תפקידם של פרדוקסים בהתפתחות המתמטיקה[1]

ישראל קליינר, אוניברסיטת יורק, אונטריו
נצה מובשוביץ-הדר, הטכניון, חיפה

פתח דבר

אפשר לומר שפרדוקס הוא אמת העומדת על ראשה כדי למשוך תשומת לב. אין ספק שפרדוקסים שובים את השכל בעת ובעונה אחת הם מפתים, מרגיזים, משעשעים, ומכעיסים. יתרה מזאת, הם מעוררים סקרנות, מניעים וממריצים את החשיבה.

במאמר זה נציג דוגמאות של פרדוקסים שבהשראתם התבהרו מושגים בסיסיים ובעקבותיהם הושגו תוצאות מרכזיות. במהלך ההיסטוריה של המתמטיקה הדוגמאות יעסקו במספרים, בלוגריתמים, בפונקציות, במשיקים, בסדרות אינסופיות, בקבוצות, בעקומים ובפירוקן של צורות גיאומטריות.

נשתמש במונח "פרדוקס" במובן הרחב של המלה הכולל חוסר-עקביות, דוגמה נגדית לרעיון מקובל למדי, תפיסה מוטעית, טענה אמיתית אשר נראית כשקרית, או טענה שקרית שנראית כאמיתית. במובנים שונים אלו מילאו הפרדוקסים תפקיד חשוב בהתפתחות המתמטיקה. אכן, כפי ש-Bell ו-Davis ניסחו זאת, בהתאמה

> במתמטיקה, הטעויות והקשיים הבלתי-פתורים של העבר היוו תמיד את ההזדמנויות לעתידה ([1], עמ' 283)
>
> אחד ההיבטים המפתים ביותר של המתמטיקה הוא שלפרדוקסים הקוצניים ביותר שלה יש נטייה לפרוח לתיאוריות יפהפיות ([6], עמ' 55)

פרדוקסים יכולים למלא תפקיד שימושי גם בכיתה. את המבוכה וחוסר הביטחון הזמניים שהם עשויים לגרום לתלמידים, אפשר לנצל לטובה. מצבים של קונפליקט ושל חוסר נוחות הם כלים פדגוגיים רבי-תועלת (בתנאי, כמובן, שהם מטופלים). הם יכולים לסייע בטיפוח של גישה בלתי תבוסתנית למצב של "אני תקוע(ה)", הם יכולים לספק לתלמידים הזדמנות לויכוח ולבירור של מחלוקות בנושאים מתמטיים, ולקדם את ההכרה שלהם בכך שפעמים רבות זוהי הדרך שבה מתפתחת המתמטיקה. ההבנה של ההתמודדות אשר בה עמדו חלק מגדולי המתמטיקאים של כל הזמנים תוך כדי בניית המושגים והגעה לתוצאות חדשות, יכולה לעזור למורים להבין את קשיי התלמידים בהתמודדם עם מושגים ותוצאות אלה חרף היותם פרדוקסליים ואתגריים. בזמנם, התקבלו תוצאות אלה על דעתם של הדורות הבאים. כדבריהם של קסנר וניומן

> זרם השינויים העוברים על מורשת המדע הוא רצוף עד כדי כך שדבר הכפירה של אתמול הוא התורה של היום והיסוד המוסד של מחר ([12], עמ' 193)

פרדוקסים העוסקים במספרים

התפתחות מושג המספר זרועה בפרדוקסים כמעט לאורך כל הדרך. כפי שניסח זאת דייוויס

> פרדוקסלי הוא שבעוד שהמתמטיקה ידועה כתחום היחיד אשר אינו סובל סתירות כלשהן, המציאות היא שיש לה היסטוריה ארוכה של דו-קיום בשלום עם סתירות. בצורה הטובה ביותר אפשר לראות זאת בהרחבות של מושג המספר אשר בוצעו במשך כ-2500 שנה מקבוצות מוגבלות של מספרים שלמים, לשברים, מספרים שליליים, מספרים אי-רציונליים, מספרים מרוכבים, ועד למספרים טרנספיניטיים, כל הרחבה, בדרכה שלה, התגברה על קבוצת דרישות סותרות ([7], עמ' 305)

המשפט הראשון בציטוט לעיל יכול להיחשב כמֶטה-פרדוקס - הצהרה פרדוקסלית, לא טכנית, על אודות תופעה פרדוקסלית, טכנית. בהמשך נצביע על מגוון של מֶטה-פרדוקסים מסוג זה, הם מעניינים בזכות עצמם כנושאים לדיון או להרהור פילוסופי. אולם עתה ניגש לפרדוקסים אחדים העוסקים בהתפתחותן של מערכות מספרים שונות.

א. הפיתגוראים של המאה ה-6 לפה"ס האמינו שאפשר לתאר את מידתו של כל קטע על-ידי מספר שלם חיובי או על-ידי יחס בין שני מספרים שלמים כאלה. הייתה זו עבורם לא רק עובדה המתקבלת מאוד על הדעת, אלא אחד מעיקרי אמונתם, חלק מהותי של הפילוסופיה שלהם. יתר על כן, הרעיון היה בסיס לתורת הפרופורציה הפיתגוראית (ר' [23]). הם הוכו, איפוא, בתדהמה גדולה (פרדוקס) כאשר גילו שאת מידת האלכסון של ריבוע היחידה **אי** אפשר לבטא בעזרת מספר שלם או יחס בין שני מספרים שלמים, במלים אחרות, כפי שניסחו זאת היוונים האלכסון והצלע של ריבוע אינם בעלי מידה משותפת[2]. ההוכחה שלהם של תוצאה זו היא

---

[1] המקור האנגלי של זה מאמר הופיע בדצמבר 1994 בעיתון

American Mathematical Monthly 101, 10 963-974

תודת המחברים נתונה לסוזי שפירא על עזרתה בהכנת המהדורה העברית

המאמר זיכה את מחבריו בפרס ע"ש לסטר-פורד לשנת 1995 על המאמר המצטיין בעיתון הנ"ל המוענק על-ידי

MAA - The Mathematical Association of America

[2] אומרים על שני קטעים שהם בעלי מידה משותפת אם קיימת יחידת מידה שמידתו של כל אחד מהקטעים באמצעותה, היא מספר שלם. כל שני קטעים שהיחס בין מידותיהם הוא מספר רציונלי הם בעלי מידה משותפת. למשל, אם האורך של האחד הוא מטר והשני הוא בעל אורך של 2.5 מטר, היחידה של חצי מטר "נכנסת" לכל אחד מהם מספר שלם של פעמים ולכן הם בעלי מידה משותפת. לעומת זאת, אם האחד אורכו מטר והשני אורכו $\sqrt{2}$ מטר, אין להם מידה משותפת

בעיקרו של דבר ההוכחה שבה משתמשים כיום כדי להראות ש- $\sqrt{2}$ הוא אי-רציונלי הפיתגוראים קיבלו את הפרדוקס על-ידי שימוש במשפט פיתגורס אנו מגיעים מכאן אל

מֶטה-פרדוקס: משפט פיתגורס המיט אסון על הפילוסופיה הפיתגוראית ועל תורת הפרופורציה הפיתגוראית

