a<1$



גם עבור ערכים רציונליים קל להוכיח כי הנקודות הנוספות תמלאנה את הרווחים זה נובע מהמשפט הבא

משפט י. יהי $f(1)=a>1$, אם $\frac{m}{n}<\frac{p}{q}$ יהיה $f\left(\frac{m}{n}\right)<f\left(\frac{p}{q}\right)$,

כלומר הפונקציה עולה עבור ערכים רציונליים (וכן תהיה יורדת אם $f(1)=a<1$)

הערה מה המצב כאשר $a=1$?

המשפט נובע מהעובדה שאת האי-שוויון בין המספרים האירציונלים אפשר לנסח כאי-שוויון בין המספרים השלמים $qm<pn$ (אנו מטפלים כאן רק במקרה $0<n$, $0<q$) וזו גוררת כי $a^{qm}<a^{pn}$ ואם נוציא את חשורש $\frac{1}{qn}$ משני האגפים נקבל

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=\sqrt[n]{a^m}<\sqrt[q]{a^p}=f\left(\frac{p}{q}\right) \quad \text{כנדרש}$$

עתה נוכל להכניס את הסימון המקובל

סימון: אם f פונקציה השייכת למשפחה E, ו-$f(1)=a$, אזי נסמן $f(x)=a^x$

הסימון מכיל את החזקה הידועה לנו על מספרים טבעיים כי $f(n)=a^n$, ובעזרת משפט ו ומשפטים ב ו-ג מקבלים אנו

משפט יא. $a^{1/n}=\sqrt[n]{a}$. $a^0=1$ $a^{-n}=1/a^n$. $a^{m/n}=(\sqrt[n]{a})^m$

כיצד נחשב את a^x עבור x אירציונלי?

כאן בפעם הראשונה נכנסת לתמונה הדרישה (E3) והיא מונוטוניות הפונקציות E נטפל רק במקרה $a>1$
כיוון ש- a^x מונוטונית לפי (E3), וראינו כי היא מונוטונית עולה עבור ערכים רציונליים – הרי היא חייבת להיות מונוטונית **עולה** לכל הערכים אם x אירציונלי אפשר לסגרו בין שני מספרים רציונליים שהמכנה שלהם הוא כל מספר טבעי n רצוי ואזי $\frac{m}{n}<x<\frac{m+1}{n}$ מהמונוטוניות ינבע שגם $f\left(\frac{m}{n}\right)<f(x)<f\left(\frac{m+1}{n}\right)$ כך $f(x)$ הוא ערך בקטע $\left[f\left(\frac{m}{n}\right),f\left(\frac{m+1}{n}\right)\right]$, אך ככל ש-n יגדל יצטמצם הקטע והערך $f(x)$ ייקלע לתוך המשותף של כל הקטעים הללו עבור כל $n=1\,2$ מיד נראה שקיים רק מספר אחד ויחיד שיכול להיקלע לקטע זה כי אילו היו שני ערכים, c, b, כך שלכל n (ו-m) אם $\frac{m}{n}<x<\frac{m+1}{n}$ יהיה $f\left(\frac{m}{n}\right)<b<f\left(\frac{m+1}{n}\right)$ וגם $f\left(\frac{m}{n}\right)<c<f\left(\frac{m+1}{n}\right)$ אם נניח $b\ge c$ ואז $1\le\frac{b}{c}<f\left(\frac{m+1}{n}\right)/f\left(\frac{m}{n}\right)$ האגף הימני $=f\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{a}$

לפי (E2) ולכן $a<\left(\frac{b}{c}\right)^n$ לכל n (ובלתי תלוי ב-m), אך זה ייתכן רק אם $b=c$, והוא הערך של $f(x)$ בסיכומו של דבר הוכחנו למעשה את משפט היחידות, כלומר אם $f(1)=g(1)=a$ הרי $f(x)=g(x)$ לכל x ואי לזאת מוצדק לסמן פונקציה זו a^x

תכונה חשובה אחרת של הפונקציות הללו טוענת שהעלייה ה״יחסית״ של הפונקציה לאורך קטע נתון היא קבועה, ואינה תלויה בנקודה שבה הקטע מתחיל כלומר בין t ל- $t+\delta$ התוספת של הפונקציה Δf פרופורציונלית לערך $f(t)$ $\frac{\Delta f}{f}$ הוא מספר שאינו תלוי ב-t אלא רק ב- δ הוכח׳ האם אפשר להסיק מכך גם מסקנות מעשיות׳

