על הגדרות (שקולות ולא שקולות) ומושג המשיך

גרייסי ויניצקי ורוזה לייקין
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, הטכניון, חיפה

When I use a word, Humpty Dumpty said "it means just what I choose it to mean – not more nor less"
Lewis Carroll, Through the Looking-Glass

1. על הגדרות

השאלה "מהי הדרך המתאימה ביותר להפגיש תלמידים עם מושג מתמטי חדש" היא אחת השאלות החשובות ביותר בהוראת המתמטיקה בבית הספר אחת השאלות המקדימות היא **כיצד להגדיר את המושג?** בעת מתן תשובה לשאלה זו יש להקפיד על עקרונות לוגיים מקובלים מחברים אחדים (Khinchin 1968, Solow 1984, Vinner 1991) מתייחסים לשאלה זאת הם מצביעים על עקרונות לוגיים, כגון

1 בהגדרה מציגים את שם המושג החדש ולא משתמשים בו פעם נוספת במסגרת זו
2 לצורך הגדרה של המושג החדש משתמשים רק במושגים שהוגדרו קודם
3 בהגדרה מצביעים על תנאים מספיקים וגם הכרחיים של כל אובייקט המדגים את המושג החדש, שמאפשרים להבדיל בין מושג זה לבין מושגים אחרים על אוסף התנאים להיות מינימלי

לכל מושג מתמטי קיים אוסף של היגדים, שמבטאים תנאים הכרחיים ותנאים מספיקים של המושג אחד מההיגדים המהווה תנאי הכרחי וגם מספיק משמש הגדרה למושג

לאחר בדיקת הקשרים הלוגיים בין היגד זה לבין היגדים אחרים הקשורים למושג, בונים מחלקת שקילות של ההיגדים האלה

א כל היגד השייך למחלקה זו יכול להתקבל כהגדרה, ושאר ההיגדים מהווים משפטים, שהם תנאים מספיקים והכרחיים של המושג
ב בין ההיגדים שלא נכללים במחלקת שקילות של ההגדרה יש כאלה שנגררים מההגדרה ומציגים **תכונות** של המושג, ויש כאלה שגוררים את ההגדרה ומציגים **סימנים** לזיהויו של המושג

אפשר לבחור בתור הגדרה כל אחד מההיגדים ממחלקת השקילות שנבנתה מבחינה מתמטית אין הבדל ביניהם
כעת הגענו לשאלות, שהן לאו דווקא שאלות מתמטיות אלא

שאלות דידקטיות

1 בין כל ההיגדים השקולים היכולים לשמש כהגדרה, איך לבחור את המתאים ביותר לצרכי הוראה?
2 מהם הגורמים המשפיעים על בחירה זו?
3 איך בחירה זו משפיעה על רצף ההוראה בכיתה ואיך היא מושפעת ממנו?

קיום העקרונות הלוגיים, שהוזכרו לעיל, על-ידי ההיגד שנבחר כהגדרה, הוא תנאי, הכרחי אך לא מספיק, לכך שייעשה שימוש בהיגד זה בלימוד מתמטיקה הגדרה אופטימלית היא הגדרה נכונה מבחינה מתמטית, ומתאימה מבחינה דידקטית

התאמה מבחינה דידקטית מבוססת, בין היתר, על ההנחות הבאות

א לפי הגישה הקונסטרוקטיביסטית ללמידה, הלומד בונה את הידע על בסיס מושגים ידועים (מוכרים ללומד, וכאלה שהלומד מסוגל להפעילם) ועל-ידי בניית קשרים בין המושגים (Clement 1991) לכן, בהגדרה מתאימה מבחינה דידקטית של מושג חדש יש לכלול אך ורק מושגים ידועים ללומד
ב ההיגד צריך להישען, ככל האפשר, על אינטואיציות של הלומד (Fischbein 1987)
ג מצב התפתחות הלומד מוגדר על-ידי הידע הנוכחי של הלומד, וכן על-ידי הידע שהלומד מסוגל לבנות (ידע הנמצא בתחום ההתפתחות הקרובה – "zone of proximal development") תחום ההתפתחות הקרובה קובע את הדינמיקה של התפתחות הלומד באופן בולט ביותר התאמת המושגים הנלמדים על-ידי הלומד לתחום ההתפתחות הקרובה שלו מאפשרת את הלמידה (Vygotsky 1982)