לתגלית שהאלכסון וצלע הריבוע אינם בעלי מידה משותפת היו תוצאות מרחיקות לכת עבור המתמטיקה היוונית לזכותה ייאמר שבהשראתה הניח יודוקסוס את היסודות לתורת פרופורציה מתוחכמת אשר אפשר ליישמה הן לגדלים בעלי מידה משותפת והן לכאלה שאינם בעלי מידה משותפת למעלה מאלפיים שנה מאוחר יותר, הניע פיתוח זה את דדקינד להגדיר את הממשיים בעזרת "חתכי דדקינד" לחובתה של התגלית האמורה נזקף המהפך בכיוון הפיתוח של המתמטיקה היוונית (לפחות בתקופתה הקלאסית, והפורייה ביותר) משיתוף הרמוני בין המספר והגיאומטריה פנתה המתמטיקה היוונית אל התעסקות, כמעט בלעדית, בגיאומטריה

ב הכנסתם של המספרים השליליים לתוך המתמטיקה והשימוש שנעשה בהם בהמשך, עוררו לעתים מזומנות תדהמה וקשיים מרובים מסגרת תפיסתית מרכזית שהיה צריך לנטוש הייתה האיסור לחסר מספר גדול ממספר קטן ממנו וואליס (Wallis) ניסח זאת במאה ה-17 כך

איך יכול גודל כלשהו להיות יותר קטן משום דבר? או, כיצד זה יוכל מספר כלשהו להיות פחות מכלום? ([20], עמ' 438)

בין יתר הפרדוקסים העוסקים במספרים שליליים נמצאים השניים הבאים

1 וואליס "הוכיח" שמספרים שליליים הם גדולים מאינסוף הטיעון שלו היה שמאחר ש- $\frac{a}{0}=\infty$ (עבור a חיובי) הרי ש- $\frac{a}{[\text{מס' שלילי}]}>\infty$ מפני שהקטנת המכנה גורמת להגדלת השבר

2 במכתב ללייבניץ (Leibniz) התנגד ארנולד (Arnauld), מתמטיקאי ופילוסוף בן המאה ה-17, לשוויון $\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}$ מהסיבה שהיחס בין גודל מסוים לגודל קטן יותר אינו יכול להיות שווה ליחס בין הגודל הקטן יותר לגודל הגדול ממנו לייבניץ הסכים שקיים כאן קושי, אולם טען שיש לנהוג סובלנות כלפי המספרים השליליים משום שהם שימושיים, ובאופן כללי מובילים לתוצאות עקביות ([5], עמ' 39-40)

ההיסטוריה של המתמטיקה יודעת מקרים רבים של הצדקת רעיונות שאי-אפשר להסבירם בשום אופן, אלא על בסיס שימושיותם בעקבות זאת מגיעים שוב אל

מֶטה-פרדוקס: כיצד יכולים דברים חסרי משמעות או, במקרה הטוב, בלתי ניתנים להסבר, להיות כה שימושיים?

מובן שמתוך חוסר המשמעותיות או המבוכה עלו, עם הזמן, בהירות והבנה

ג פתרון משוואות ממעלה שלישית בעזרת רדיקלים (נוסחאות) היה אחד ההישגים הגדולים ביותר של המתמטיקה של המאה ה-16 פתרונו של קארדן (Cardan) למשוואה $x^3=ax+b$ ניתן על-ידי הנוסחה

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

בומבלי (Bombelli) יישם אותו למשוואה $x^3=15x+4$ וקיבל

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

קארדן שלל קודם לכן את הישימות של נוסחתו למשוואות כאלו היות שהדבר הוביל לשורשים ריבועיים של מספרים שליליים, שהוא דחה מכל וכל אולם בומבלי הבחין (על-ידי בדיקה) ש- $x=4$ הוא פתרון של המשוואה $x^3=15x+4$ (שני השורשים האחרים, $-2\pm\sqrt{3}$, גם הם ממשיים)

הנה לכם פרדוקס השורשים של $x^3=15x+4$ כולם ממשיים, אולם הנוסחה הנותנת את השורשים כוללת מספרים מרוכבים, שהיו באותה עת חסרי משמעות "נראה שהעניין כולו נסב סביב פלפול ולא סביב האמת" ציין בומבלי ([15], עמ' 2), והציב לעצמו את המשימה של יישוב אותו פלפול, דבר שהוביל ללידתם של המספרים המרוכבים[3] אולם, לידתם לא הביאה בעקבותיה באופן מיידי לידי לגיטימציה של מעמדם כמספרים לכל דבר לשם כך היה צורך ב-250 שנים נוספות, שרק בסופן זכו המספרים המרוכבים, באמת ובתמים, למעמדם המוכר כיום, כישויות מתמטיות

פרדוקסים העוסקים בלוגריתמים

שאלת משמעותם של לוגריתמים של מספרים שליליים ומרוכבים עלתה בראשית המאה ה-18 בקשר לאינטגרציה באנלוגיה למקרה הממשי, ביצע יוהאן ברנולי (Johann Bernoulli) אינטגרציה של $\frac{1}{x^2+a^2}$ כך

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{dx}{(x+ai)(x-ai)}=-\frac{1}{2ai}\int\left(\frac{1}{x+ai}-\frac{1}{x-ai}\right)dx$$

[3] בומבלי פיתח חוקים לטיפול בביטויים בעלי הצורה $a+b\sqrt{-1}$ וכתוצאה מכך הצליח להראות שאחד הערכים של $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ הוא אכן 4

$$=-\frac{1}{2ai}[\log(x+ai)-\log(x-ai)]=-\frac{1}{2ai}\log\frac{x+ai}{x-ai}$$

בתכתובת ביניהם (אשר החלה בשנת 1702 ונמשכה שישה-עשר חודשים, התווכחו ברנולי ולייבניץ על המשמעות של $\log\left(\frac{x+ai}{x-ai}\right)$ ועל המשמעות של $\log(-1)$ [4]

ברנולי טען ש $\log(-1)$ הוא מספר ממשי בעוד לייבניץ טען שהוא מספר מדומה, וכל אחד מהם הביא נימוקים שונים לתמוך בדעתו לדוגמה, ברנולי טען שמאחר ש-

$$\frac{dx}{x}=\frac{d(-x)}{-x}$$

הרי ש-

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{d(-x)}{-x}$$

ולכן $\log x=\log(-x)$ ובפרט $\log(-1)=\log 1=0$

בין נימוקיו של לייבניץ היו הטיעונים הבאים

1 מאחר שהטווח של $\log a$ עבור $a>0$ הוא כל המספרים הממשיים, הרי ש-$\log a$ עבור $a<0$ חייב להיות מדומה, שכן המספרים הממשיים כבר "נתפסו"

2 אילו היה $\log(-1)$ ממשי, אזי גם $\log i$ היה ממשי, שכן

$$\log i=\log(-1)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log(-1)$$

אולם זהו בבירור אבסורד, לדעתו של לייבניץ

3 הצבה של $x=-2$ בפיתוח לטור של

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-$$

נותנת

$$\log(-1)=-2-\frac{4}{2}-\frac{8}{3}-$$

היות שהטור מימין איננו מתכנס, הסכום איננו ממשי, ולפיכך הוא חייב להיות מדומה

אלה הן אכן דוגמאות מעניינות של אמנות (שלא לדבר על "מדע") המניפולציה הסימבולית של חלק מגדולי המתמטיקאים של המאות ה-17 וה-18 הפרדוקסים שהתקבלו "עינו אותי במשך זמן רב", ציין אוילר (Euler) ([17], עמ' 72) הוא יישב אותם במאמרו משנת 1749 אנו מצטטים מתוך ההקדמה המעניינת שלו ([14], עמ' 4)