7. בשיטה המקובלת המבוססת על מושג החזקה a^x כפי שהוא מוכנס ביסודות האנליסה (שאף אנו השתמשנו בהגדרה עבור x טבעי) בעזרת אינדוקציה וההגדרות ב-(יא) ובעזרתן מוכיחים את הכלל הבסיסי $a^{x+y}=a^xa^y$ עבורנו הוא היה משולב במערכת האקסיומות כמו שגם $a^{-t}=1/a^t$ אך קיימות כמה תכונות נוספות כגון

משפט יב. 1) $(a^s)^t=a^{st}$ 2) , $(ab)^x=a^xb^x$ 3) , לכל מספר ממשי $0<y$ קיים x כך $a^x=y$, 4) יהי $a>1$, ו-$f(t)$ פונקציית E אזי קיים r ממשי כך $f(t)=a^{rt}$

נוכיח לפי שיטתנו את (1) ו-(2) (3) הוכחתו דורשת אמצעים עמוקים יותר ו-(4) מאפיין למעשה את כל המשפחה E, ונובע בנקל מ-(3) ממשפט ו אנו למדים שאם $f(t)=a^t$ שייכת למשפחה E תהיה גם עבור s קבוע $g(t)=f(st)$ פונקציה השייכת למשפחה E לכן אם נסמן $g(1)=b$, $g(t)=b^t$ אך מאידך גיסא $g(1)=b=f(s)=a^s$, $g(t)=f(st)=a^{st}$ ומשני היחסים נקבל כי

$$g(t)=b^t=(a^s)^t=a^{st}$$

בדרך דומה $f(x)=a^x$ פונקציה במערכת E , $g(x)=b^x$ כנ״ל אזי גם $f(x)g(x)$ שייכת למערכת E (הוכח׳) ולכן $f(x)g(x)=[f(1)g(1)]^x$ לפי ההגדרה מכאן נקבל את השוויון

$$a^xb^x=f(x)g(x)=[f(1)g(1)]^x=(ab)^x$$

8. לסיכום כמה מהיתרונות והחסרונות של הטיפול בחזקה בפונקציות E, ולא נעמוד על הדברים הגלויים שאותם נשאיר בידי הקורא

ביססנו מערכת אקסיומטית מצומצמת ששורשיה נעוצים בתרגום לערכים קונטיטטיביים של תהליכים פיסיקליים, כלכליים וכדומה על-ידי מיצוי והפשטה של התהליכים ולמעשה לא גילינו שאכן קיימות פונקציות (לא טריויאליות) במערכת E בדוגמאות של האוכלוסיה והרדיואקטיביות – שיש אפשרות לעקוב אחריהן ולמדוד אותן הפונקציות קיימות, אולם בתחומים מוגבלים ובתנאי אידיאליזציה, והרוצה לערער יכול לטעון ובצדק שלתיאור התופעה יש צורך בפונקציות אחרות כי אין במציאות המעשית והמתמטית פונקציות השייכות למערכת E גם ההגינות המתמטית דורשת הוכחה בלתי תלויה במציאות הפיסיקלית לקיום פונקציות במערכת E (לא טריויאליות $f\equiv 1$) בדיוק כפי שאין מנסים לתאר את הפונקציה הריבועית בעזרת התופעה של נפילה חופשית או של גוף הנע בתאוצה קבועה

דרך אחת שאפשר להתגבר עליה היא הוספת אקסיומה נוספת שתטען כי ״קיימת לפחות פונקציה **אחת** $f(t)$ במשפחה E אשר $f(t)\equiv 1$ ״ (אז אפשר להוכיח את משפט הקיום ב-ה׳) בדיוק כמו שבגיאומטריה מוסיפים אנו כמה אקסיומות קיום למערכת, או כמו בבנייה אקסיומטית של שדה המספרים הממשיים

מטעמים מובנים יש הסתייגות לדרישה נוספת שמא האקסיומה הנוספת למעשה סותרת את האקסיומות הקודמות, וכל עוד יש באפשרותנו לבנות מודל שבו אפשר להוכיח את החלק של משפט ה הנתון בסוגריים, ללא אקסיומה נפרדת – נבכר ללכת בשיטה זו ואמנם קיימות דרכים שונות להשגת מטרה זו אם בדרך הקלסית של הגדרת a^x לכל x ולכל $a>0$, או בעזרת החשבון הדיפרנציאלי של הגדרת הלוגריתם כאינטגרל והחזקה כפונקציה ההפוכה, או כפתרון של משוואה דיפרנציאלית $y'=y$ כל הדרכים כשרות, אך כהתחלה די אם נתייחס לקיום כדבר אינטואיטיבי