

## יצא לאור: חוברת "טורי טיילור"

מאת: אורי רימון

"טורי טיילור" הוא אחד משלושת הפרקים שירכיבו את הכרך החמישי של הספר "אנליסה, 4-5 יחידות לימוד" (כרך זה מיועד לתלמידים הלומדים ברמה של 5 י"ל). כיוון ששני הפרקים האחרים שבכרך ("פונקציות בשני משתנים" ו"משוואות דיפרנציאליות") נמצאים עדיין בשלבים שונים של הכנה, הוחלט להוציא את "טורי טיילור" במהדורה זמנית מוגבלת, ללא כריכה. את החוברת ניתן לרכוש עתה במרכז להוראת המדעים.

להלן תיאור קצר של הפרק. לנוחות המורים הרוכשים את הפרק בצורתו הנוכחית, אנו מפרסמים גם את פיתרונות התרגילים המופיעים בו. אנו מציעים להוציא את דפי הפיתרונות מן העלון ולצרפם לחוברת עצמה.

### תיאור הפרק

טורי טיילור הוא נושא חדש, שלא נכלל עד כה בתוכנית המתמטיקה לבתי-הספר התיכוניים. לפי התוכנית החדשה נלמד הפרק בכיתה י"ב, והוא מיועד לתלמידי 5 י"ל בלבד. משך ההוראה: 14 שעות.

פרק זה בא "לסגור מעגל" בחומר הלימוד. עד כה, כדי למצוא אומדן גס של ערכי פונקציות כגון  $a^x$ ,  $\ln x$  ו  $\sin x$ , נעזר התלמיד בקירוב הלינארי. כדי להגדיל את דיוק החישוב, הוא נאלץ להשתמש במחשבון. בפרק זה מוסבר שיטת החישוב המדוייק. ההיבט היישומי עשוי להגביר את התעניינותו של התלמיד בנושא.

הפרק מתחיל במשפט רול ובהכללתו למשפט הערך הממוצע. חשיבותם של משפטים אלה עומדת בפני עצמה. ביסודם של שני המשפטים מונח מושג הרציפות, לכן הפרק "טורי טיילור" נלמד לפי התוכנית אחרי הפרק "גבולות ורציפות". פרק הרציפות טרם יצא לאור, אולם יש להניח שהמורה לא יתקשה להשלים את החסר בכוחות עצמו, על-ידי הסבר בלתי פורמלי קצר.

אחד המושגים החשובים בפרק זה הוא פולינום טיילור ממעלה  $n$  של פונקציה  $f$ , המפותח סביב נקודה  $a$  (להבדיל מסורי טיילור האין-סופי). כאשר  $n = 1$ , פולינום זה אינו אלא הקירוב הלינארי של  $f$  בנקודה  $a$ . לכן פולינום טיילור הוא הרחבה של מושג הקירוב הלינארי. מתוך חישובים מעשיים לומד התלמיד, כי

דיוק הקירוב עולה, בדרך כלל, כאשר מגדילים את מעלתו של הפולינום. את שגיאת החישוב ניתן להעריך בהסתמך על משפט טיילור. לדעתנו, הוכחת המשפט היא הנושא היחיד בפרק העלול ליצור קושי. אנו ממליצים להסביר את ההוכחה בכיתה, אך עם זאת לוותר עליה במבחן. את ההוכחה רצוי להביא רק לאחר שהתלמיד הכיר היטב את יישומי המשפט.

היישומים העיקריים למשפט טיילור הם:

א. הערכה של מיזת דיוק החישוב המבוצע באמצעות פולינום טיילור ממעלה נתונה;

ב. מציאת המעלה של פולינום טיילור הנותן דיוק רצוי.

בתרגילים נידונים יישומים נוספים, למשל הבינום של ניוטון, שאינו אלא פולינום טיילור של פונקצית החזקה.

הפרק מסתיים בסעיף המוקדש לטורי טיילור. אנו מצניעים כאן את ההיבטים הטכניים (חישובי השארית), והדיון הוא בלתי פורמלי במהותו.