> היות שהלוגריתמים הם בבירור חלק מהמתמטיקה הטהורה, יהיה זה מן הסתם מפתיע לגלות שעד כה הם היו נושא למחלוקת מביכה יהיה הצד שבו תומכים אשר יהיה, מופיעות בו סתירות שנראה כאילו בכלל אי אפשר ליישב אותן לפי שעה, אם על האמת להיות אוניברסלית, הרי שלא יכול להיות כל ספק בכך שסתירות אלו, ותיראנה בלתי פתירות ככול שתיראנה, יכולות להיות עניין של מראית עין בלבד אחשוף את כל הסתירות המעורבות במלואן, כך אפשר יהיה אפשר לראות עד כמה קשה לגלות את האמת ולהישמר מפני חוסר עקביות, אפילו כאשר שני אנשים דגולים עובדים על הבעיה

המפתח לפתרונו של אוילר הייתה נוסחת אוילר-קוטס (Euler-Cotes)

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

מנוסחה זו עולה כי

$$e^{i(\pi+2n\pi)}=\cos(\pi+2n\pi)+i\sin(\pi+2n\pi)=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

ומכאן

$$\log_e(-1)=i(\pi+2n\pi)$$

עבור $n=0,\ \pm1,\pm2,$

על-כן, $\log(-1)$ הוא ביטוי רב-ערכי (למעשה, בעל אינסוף ערכים) וכל ערכיו הם מרוכבים הן ברנולי והן לייבניץ טעו, איפוא, הראשון "יותר" מהאחרון

פרדוקסים העוסקים בפונקציות

מקורו של מושג הפונקציה בתחילת המאה ה-18 ניוטון ולייבניץ המציאו את החדו"א (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי) לקראת סוף המאה ה-17 לפנינו, לכן, עוד

מֶטָה-פרדוקס: חדו"א ללא פונקציות

החדו"א של ניוטון ולייבניץ לא היה חדו"א של פונקציות, אלא של עקומים (הנתונים על-ידי משוואות)

הפונקציה נתפסה בתקופות שונות כנוסחה, עקום, או התאמה שרירותית פרדוקסים שהתגלעו מדי פעם בפעם הדיחו מגדולתם היבט זה או אחר של התפיסות האלה של הפונקציונליות אפילו המשמעות של נוסחה כשלעצמה, כמו גם של מרחב הקיום שלה (כלומר, הפונקציות שאפשר לייצגן על-ידי נוסחאות), השתנו עם הזמן, והיו לעתים קרובות נושאים השנויים במחלוקת לדוגמה

א עבור אוילר ובני זמנו במאה ה-18, לפונקציה הייתה משמעות של נוסחה, כאשר המושג "נוסחה" בעצמו, אף כי לא הוגדר בקפידה, נבנה בצורה רחבה כדי לאפשר (בין היתר) לסכומים ומכפלות אינסופיים להיכלל בדרכי בנייתן היו הנחות סמויות אחדות

1 הפונקציה (הנוסחה) הייתה צריכה להינתן על-ידי ביטוי יחיד

לפיכך $f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ -x, & x\le 0\end{cases}$ לא נחשבה כפונקציה

2 המשתנה הבלתי-תלוי היה צריך להשתרע על פני כל המספרים הממשיים (למעט אולי נקודות מבודדות, כמו

[4] הסימון log משמש כאן ללוגריתמים הטבעיים (לפי בסיס e)

למשל ב- $(f(x)=\frac{1}{x}$

לפיכך $f(x)=x,\quad 0\le x\le 1$ לא נחשבה פונקציה

3 ההנחה לגבי שתי פונקציות שמתלכדות על קטע הייתה שהן מתלכדות על פני כל הישר

החשיבות המיוחדת של ההנחות הללו נעוצה בכך שהאלגוריתמים של החדו"א התייחסו באותה תקופה רק לפונקציות כאלה

כתוצאה מעבודתו של פורייה (Fourier) על הולכת חום, אשר בוצעה בעשורים הראשונים של המאה ה-19, התהפכו על פיהן מרבות מהתפיסות (המוטעות) של המאה ה-18 ביחס לפונקציות פורייה טען לכך שהוא הראה שכל פונקציה המוגדרת על פני קטע כלשהו אפשר להציגה באותו קטע כסדרה אינסופית של סינוסים וקוסינוסים – סדרת פורייה [5]

לדוגמה, אם

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & 0<x<\pi\end{cases}$$

אזי

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\quad\right)$$

לכל x בקטע $(-\pi,\pi)$ [6]

עבודתו של פורייה הביאה בעקבותיה לנטישתן של הנחות בסיסיות אחדות בנוגע לפונקציות

1 נעשה לגיטימי, וחשוב, להתבונן בפונקציות שתחומן הוא קטע ולא הציר הממשי כולו

2 שתי פונקציות יכולות להתלכד על פני קטע אך להיות שונות מחוצה לו

3 פונקציה הניתנת על-ידי שני ביטויים נפרדים או יותר, יכולה להיות שווה לפונקציה הניתנת על-ידי ביטוי יחיד

ב במאמר משנת 1829 על סדרות פורייה הציג דיריכלה את מה שמכונה פונקציית דיריכלה (Dirichlet)

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{אם } x \text{ רציונלי}\\ 0, & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי}\end{cases}$$

פונקציה זו לא הייתה נוסחה וגם לא עקום היא הייתה סוג חדש של פונקציה, אשר תוארה על-ידי התאמה היא הייתה הראשונה מבין פונקציות רבות אשר קיבלו את הכינוי "פונקציות פתולוגיות" – אולם לא לזמן רב (ר' [25])

בסוף המאה ה-19 הרחיב בֶּר (Baire) (שוב) את רעיון הנוסחה עבורו נוסחה הייתה ביטוי המתקבל ממשתנה וקבועים אחדים על-ידי מספר חזרות (שיכול להיות אינסופי בר-מנייה) של פעולות חיבור, כפל ומציאת גבולות הוא קרא לפונקציה כזאת פונקציה הניתנת לייצוג אנליטי והראה שפונקציית דיריכלה היא מסוג זה, שכן

$$D(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\cos(m!px)^{n}$$

כך הפכה פונקציית דיריכלה ה"פתולוגית" לפונקציה מן השורה הניתנת לייצוג אנליטי

האם כל פונקציה ניתנת לייצוג אנליטי? – כן ולא אם אתם פורמליסטים, תוכלו להראות על-ידי טיעון של מנייה שהעוצמה של קבוצת הפונקציות הניתנות לייצוג אנליטי היא c בעוד שברור שקבוצת כל הפונקציות עוצמתה 2^{c} לפיכך יש מספר בלתי ניתן למנייה של פונקציות אשר אינן ניתנות לייצוג אנליטי אולם איש עדיין לא נתן אפילו דוגמה קונסטרוקטיבית אחת כזאת