כפי שצוין קודם, לאחר שנבחרה הגדרה למושג, קיימים היגדים הנגררים מההגדרה הזו, המהווים את תכונות המושג לכל הגדרה קיימת קבוצת האובייקטים העונים על תנאי ההגדרה, המדגימים את המושג במקרה זה נאמר שקבוצה זו **מדגימה** את ההגדרה כמו כן, קיימות הגדרות המגדירות קבוצות של

אובייקטים ותת-קבוצות שלהם הגדרות אלו לא בהכרח קשורות על-ידי יחס גרירה נבטא את הנ"ל באופן הבא

תהיינה שתי הגדרות לשני מושגים הגדרה 1 של מושג a והגדרה 2 של מושג b

A היא קבוצת **כל** האובייקטים, המדגימים את המושג a

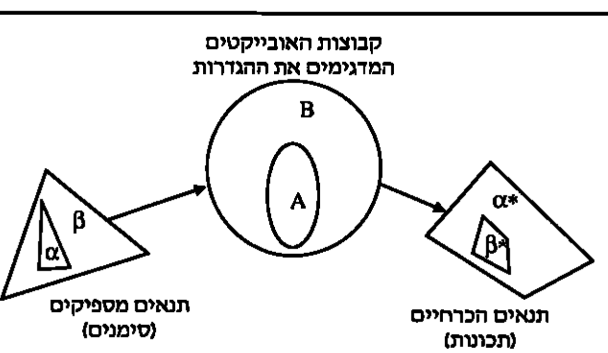
B היא קבוצת **כל** האובייקטים, המדגימים את המושג b

- α היא קבוצת כל הסימנים (תנאים מספיקים) של המושג a
  β היא קבוצת כל הסימנים של המושג b
- אם $A\subset B$, אז $\alpha\subset\beta$
- α^* היא קבוצת כל התכונות (תנאים הכרחיים) של מושג a
  β^* היא קבוצת כל התכונות של המושג b
- אם $A\subset B$, אז $\alpha^*\supset\beta^*$

היחס $A\subset B$ מבטיח קיום תנאים, שהוספתם להגדרה 2 מביאה להיגד שקול להגדרה 1

אם $A\subset B$, אז נאמר שהגדרה 2 יותר כללית מהגדרה 1

הערה יש לציין שיחס ההכלה שבין קבוצות האובייקטים המדגימים את שני המושגים הוא הפוך ליחס בין קבוצות התכונות של אותם המושגים נקודה זו יכולה לגרום לקשיים בתפיסת הקשרים בין המושגים



סכמה 1

קיימות שתי גישות ללימוד מושגים

- ממושג המודגם על-ידי קבוצת האובייקטים B, למושג המודגם על-ידי קבוצה A, וזאת על-ידי הורדת תנאים מספיקים, והוספת תנאים הכרחיים למושג
  למשל, בהוראת נושא המרובעים המיוחדים מתחילים בלימוד המקבילית
- ממושג המודגם על-ידי קבוצת האובייקטים A, למושג המודגם על-ידי קבוצה B, וזאת על-ידי הוספת תנאים מספיקים, והורדת תנאים הכרחיים למושג
  למשל, בהוראת נושא המרובעים מתחילים בלימוד הריבוע

2. על הגדרת המושג משיק

התלמידים נפגשים עם המושג משיק במהלך ארבע השנים האחרונות ללימודי המתמטיקה בבית הספר העל-יסודי המושג משיק מופיע בהקשרים שונים בתוכנית הלימודים בגיאומטריה אוקלידית מגדירים משיק למעגל ופותרים בעיות הקשורות לתכונות ולסימנים שלו, באלגברה משתמשים במשיק לפרבולה, כאשר חוקרים פונקציה ריבועית, בגיאומטריה אנליטית פותרים בעיות הקשורות למשיקים לחתכי חרוט, באנליסה, בחקירת פונקציה, מתייחסים למשיק לגרף הפונקציה