## פיתרונות תרגילים - טורי טיילור

### לסעיף 26.2

1. ב.  $x_0 = \sqrt{1/3}$

ג.  $x = \sqrt{1/3}$ ,  $[0,1]$

8. א.  $x_0 = 2.5$  ב.  $x = 1/4$

### לסעיף 26.4

1. א.  $y^{(2)} = 80x^3 - 6$

$y^{(3)} = 240x^2$

ב.  $y^{(2)} = \frac{2}{x^3}$

$y^{(3)} = -\frac{6}{x^4}$

ג.  $y^{(2)} = -\frac{1}{4(1-x)^{3/2}}$

$y^{(3)} = -\frac{3}{8(1-x)^{5/2}}$

ד.  $y^{(2)} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$

$y^{(3)} = \frac{2 \cos^2 x + 6 \sin^2 x}{\cos^4 x}$

ה.  $y^{(2)} = -\frac{1}{x^2}$

$y^{(3)} = \frac{2}{x^3}$

ו.  $y^{(2)} = e^x$

$y^{(3)} = e^x$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)(-1)^{n-1}}{x^n} \quad .4$$

.6

$$n = 4k \text{ כאשר } , \cos^{(n)}(x) = \cos x \quad .3$$

$$n = 4k + 1 \text{ כאשר } , \cos^{(n)}(x) = -\sin x$$

$$n = 4k + 2 \text{ כאשר } , \cos^{(n)}(x) = -\cos x$$

$$n = 4k + 3 \text{ כאשר } , \cos^{(n)}(x) = \sin x$$

### לסעיף 26.6

1. הפולינומים מסדר n הם:

$$P(x) = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2} + \frac{e(x-1)^3}{3!} + \frac{e(x-1)^4}{4!} \quad .א$$

$$P(x) = 1/2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/3) - \frac{(x - \pi/3)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sqrt{3}(x - \pi/3)^3}{2 \cdot 3!} + \frac{(x - \pi/3)^4}{2 \cdot 4!} \quad .ב$$

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^3}{4!} \quad .ג$$

$$P(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 \quad .ד$$

$$(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) \quad .ה$$

$$- \frac{1}{8\sqrt{2} \cdot 2!} (x-2)^2 + \frac{3}{32\sqrt{2} \cdot 3!} (x-2)^3 - \frac{15}{128\sqrt{2} \cdot 4!} (x-2)^4$$

$$P(x) = 1 + x \ln 2 + \frac{(x \ln 2)^2}{2!} + \frac{(x \ln 2)^3}{3!} + \frac{(x \ln 2)^4}{4!} \quad .ו$$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3} (x - \pi/6) + \frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{(x - \pi/4)^2}{2!} + \dots$$

$$\frac{16}{3} \frac{(x - \pi/6)^3}{3!} + \frac{32}{\sqrt{3}} \frac{(x - \pi/6)^4}{4!}$$

$$P(x) = 1n2 + \frac{1}{2} (x - 2) - \frac{1}{4 \cdot 2!} (x - 2)^2 + \dots$$

$$\frac{1}{4 \cdot 3!} (x - 2)^3 - \frac{3}{8 \cdot 4!} (x - 2)^4$$

$$P(x) = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} x^4$$

| $P_0(x)$ | $P_1(x)$ | $\sin x$ | $x$ |
|----------|----------|----------|-----|
| 0.19866  | 0.2      | 0.19866  | 0.2 |
| 0.2955   | 0.3      | 0.2955   | 0.3 |
| 0.3893   | 0.4      | 0.3894   | 0.4 |
| 0.564    | 0.6      | 0.5646   | 0.6 |
| 0.7146   | 0.8      | 0.7173   | 0.8 |
| 0.83333  | 1.1      | 0.8414   | 1   |

$$P(x) = e^a + e^a(x-a) + e^a \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{e^a (x-a)^n}{n!}$$

$$P(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots + (-1)^n (x-1)^n$$

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^{(n-1)/2} \cdot x^n}{n!}$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{(n-1)/2} \cdot x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{(n-1)/2} \cdot x^n}{n!}$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{(n-2)/2} \cdot x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$P(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad .n$$

$$P(x) = 1 - (x - 2) + (x - 2)^2 - (x - 2)^3 + \dots + (-1)^n (x - 2)^n \quad .1$$

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n} \quad \text{אם } n \text{ אי-זוגי} \quad .2$$

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \frac{x^{n-1}}{n-1} \quad \text{אם } n \text{ זוגי} \quad .3$$

$$P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 1 \quad .א .5$$

### 26.9 טעיה

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \quad (1) \quad .1$$

7 .א (11)