פרדוקסים העוסקים ברציפות

למרות שרציפות היא כיום מושג בסיסי במתמטיקה, הגדרתה המודרנית לא נוסחה עד למאה ה-19, היא לא הייתה קיימת במשך כ-150 שנה לאחר המצאת החדו"א על-ידי ניוטון ולייבניץ במאה ה-18 הגדיר אוילר מושג מסוים של רציפות כתגובה על המחלוקת הנודעת על בעיית המיתר הרוטט ([18], עמ' 301) פונקציה רציפה הייתה פונקציה אשר נתונה על-ידי ביטוי יחיד (נוסחה) בעוד שפונקציה אשר נתונה על-ידי ביטויים אחדים נחשבה אי-רציפה לדוגמה, עבור אוילר הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ -x, & x\le 0\end{cases}$$

הייתה אי-רציפה, בעוד שהפונקציה המורכבת משתי זרועותיה של היפרבולה נחשבה לרציפה, מאחר שהיא ניתנה על-ידי הביטוי היחיד $f(x)=\frac{1}{x}$ (ר' [16], עמ' 301)

העבודה על טורי פורייה הצביעה על חוסר היכולת להגן על רעיון הרציפות של המאה ה-18 לדוגמה, הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -p<x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & 0<x<p\end{cases}$$

ניתנת (כפי שראינו) לייצוג על-ידי ביטוי יחיד, שהוא טור פורייה שלה, ולכן לפי מובנו של המושג רציפות במאה ה-18, הוא הייתה בעת ובעונה אחת הן רציפה והן אי-רציפה

בעבודה משנת 1821 פתח קושי (Cauchy) בהערכה מחודשת

[5] לאור התפיסה שלנו של פונקציות, תוצאה זו איננה נכונה, כמובן, באותה מידה של כלליות שייחס לה פורייה למרות זאת, פונקציות רבות למדי כן אפשר לייצגן על-ידי טורי פורייה למעשה, אין תימה בכך שבני זמנו של פורייה לא מצאו לכך דוגמה נגדית

[6] בחלק השני של המאה ה-18, בעקבות ויכוחים שנסבו סביב הבעיה הידועה בשם בעיית המיתר הרוטט, היה אפשר בחוגים מסוימים לדבר על פונקציות המוגדרות באמצעות יותר מביטוי אחד (ר' [16])

ובארגון מחדש של יסודות החדו"א של המאה ה-18 בעבודה זו הגדיר קושי את הרציפות למעשה כפי שאנו מבינים מושג זה כיום, למרות שהוא השתמש בשפה של אינפיניטיסימלים, שהייתה נפוצה אז, ולא בניסוח המקובל כיום של $\varepsilon-\delta$ אשר הוצג על-ידי ויירשטרס (Weierstrass) באמצע המאה ה-19 המפנה בנקודת המבט מתפיסתו של אוילר את מושג הרציפות לתפיסתו של קושי, היה יסודי ביותר אצל הראשון הייתה הרציפות תכונה גלובלית בעוד שאצל האחרון היא הייתה תכונה מקומית אולם במהלך הזמן התברר שמושג הרציפות הוא מורכב ועדין ביותר, כך שאפילו קושי ובני זמנו מתחילת המאה ה-19 עד מחציתה, לא הבינו אותו במלואו למשל

א קושי "הוכיח" שסכום אינסופי (טור מתכנס) של פונקציות רציפות הוא פונקציה רציפה ([4], עמ' 110) דבר זה, כמובן, אינו נכון דוגמה נגדית ניתנה על-ידי אבל (Abel) בשנות ה-20 של המאה ה-19 והיא בעצם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2n+1)x]}{2n+1}$ שבו נתקלנו קודם, אשר מתכנס לפונקציה שאיננה רציפה עבור $x=k\pi$, כאשר $k = 0, \pm1, \pm2,$ הטעות בהוכחה של קושי נבעה מאי-יכולתו להבחין בין התכנסות לבין התכנסות במידה שווה של טור פונקציות [7] למעשה, "ההכרה בתפקידו המרכזי של מושג ההתכנסות במידה שווה באנליזה התפתחה באיטיות במהלך המאה הקודמת" ([21], עמ' 97)

ב הפונקציות הרציפות של אוילר היו, לאמיתו של דבר, גזירות (למעט אולי בנקודות מבודדות) כך גם אלו של קושי – לפחות כך האמינו קושי ובני זמנו, וכך גם "הוכיחו" חלקם (ר' [26]) היה זה לכן מפתיע ביותר כאשר בשנות ה-60 של המאה ה-19 נתן ויירשטרס דוגמה לפונקציה רציפה שאינה גזירה בשום מקום, והיא $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b^n\cos(a^n\pi x)$ כאשר a הוא שלם אי-זוגי, b מספר ממשי בקטע $(0,1)$ ו- $ab>1+\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

דוגמה זו ושכמותה הראו בפעם הראשונה שמושג הרציפות הוא לאין ערוך רחב יותר מזה של גזירות, וכך התמסד המושג רציפות כמושג עצמאי וראוי למחקר בזכות עצמו הדוגמאות הצביעו גם על מגבלותיה של שיטת ההנמקה הגיאומטרית האינטואיטיבית באנליסה, וכך הובלט הצורך בניסוחים אנליטיים זהירים של רעיונות בסיסיים

בפיתוח מודרני מסוג אחר הראו שוורץ וסובולב בשנות ה-40 של המאה ה-20 שכל פונקציה רציפה היא אכן "גזירה" אולם הנגזרת היא מעתה "פונקציה מוכללת" ("התפלגות") לדוגמה

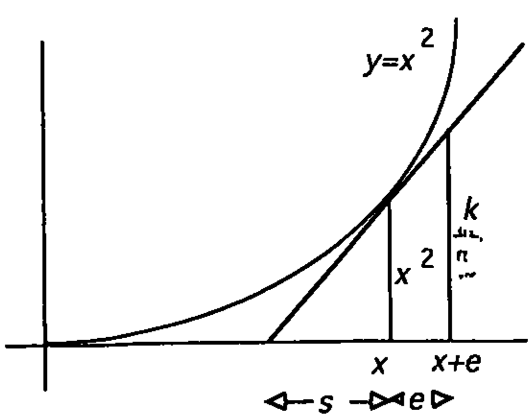
אם
$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ \frac{1}{2}, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

אזי
$$f'(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \infty, & x=0\end{cases}$$

שהיא $\delta(x)$, "פונקציית" דלתא של דיראק (Dirac) כפי שמראה דוגמה זו, קיימות אפילו פונקציות אי-רציפות שהן גזירות (במובן של שוורץ/סובולב) – גילוי מזעזע (היה יכולה להיות) עבור המתמטיקאים של המחצית השנייה של המאה ה-19

פרדוקסים העוסקים באספקטים אחרים של החדו"א (חוץ מרציפות)

א החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי (חדו"א) הומצא על-ידי ניוטון ולייבניץ (באופן בלתי תלוי) בשליש האחרון של המאה ה-17 אולם רבים מהרעיונות החשובים הופיעו כסימן לבאות כבר בעבודותיהם של מתמטיקאים ידועים, ובמיוחד אצל פֶּרמה (Fermat), בתחילת המאה ה-17 בשנות ה-30 המאוחרות של המאה ה-17 הוא פיתח שיטה לטיפול בבעיות של משיקים ונקודות מקסימום הדוגמה הבאה מדגימה את גישתו של פֶּרמה (ר' [8], עמ' 122) נניח שברצוננו למצוא את המשיק לפרבולה $y=x^2$ בנקודה כלשהי (x,x^2) תהי $x+e$ נקודה סמוכה על ציר ה-x על-ידי דמיון משולשים נקבל $\frac{x^2}{s}=\frac{k}{s+e}$ (ר' תרשים) פרמה מציין ש-k "שווה בערך" ל- $(x+e)^2$ אם נרשום $k\approx(x+e)^2$ נקבל $\frac{x^2}{s}\approx\frac{(x+e)^2}{s+e}$