בשלבים שונים של לימוד המושג נתונות הגדרות של משיק לקווים עקומים שונים במובן זה, בהגדרת המשיק תמיד קיימת התייחסות לזוג מושגים משיק ועקום

הגדרה כללית של ישר משיק לעקום[1]:

משיק לעקום בנקודה $P(x.y)$ שעליו, הוא ישר המתקבל באופן הבא

תהיה נקודה $P_1(x_1,y_1)$ על עקום זה הישר PP_1 חותך את העקום ושיפועו $\frac{y-y_1}{x-x_1}$

א אם למנה $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ יש גבול, כאשר $x\to x_1$, והוא שווה למספר ממשי k, כי אז הישר העובר דרך P ששיפועו נקרא משיק לעקום בנקודה זו

ב אם למנה $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ יש גבול, כאשר $x\to x_1$, והוא שווה לאינסוף, אז המשיק הוא הישר האנכי שעובר דרך P

ג אם למנה $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ אין גבול, כאשר $x\to x_1$, אז אין משיק לעקום בנקודה זו

הגדרה זאת מודגמת על-ידי קבוצה B בסכמה 1 בסכמה זו הגדרת משיק למעגל מודגמת על-ידי קבוצה A

כפי שצוין קודם, קיימות שתי גישות ללימוד מושגים ממושג המודגם על-ידי קבוצת האובייקטים B למושג המודגם על-ידי קבוצה A, או להיפך בפרט, קיימות שתי גישות ללימוד המושג **ישר משיק לעקום.** לפי גישה אחת לימוד המושג מתרחש בסדר הבא (i) לימוד המשיק לעקום כללי, (ii) לימוד המשיק לגרף של פונקציה, (iii) לימוד המשיק לגרף של פונקציה מסוימת

כפי שהודגש לעיל, האובייקטים המדגימים את המושג **ישר משיק לעקום** מורכבים משתי צורות גיאומטריות אחת קבועה – קו ישר, האחרת בת שינוי – עקום צמצום של קבוצה B,

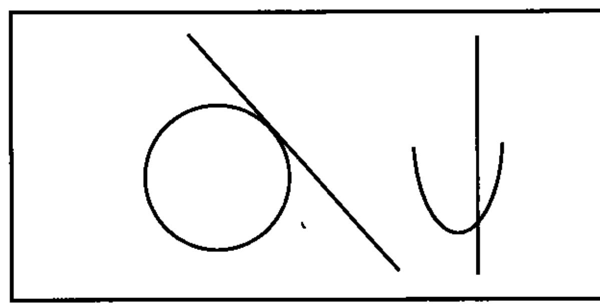
[1] על סמך Courant and Robinson (1941)

במקרה זה, מתבטא בצמצום קבוצת הקווים העקומים, ומביא להרחבת קבוצת התכונות של משיק לעקום

לפי גישה אחרת מתחילים מלימוד המשיק לעקום מסוים (המעגל), ומתקדמים לקראת הגדרה כללית של משיק לעקום (מ A- ל-B)

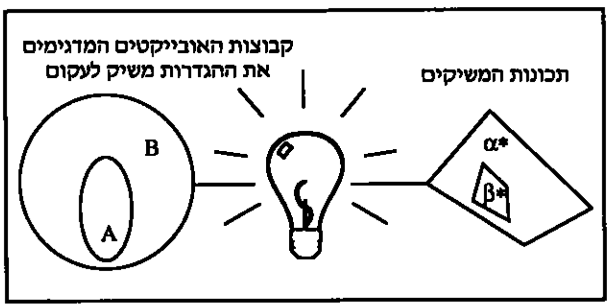
במקרה של לימוד מרובעים מיוחדים משתמשים בבתי ספר בשתי הגישות, ואילו במקרה של משיק נהוגה בבתי ספר גישה אחת