[7] אומרים שהטור $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום מסוים וסכומו $S(x)$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים מספר טבעי $N(\varepsilon)$ שאינו תלוי ב-x כך שלכל $n>N$ מתקיים $\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-S(x)\right|<\varepsilon$

מכאן,
$$(s+e)x^2 \approx s(x+e)^2$$

$$s(x+e)^2 - sx^2 \approx ex^2$$

$$s \approx \frac{ex^2}{(x+e)^2-x^2} = \frac{ex^2}{x^2+2ex+e^2-x^2} = \frac{ex^2}{e(2x+e)} = \frac{x^2}{2x+e}$$

לפיכך,
$$\frac{x^2}{s} \approx 2x+e$$

בשלב זה פֶּרמה "מוחק" את e וטוען שהשיפוע של המשיק לפרבולה הוא $2x$

שיטתו של פֶּרמה ספגה ביקורת קשה מצד חלק מבני זמנו הם התנגדו להצגה ולהזנחה שלאחריה של e המסתורי חילוק ב-e (צימצום) פירושו התייחסות אליו כאל שונה מאפס הזנחת e מצביעה על התייחסות אליו כאל אפס דבר כזה איננו קביל, הם טענו בצדק בהקשר מעט שונה, אך עם הצדקה דומה, מתייחס בישוף ברקלי (Berkeley) במאה ה-18 אל ערכי e שכאלה כאל "רוחות רפאים של גדלים מן העבר" בטענו ש"בזכות טעות כפולה לא מגיעים אמנם למדע, אבל בכל אופן מגיעים לאמת" ([13], עמ' 428)

ההצדקה לאלגוריתמים של החדו"א של המאה ה-17 וה-18 הייתה שהם נתנו תוצאות נכונות – דוגמה חשובה נוספת לשימושיות של פרוצדורות "חסרות משמעות" (ר' לעיל, מֶטה-פרדוקס בחלק השני במאמר זה), נראה שהמטרה הצדיקה את האמצעים ביסוס קפדני של החדו"א הושג עם הצגת מושג הגבול בשנת 1821 על-ידי קושי ביסוס קפדני מסוג אחר הושג עם הצגת האינפיניטיסימלים בשנת 1960 על-ידי רובינזון (Robinson) מכאן,

מֶטה-פרדוקס: כיצד יכול החדו"א להיות מבוסס על שתי תיאוריות שונות, שבמובנים מסוימים אינן עולות בקנה אחד גבולות, המבוססים על המספרים ממשיים, ואינפיניטיסימלים, המבוססים על ההיפר-ממשיים? או, כפי שניסח זאת סטין (Steen) "הבסיס האפִּיסטמולוגי של האנליסה רחוק מלהיות מיושב" ([22] עמ' 92)

טורי חזקות היו כלי רב-עוצמה בחדו"א של המאה ה-17 ובמיוחד של המאה ה-18 טיפלו בהם כפולינומים לכל דבר, כמעט מבלי להקדיש תשומת לב כלשהי לשאלות של התכנסות למעשה, אוילר ואחרים השתמשו במודע בסדרות מתבדרות לתועלתם המרובה התוצאות שנתקבלו בצורה זו היו מרשימות וחשובות, אולם יחד עם זה, טעויות ופרדוקסים הפכו לבלתי-נמנעים הנה שניים

1 יש, ללא ספק, מעט מן המטפיזי באינסוף המתמטי הדוגמה הבאה, שמיוחסת לאוילר, מאשרת זאת ([13], עמ' 447)
על-ידי הצבת $x = -1$ בביטוי
$$(1+x)^{-2} = 1-2x+3x^2-4x^3+$$
הוא קיבל
$$\infty = 1+2+3+4+ \qquad (*)$$

על-ידי הצבת $x = 2$ בביטוי
$$(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+x^3+$$
מתקבל
$$-1 = 1+2+4+8+ \qquad (**)$$
היות שכל ביטוי באגף ימין של (**) גדול מהביטוי המתאים באגף ימין של (*) או שווה לו, הרי ש- $-1 > \infty$ מאידך גיסא ברור ש- $\infty > 1$ מכאן ש- $-1 > \infty > 1$ אוילר מסיק ש-∞ חייב להיות סוג של חוצץ בין המספרים החיוביים לשליליים, ובמובן זה הוא דומה ל-0

2 לעתים נהנו המתמטיקאים של המאה ה-17 וה-18 מאמנות המניפולציה של טורים ללא סיבה טובה יותר (כך נראה) מאשר הרצון שלהם להפגין את תעוזתם לדוגמה, הצבת $x = 1$ בטור
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} -$$
נותנת
$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$$

עד כאן הכול טוב ויפה אולם עתה, כך התפתח הטיעון, האגף הימני שווה ל-
$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ \ \right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ \ \right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ \cdot\right)=$$
$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ \ \right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ \ \right)=0$$

ולכן $\log 2 = 0$ רק באמצע המאה ה-19 רימן (Riemann) התיר פרדוקס זה בעזרת ההוכחה שסכום של טור המתכנס בתנאי יכול לקבל, עם סידורו מחדש, כל ערך שהוא "גילויו של פרדוקס זה הביא למעשה לבחינה מחודשת ולייסוד קפדני מחמיר של תורת הטורים האינסופיים" ([21], עמ' 30)

פרדוקסים העוסקים בקבוצות

במשך קרוב לשלושים שנה, בסוף המאה ה-19, פיתח קנטור (Cantor) רעיונות חשובים רבים בתורת הקבוצות, תוך שימוש אינטואיטיבי ("נאיבי") במושג של קבוצה ברבות הימים התברר שהמושג שלו בלתי-מספק ואף מוביל לפרדוקסים, שהמוכר ביותר ביניהם הוא כנראה הפרדוקס הקלאסי של ראסל (Russell) משנת 1902 תהי $R = \{x\ x \notin x\}$, אזי $R \in R$ אם ורק אם $R \notin R$ לפרדוקס זה הייתה השפעה עמוקה על מתמטיקאים לא מעטים (ר' [19]) הוא הרס את הלוגיקן פרגה (Frege), שזה עתה השלים עבודה בשני כרכים על אודות יסודות האריתמטיקה בלומדו על הפרדוקס של ראסל, הוא קונן ([13], עמ' 1192)

קריסת היסודות ברגע הסיום של העבודה הנשענת עליהם, היא הדבר הכי פחות רצוי שיכול לקרות למדען מכתבו של מר ברטרנד

ראסל שהתקבל כאשר הדפסת עבודתי עמדה להסתיים העמיד אותי במצב כזה

מצד שני, היו לפרדוקסים של תורת הקבוצות גם השפעות חיוביות בפרט, הם עוררו מתמטיקאים לתת משמעות מדויקת למושג של קבוצה על-ידי פיתוח יסודות אקסיומטיים שונים לתורת הקבוצות (לדוגמה האקסיומות של צרמלו-פרנקל (Zermelo-Fraenkel), תורת הטיפוסים של ראסל ווייטהד (Whitehead), מערכת גדל-ברנייז (Godel-Bernays)) למרות שמערכות אקסיומטיות מסוג זה עקפו את הפרדוקסים המוכרים, הן לא הבטיחו שלא יתעוררו חדשים כפי שמנסח זאת בציוריות פואנקארה (Poincaré) ([13], עמ' 1186)

> הקמנו גדר סביב העדר כדי להגן עליו מפני הזאבים, אך איננו יודעים אם עוד קודם לכן לא היו כבר זאבים אחדים בתוך הגדר

הנה שני מֶטה-פרדוקסים הנובעים מעבודתו של קנטור בתורת הקבוצות

מֶטה-פרדוקס 1:
לאינסוף יש גדלים שונים, לאמיתו של דבר, יש לו לאינסוף, אינסוף גדלים שונים

המֶטה-פרדוקס השני נובע מהצבתם של שני הציטוטים הבאים של פואנקארה ושל הילברט (Hilbert), בהתאמה בסמיכות זה לזה ([13], עמ' 1003)

מֶטה-פרדוקס 2:
– "הדורות הבאים יראו בתורת הקבוצות מגפה שממנה החלמנו "
– "איש לא יגרש אותנו מגן העדן שיצר למעננו קנטור"

פרדוקסים העוסקים בעקומים

מושג העקום הוא, כמובן, בסיסי בגיאומטריה עבור אוקלידס משמעותו הייתה "אורך חסר-רוחב" אוסף העקומים המוכרים לבני-זמנו היה קטן – חתכי החרוט, הקונכואידה, הספירלה, העקומים הריבועיים ועוד מספר מועט של עקומים נוספים המצב השתנה באופן דרמטי עם המצאת הגיאומטריה האנליטית במאה ה-17 מעתה כל משוואה בשני משתנים הפכה למייצגת עקום (מישורי), אף כי "למתמטיקאים של המאה ה-17 לא הייתה הגדרה אחידה של מושג העקום (והם כנראה גם לא הרגישו צורך בהגדרה כזאת)" ([3], עמ' 296) העיסוק הנמרץ בחקר העקומים נמשך במשך שלוש המאות הבאות, תוך שהנושא מושך אליו כמה מהמתמטיקאים הטובים ביותר אשר תקפו אותו באמצעים גיאומטריים, אנליטיים, אלגבריים, אריתמטיים וטופולוגיים פונקציות "פתולוגיות" אשר הוצגו במחצית השנייה של המאה ה-19 עוררו שאלות בדבר טבעם של העקומים לדוגמה, באיזה מובן פונקציה רציפה שאיננה גזירה בשום מקום מייצגת עקום? ג'ורדן (Jordan) השיב על כך (בשנת 1887) בעזרת ניסוח שהפך להיות ההגדרה הפורמלית הראשונה של עקום (למעט, אולי, זו של אוקלידס) עקום היה עבורו המסלול של נקודה הנעה בצורה רציפה ליתר דיוק עקום היה

$$\{(f(t),\ g(t)) \mid f,\ g\ [0,1]\to \mathrm{R}\ \text{רציפות פונקציות הן}\ g, f\}$$ [8]

בשנת 1890 נתן פיאנו (Peano) את הדוגמה המפורסמת והמדהימה של "העקום הממלא חלל", כלומר, הוא הציג מיפוי רציף של קטע היחידה על ריבוע (כולל חלקו הפנימי) אולם זה, לפי הגדרתו של ג'ורדן, הפך את הריבוע לעקום – מצב עניינים לגמרי לא רצוי "כיצד ייתכן שהאינטואיציה תוליך אותנו שולל עד כדי-כך" תהה פואנקארה ([24], עמ' 123) הגדרתו של ג'ורדן הייתה רחבה מדי והיה הכרחי לשנותה

אולם הגדרתו של ג'ורדן התבררה גם כצרה מדי שכן, ללא ספק, רצוי שהגרף של $y = \sin\dfrac{1}{x}$ עם נקודות הגבול שלו על ציר ה-y, כלומר

$$\left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) x \in (-\infty,0) \cup (0,\infty)\right\} \cup \{(0,y)\ -1 \le y \le 1\}$$

ייקרא בשם "עקום", אולם גרף זה אינו מסלולה של נקודה הנעה ברציפות [9]

מֶטה-פרדוקס: כיצד יכולה הגדרה להיות בעת ובעונה אחת גם צרה מדי וגם רחבה מדיי

פתרון משביע רצון של הדילמה הושג רק בשנות ה-20 של המאה ה-20 על-ידי מנגר (Menger) ואוריסון (Uryson) ראשית היה צורך להבהיר את המושג מימד ([18]) [10] כאשר דבר זה נעשה, הוגדר העקום כרצף חד-ממדי (ר' [28]) [11] הגדרה זו הוכיחה עצמה כמספקת עד לשנות ה-70 שבהן הציג מנדלברוט (Mandelbrot) עקומים – הפרקטלים שלו – אשר ממדיהם הם שברים (ר' [9])

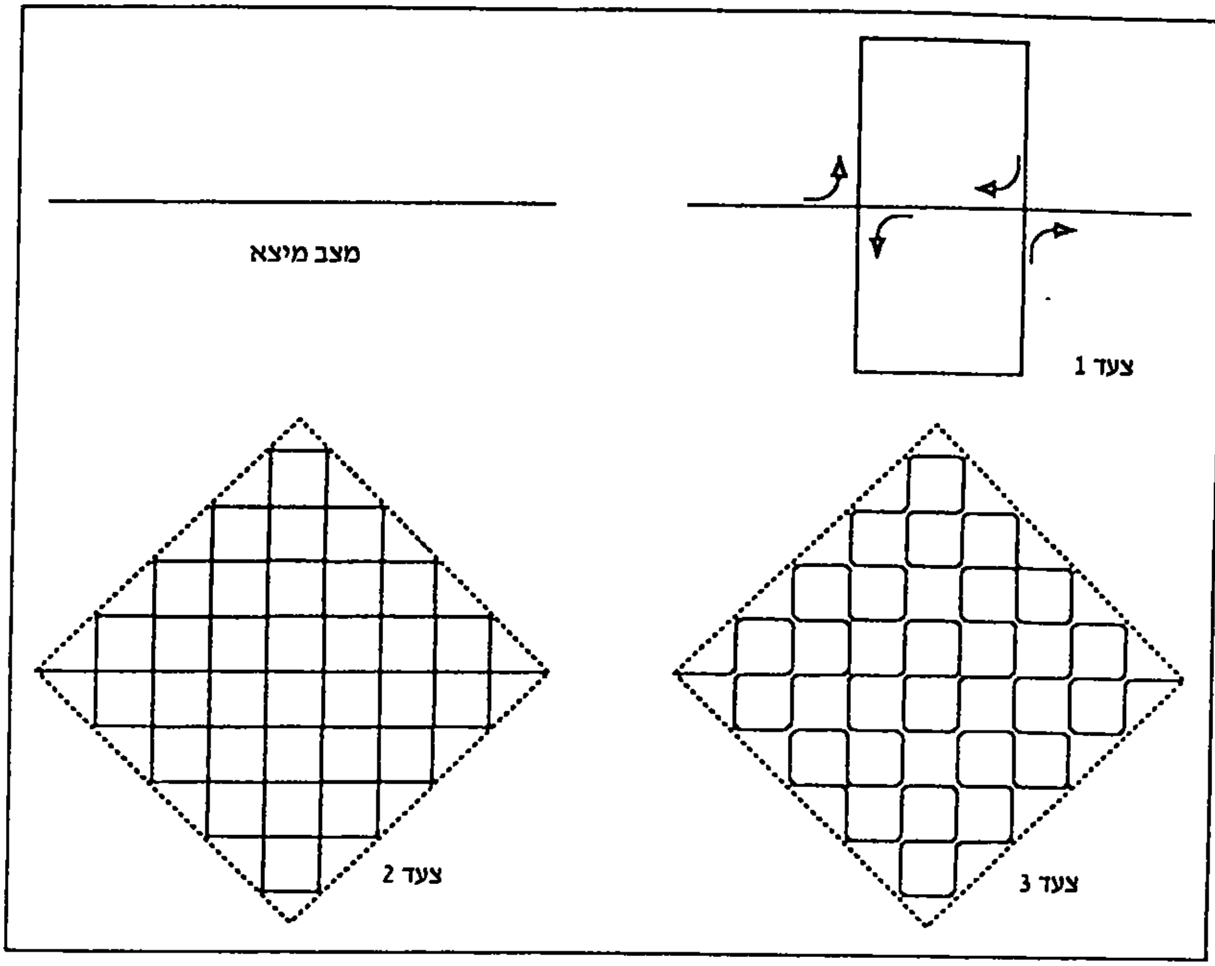
[8] זהו המושג של עקום שבמסגרתו ג'ורדן ניסח והוכיח (באופן מוטעה, כפי שהתברר בהמשך) את המשפט הידוע כמשפט עקום ג'ורדן