מ-A ל-B לפי תוכנית הלימודים, בשלב שהילד מוכן ללמוד משיק למעגל, אין לו מוכנות ללימוד מושג המשיק לעקום כללי זה משפיע על כך שהגדרת משיק למעגל נתפסת כבסיסית **"משיק לעקום (מעגל) הוא ישר, שיש לו נקודה אחת בלבד משותפת עם העקום (מעגל)"** (נסמן הגדרה זו ב-M) במעבר ממעגל לעקום אחר, למשל לפרבולה, ממשיכים להשתמש באותה הגדרה, עם "שינוי קטן" **מחליפים** את המלה **"מעגל"** במלה **"פרבולה"**. לכן תלמידים רבים "לא מתקשים" להגדיר משיק לפרבולה בצורה הבאה **"משיק לעקום (פרבולה) הוא ישר, שיש לו נקודה אחת בלבד משותפת עם העקום (פרבולה)"** (נסמן הגדרה זו ב-PM)



ציור 1 נקודה יחידה משותפת של משיק עם העקום

אחת ההגדרות של משיק לפרבולה, שאפשר להשתמש בה בכיתה ט, היא ההגדרה הבאה (נסמן אותה ב-P) משיק לעקום (פרבולה) הוא ישר שמשאיר את העקום (פרבולה) כולו באותו חצי מישור המוגדר על-ידי הישר, ושיש לו נקודה אחת בלבד משותפת עמו" אפשר לראות שהיגד זה מורכב מתנאים מספיקים והכרחיים למקרה של משיק למעגל, אך אוסף תנאים אלה אינו מינימלי לכן, היגד זה לא נבחר בתור הגדרה למשיק למעגל אם נחזור לסכמה 1, קבוצת האובייקטים המדגימים את ההגדרה P היא הקבוצה B בסכמה, וקבוצת האובייקטים המדגימים את ההגדרה M היא קבוצה A המוכלת ב-B הגדרה M מתקבלת מהגדרה P על-ידי הורדת אחד מהתנאים ("נמצא באותו חצי מישור"), לכן ההגדרה P יותר כללית מ-M הגדרה M שמגדירה משיקים למעגלים, יותר ספציפית וגוררת להוספת תכונות שמתקיימות ב-A אך לא ב-(B-A) למשל, ב-A מתקיימת התכונה הבאה "קיימת נקודה שנמצאת במרחקים שווים מכל המשיקים" תכונה זו אינה מתקיימת ב-(B-A) דוגמה זו מבטאת את הקושי שצוין בהערה בסעיף 1 יחס ההכלה בין קבוצות האובייקטים, המדגימים את שני המושגים, הוא הפוך ליחס בין קבוצות התכונות של אותם המושגים



סכמה 2

3. יחס בין שינוי העקום לבין שינוי תכונות המשיק

בטבלה שלהלן מוצגות תכונות של משיקים לקווים עקומים שונים כפי שמוצג בטבלה, תכונה אחת בלבד משותפת לכל הקווים העקומים חלק מהתנאים משותפים לקווים עקומים מסוימים

החידה

א נתון משובע חסום במעגל זוויותיו
145, 115, 110, 115, 130, 140, 145
רדיוס המעגל 10 ס"מ
מצא את צלעות המשובע

ב הצע דרך לפתרון כללי עבור n כללי

אריה רוקח
קדומים

משיקים לקווים עקומים שונים ותכונותיהם

עקום	חתכי חרוט				גרף של פונקציה					עקום
תכונות של עקום ושל ישר משיק	מעגל	פרבולה	אליפסה	הפרבולה	פולינומיאלית	שורש	רציונלית	טריגונו-מטרית	לוגריתמית/ מעריכית	כללי
1 קיימת נקודה יחידה משותפת בין הישר המשיק לבין העקום	+	+	+	+					+	
2 קיימת נקודה משותפת לכל הנורמלים לעקום	+									
3 קיימת נקודה מרוחקת באופן שווה מכל הישרים המשיקים	+									
4 כל העקום מצד אחד של ישר משיק	+	+	+						+	
5 שיפוע הישר המשיק שווה לערך הנגזרת בנקודת ההשקה					+		+	+	+	
6 הישר המשיק הוא קירוב לניארי					+		+	+	+	
7 הישר המשיק הוא הגבול של מיתרים	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

במקרים רבים, בשיחות עם מורים ותלמידים, אחת מהתכונות 1, 4, 5, 6 מופיעה כהגדרת המשיק תכונות אלה נכונות בחלק ניכר של הקווים העקומים במשימות רבות, העוסקים במשיק, תכונות אלה מתקיימות כל זה משפיע על כך ש

א תכונות אלה נתפסות כתכונות כלליות של כל הקווים העקומים ולא רק במקרים הנכונים

ב תכונות שהן תנאים הכרחיים של המושג נתפסות כתנאים מספיקים (סימנים).

ג סדר הופעתם של קווים עקומים בתוכנית הלימודים משפיע על כך, שתכונות "עוברות" מעקום לעקום, והתלמיד אינו מודע לצמצום קבוצת התכונות, הנובע מהרחבת קבוצת האובייקטים, המדגימים את ההגדרה (ראה סכמה 2)

* תכונה 1 אינה מתקיימת בכל הקווים העקומים, אך ברוב המקרים (אם כי לא בכולם) היא נכונה בסביבה קטנה של נקודת ההשקה

* רבות מן הפונקציות הנחקרות במסגרת לימודי אנליסה, הן קמורות או קעורות בכל תחום החקירה, וכך תכונה 4 נתפסת כתכונה כללית לכל המקרים

* סוגיה מיוחדת בתוכנית הלימודים באנליסה היא הקשר בין שלושת המושגים הבאים קירוב ליניארי, ישר משיק ונגזרת (תכונות 5 ו-6) קיום נגזרת בנקודה שקול לקיומו של קירוב ליניארי בנקודה זו לעומת זאת, ייתכן קיום משיק בנקודה ללא קיומם של נגזרת וקירוב ליניארי גם כאן, רק במקרים מעטים, מופיעים משימות גרפים של פונקציות בעלי נקודה בה המשיק מקביל לציר ה-Y.

* תכונה 7 – "המשיק הוא הגבול של מיתרים" – היא היחידה המתקיימת עבור כל הקווים העקומים ובמקרה של קיום הגבול היא מהווה אף תנאי מספיק נהוג להשתמש בהיגד זה בתור הגדרה כללית של המושג, כפי שהיא מופיעה בסעיף 2

סעיף זה הוקדש להתפתחות הספירלית של המושג המשיק בתוכנית הלימודים בבית הספר חשוב לדון עם התלמידים ע

הקשרים בין משיקים לקווים עקומים שונים, ולהדגיש את תכונות המשיקים הכלליות, ותכונות המשיקים הספציפיות למשפחות של קווים עקומים כמו בכל אחד מהנושאים האחרים בתוכנית הלימודים, חשוב לחזק את הידע על-ידי דוגמאות רבות ומגוונות, המדגישות מקרים מיוחדים וכלליים, הקשורים לתנאים מספיקים והכרחיים למושג משיק

בכל אחד משלבי הלימוד של המושג משיק, לאור האמור בסעיף 1, על המורה לבחור הגדרה מתאימה מבחינה דידקטית ייתכן שהגדרות שונות שקולות יכולות להיות כולן מתאימות, בשלב מסוים במקרה זה חשוב לעבוד עם התלמידים על הנושא של הגדרות שקולות כדי לפתח את חשיבתם המתמטית ולאפשר להם לבנות מבנים לוגיים המחזקים את הידע המתמטי

4. משיק למעגל והגדרות שקולות

את הכרת המושג משיק מתחילים התלמידים ממשיק למעגל (בכיתה ט) בשלב זה אפשר להגדיר את המושג באופנים הבאים