[9] דבר זה מובן מבחינה אינטואיטיבית, למרות שכדי להוכיח זאת אנו זקוקים למושגים טופולוגיים, (ר' [11], עמ' 1968)

[10] גם על רעיון זה קראה תיגר עקומת פיאנו הפרדוקסלית אשר רמזה על כך שריבוע הוא חד-ממדי מאחר שהוא התמונה הרציפה של קטע היחידה הוכחתו של קנטור על קיום התאמה חד-חד-ערכית בין קטע לבין ריבוע הבנוי עליו, העמידה בספק גם את הרעיון האינטואיטיבי של המימד

[11] רצף (continuum) הוא קבוצה סגורה, קשירה של נקודות

בנית עקום פיאנו



פרדוקסים העוסקים בפירוק והרכבה של גופים גיאומטריים

א בשנת 1924 הוכיחו באנך (Banach) וטרסקי (Tarski) שהשמש וגרגר אפונה הם שקולי-פריקות כלומר, אפשר לחתוך את האפונה למספר סופי של חלקים[12] כך שעל-ידי סידורם מחדש אפשר להרכיב מהם את השמש (בנפח אם לא בחומר) זהו פרדוקס באנך-טרסקי המפורסם (ר' [27]) למעשה באנך וטרסקי הראו שכל שתי קבוצות חסומות במרחב אוקלידי n ממדי R^n הן שקולות-פריקות אם הן מכילות נקודות פנימיות ואם $n>2$ (ר' [2] עמ' 351)[13] כמובן, החלקים שאליהם חותכים את גרגר האפונה בפירוק באנך-טרסקי אינם בני-מידה, כלומר, אין להם נפח אין אלה מסוג החיתוכים שאותם אפשר לבצע באמצעות סכין או מכשירי חיתוך אחרים הם מתקבלים על-ידי שימוש באקסיומת הבחירה[14]

מטה-פרדוקס: כיצד יכולות הנחות פשוטות (למשל, אקסיומת הבחירה) להיות בעלות תוצאות אדירות כל כך (כמו פרדוקס באנך-טרסקי)?

ככלות הכול, אקסיומת הבחירה איננה הנחה פשוטה כל כך, כמובן (ר' [19]), אולם היא הייתה יכולה להיות שימושית מאוד עבור תושבי העיר דלוס ביוון העתיקה ([27], עמ' v)

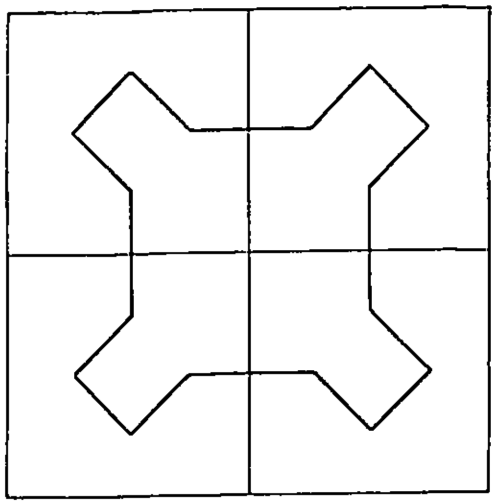
---

[12] בשנות ה-40 של המאה ה-20 הוכח שמספיקות חמש חתיכות, למעשה, שום מספר קטן מחמש לא יספק

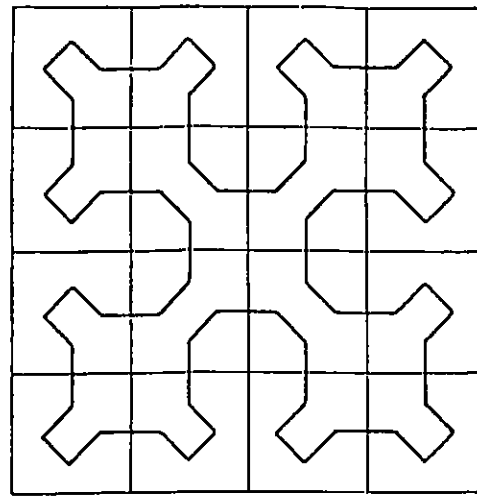
[13] אם מתירים פירוקים (אינסופיים) בני-מנייה, אזי תוצאה זו תופסת גם עבור $n=2$ (ר' [2], עמ' 351)

[14] צרמלו כותב (בשנת 1904) כי אקסיומת הבחירה מאפשרת לבחור מכל קבוצה תת-קבוצה מבלי לציין איך ייבחרו האיברים של התת-קבוצה כהן הוכיח ב-1963 שהיא בלתי תלויה ביתר האקסיומות של התת-קבוצות

עוד עקום הממלא ריבוע

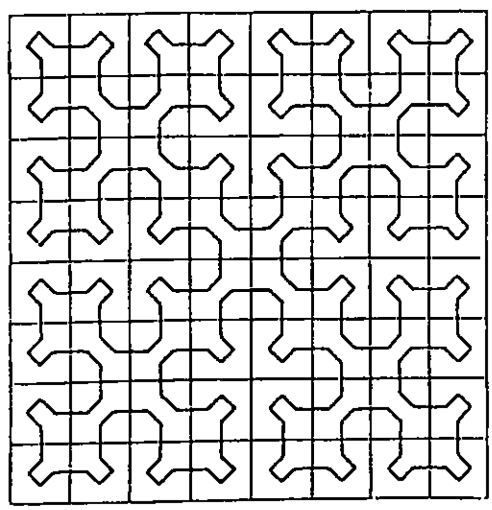


1

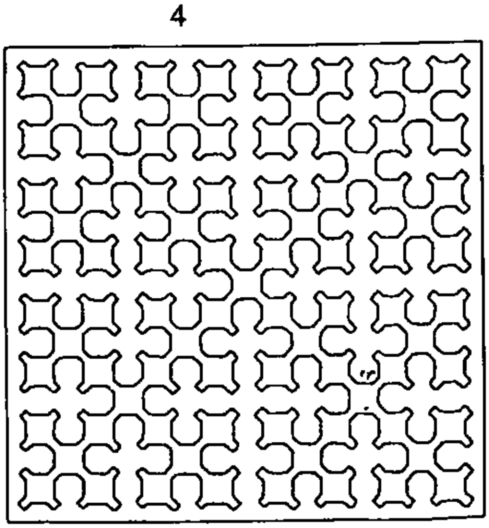


2

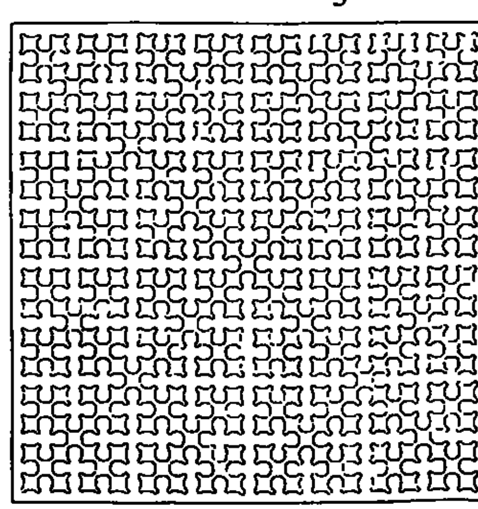
3



4



5



הדלים "כיצד נוכל להפטר מהמגפה?"
האוראקל מדלפי "בנו מזבח קובייתי אשר גודלו פי שניים מהמזבח הקיים "
באנך וטרסקי "האם מותר לנו להשתמש לשם כך באקסיומת הבחירה?"

ב "סוף כל סוף, ריבענו את העיגול " אין זו מתיחה זהו שמו של מאמר אשר הופיע לאחרונה בעיתון הנודע *Notices of the American Mathematical Society* [10] בשנת 1988 הראה המתמטיקאי ההונגרי לסקוביץ' (Laczkovich) שאפשר לפרק את העיגול למספר סופי של חלקים שאפשר לחברם מחדש ולקבל ריבוע בעל שטח זהה אולם החלקים אינם בני-מידה (לאף אחד מהם אין שטח) וקיומו של הפירוק מובטח על-ידי שימוש באקסיומת הבחירה (ר' [10])

לסיכום

הצגנו מגוון פרדוקסים מתמטיים מתקופות היסטוריות שונות הם צצו (בין היתר) מתוך ויכוחים ומחלוקות בין מתמטיקאים, מדוגמאות נגדיות למושגים שנחשבו לבלתי-ניתנים לשינוי, מאי-יכולת לראות את הצורך בצמצום או הרחבה של מושג או של תוצאה, ומתוך יישומו של "עקרון ההמשכיות" אשר מצביע על אפשרות העברה של פרוצדורות ממקרה נתון למקרים שנתפסו כדומים ראינו שתופעות פרדוקסליות כאלו היו בעלות השפעה מהותית ביותר על התפתחות המתמטיקה דרך העדנה ועיצוב-מחדש של מושגים, הרחבת תורות קיימות ועלייתן של תורות חדשות יתר על כן, תהליך זה הוא תהליך מתמשך אשר מתרחש גם בימינו

לפרדוקסים יש לדעתנו מקום בהוראה ובלימוד המתמטיקה הם יכולים לעורר סקרנות, להגביר את המוטיווציה, ליצור סביבה פורה לדיון, לעודד בחינה של ההנחות הבסיסיות, ולהראות שלוגיקה שגויה וטיעונים מוטעים אינם תכונה נדירה של העשייה המתמטית

רשימת ספרות

[1] E T Bell, *The development of mathematics* 2-nd ed , McGraw-Hill, 1945

[2] L M Blumenthal, "A paradox, a paradox, a most ingenious paradox," *Amer Math Monthly* 47 (1940) 346-353

[3] H J M Bos, "On the representation of curves in Descartes' *Géométrie*", *Arch Hist Ex Sc* 24 (1981) 295-338

[4] U Bottazzini, *The higher calculus a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, Springer - Verlag, 1986

[5] F Cajori, "History of exponential and logarithmic concepts" , *Amer Math Monthly* 20 (1913), several issues

[6] P J Davis, "Number," *Sc Amer* 211 (Sept 1964) 51-59

[7] _______*The mathematics of matrices*, Blaisdell, 1965

[8] C H Edwards, *The historical development of the calculus* Springer-Verlag, 1979

[9] M Gardner, "Mathematical games, in which 'monster' curves force redefinition of the word 'curve'," *Sc Amer* 235 (Dec 1976), 124-133

[10] R J Gardner and S Wagon, 'At long last the circle has been squared ," *Notic Amer Math Soc* 36 (1989) 1338-1343

[11] H Hahn, "The crisis in intuition" In *The World of Mathematics*, ed by J R Newman, Simon & Schuster, 1956, Vol 3 pp 1956-1976

[12] E Kasner and J R Newman, *Mathematics and the imagination*, Simon & Schuster, 1967

[13] M Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972

[14] Leapfrogs, *Imaginary logarithms*, E G M Mann & Son (England), 1978

[15] _______ , *Complex numbers*, E G M Mann & Son (England), 1980

[16] J Lutzen, "Euler's vision of a generalized partial differential calculus for a generalized kind of function," *Math Mag* 56 (1983) 299-306

[17] P Marchi, "The controversy between Leibniz and Bernoulli on the nature of the logarithms of negative numbers" In *Akten das II Inter Leibniz-Kongress* (Hanover, 1972), Bnd II, 1974 67-75

[18] K Menger, "What is dimension?", *Amer Math Monthly* 50 (1943) 2-7

[19] G H Moore *Zermelo's axiom of choice its origins development, and influence*, Springer-Verlag, 1982

[20] E Nagel, "Impossible numbers' a chapter in the history of modern logic," *Stud in the Hist of Ideas* 3 (1935) 429-474

[21] R Remmert, *Theory of complex functions*, Springer-Verlag, 1991

[22] L A Steen, "New models of the real-number line", *Sc Amer* 225 (Aug 1971) 92-99

[23] B L Van der Waerden, *Science awakening I*, Scholar's Bookshelf, 1988 (orig 1954)

[24] N Ya Vilenkin, *Stories about sets*, Academic Press, 1968

[25] K Volkert, "Die Geschichte der pathologischen Funktionen – Ein Beitrag zur Enstehung der mathematischen Methodologie", *Arch Hist Ex Sc* 37 (1987) 193-232

[26] __________ ,"Zur der Differentzierbarkeit stetiger Funktionen – Ampére's Beweis und seine Folgen", *Arch Hist Ex Sc* 40 (1989) 37-112

[27] S Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge University Press, 1985

[28] GT Whyburn, 'What is a curve?" *Amer Math Monthly* 49 (1942) 493-497