הגדרה 1. משיק למעגל הוא ישר, שיש לו נקודה אחת בלבד משותפת עם המעגל

הגדרה 2. משיק למעגל הוא ישר, העובר במרחק של רדיוס ממרכז המעגל

הגדרה 3. משיק למעגל הוא ישר, המאונך לרדיוס המעגל בקצהו

שלוש ההגדרות לעיל הן הגדרות שקולות כל אחד מההגדים מהווה תנאי מספיק והכרחי לכך שישר נתון הוא משיק למעגל ואולם, רק ההיגד הראשון (הגדרה 1) משמש את מחברי ספרי הלימוד בארץ להגדרת המשיק שני ההיגדים האחרים מופיעים במשפטים או בבעיות הוכחה, שבהם מוכיחים את שקילות שלושת ההיגדים הנ״ל התייחסות אך ורק להיגד הראשון כאל הגדרה, יכול להשפיע על כך שתכונה זו ״עוברת בתורשה״ לקווים עקומים אחרים

כפי שצוין בטבלה 1, תכונות 2 ו-3 מהטבלה (2 קיימת נקודה משותפת לכל הנורמלים לעקום, 3 קיימת נקודה מרוחקת באופן שווה מכל הישרים המשיקים) מתקיימות במעגל הגדרות 2 ו-3 גוררות את התכונות האלה באופן מיידי, ואילו קשר גרירה מהגדרה 1 לתכונות האלה דורש הוכחה יותר ארוכה תכונות אלה לא מתקיימות בפרבולה אילו היו מודגשות השקילות של ההגדרות ופירושה של השקילות, אז הנטייה להעביר את כל תכונות המשיק למעגל, באופן אוטומטי, אל המשיק לפרבולה היתה קטנה

שבירת קשר בין אחד ההיגדים השקולים לבין תכונה מסוימת, גוררת שבירת קשר זה בין כל ההיגדים השקולים לתכונה זו

5. מסקנות

חשוב לעורר מודעות לכך ש

1 כל הגדרה מספקת הן תנאי מספיק והן תנאי הכרחי למושג מודעות לכך מאפשרת להשתמש בהגדרה לשם הוכחות מתמטיות בשני כיוונים
  א כדי להוכיח את תכונות המושג, אם תנאי ההגדרה גוררים תכונות נוספות,
  ב כדי להוכיח את סימני המושג, אם תנאי הגדרה נגררים מהיגדים אחרים – סימנים

2 כל אחד מהיגדים ממחלקת השקילות של אחת ההגדרות של מושג יכול להיבחר כהגדרה לבחירה זאת יש סיבות מתמטיות ודידקטיות מבנה של חומר הלימוד, סדר בלימוד החומר, מידת הקושי וכו׳

3 יחס ההכלה בין קבוצות אובייקטים הוא הפוך ליחס ההכלה בין קבוצות התכונות שלהם מודעות לנקודה זו יכולה למנוע ״העברה תורשתית״ של תכונות ממושג למושג כללי יותר

רשימת ספרות

Clement, J [1991] Constructivism in the Classroom – A Review of L P Steffe and T Wood (Eds), Transforforming Children's Mathematics Education International Perspectives, *Journal for Research in Mathematics Education 22* (5) (1990) 422-428

Courant, R and H Robbins, [1941] *What is Mathematics?* London, Oxford University Press

Fischbein, E [1987] *Intuition in Scince and Mathematics, An Educational Approach* Dordrecht, Kluwer

Khinchin, A Ya [1968] *The Teaching of Mathematics* London The English Universities Press

Solow, D [1984] *Reading, Writing and Doing Mathematical Proofs* Book One Dale Seymour Publications

Vinner S [1991] The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics In D O Tall (Ed) *Advanced Mathematical Thinking* Dordrecht, Kluwer

Vygotsky, L S [1982] Mishlenie I Rech In L S Vygotsky, *Sobranie sochinenii, vol 2* Moscow, Pedagogika (in Russian)