1.648 .ב

0.375 .ג

0.7165 .ד

1.97 .א (111) השגיאה קטנה מ

0.00043 .ב השגיאה קטנה מ

0.008 .ג השגיאה קטנה מ

0.000035 .ד השגיאה קטנה מ

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad (1) \quad .2$$

sin 0.2 0.1986 .א (11)

sin  $\pi/5$  0.5878 .ב

sin 15° 0.2588 .ג

sin (- $\pi$ ) 10 -0.3090 .ד

2.54 x 10<sup>-9</sup> .א (111) השגיאה קטנה מ

7.67 x 10<sup>-6</sup> .ב השגיאה קטנה מ

1.67 x 10<sup>-8</sup> .ג השגיאה קטנה מ

-5.99 x 10<sup>-8</sup> .ד השגיאה קטנה מ

$$P(x) = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \frac{(x - 1)^4}{4} + \dots + \frac{(x - 1)^5}{5} - \frac{(x - 1)^6}{6} \quad (1) \quad .3$$

0.18232 א. (11)

-0.35643 ב.

-5.6 ג.

0.3463 ד.

$1.8 \times 10^{-6}$  א. השגיאה קטנה מ (111)

$3.8 \times 10^{-4}$  ב. השגיאה קטנה מ

18.3 ג. השגיאה קטנה מ

$2.98 \times 10^{-4}$  ד. השגיאה קטנה מ

$\cos(0.4\pi) = 0.2104$  ,  $P(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$  א. 4

$\cos(0.4\pi) = 0.3076$  ,  $P(x) = 1/2 - \frac{\sqrt{3}(x - \pi/2)}{2} - \frac{(x - \pi/3)^2}{4}$  ב.

0.3145 ג. במקרה א' השגיאה קטנה מ

0.0015 ב. במקרה ב' השגיאה קטנה מ

עבור  $e^2$  פולינום ממעלה 14 5.

עבור  $\sqrt{e}$  פולינום ממעלה 7.

עבור  $\ln(1.5)$  פולינום ממעלה 9 6.

עבור  $\ln(0.8)$  פולינום ממעלה 5

$(a - b)^n = a^n - na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots$  12.

$+ (-1)^n nab^{n-1} + (-1)^{n+1}b^n$

26.11

$\frac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$  ב. 3.

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$

$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{48}x^3$  ב. 4.

$\sqrt[3]{0.6} = (1 - 0.4)^{1/3} = 0.8094$  ד.

$\sqrt{0.6} = 0.8434$  ובמחשבון

תיקוני טעויות לספר אלגברה, 4-5 י"ל, כרך ראשון

- עמ' 4 ת' 3: במקום כתיב טריצות צ"ל בכתיב מטריצות.
- עמ' 7 ש' 6: במקום  $(x_1, y_1)$  צ"ל  $(x_1, y_1)$ .
- ע' 10 ש' 1: במקום שבר צ"ל שכבר.
- עמ' 16 ת' 5-ד': צ"ל
- $$\begin{cases} 3y + 2z = 3 \\ -9y + 5z = -9 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$
- עמ' 17 ש' 15: במקום נוסף צ"ל נוסף.
- עמ' 17 ש' 2-: במקום המיכלים צ"ל המכילים.
- עמ' 18 ש' 1: במקום מארכי צ"ל סכום.
- עמ' 21 ש' 7: במקום  $z = t, s, r$ .
- עמ' 21 ש' 14: במקום להשגה צ"ל להצגה.
- עמ' 22 ש' 9: הוסף נקודה אחרי משוואות. הוסף הם בסוף השורה.
- עמ' 22 ש' 19: במקום פרימטר צ"ל פרמטר.
- עמ' 27 ש' 1-: השמט את הסוגר העגול האחרון.
- עמ' 34 ש' 4-: במקום הוא צ"ל היא.
- עמ' 36 ש' 8-: במקום  $\{A = \{ \text{צ"ל } A = \{$ .
- עמ' 36 ש' 4-: במקום נציג צ"ל נציב.
- עמ' 38 ש' 1-: במקום לו צ"ל לה.
- עמ' 40 ת' 5: במקום  $y = t$  צ"ל  $x = t$ .
- עמ' 44 ש' 3: במקום ממשים צ"ל ממשיים.
- עמ' 46 ש' 10-: הוסף נקודה אחרי הצירים.
- עמ' 64 ש' 15: במקום  $(4, 5)$  צ"ל  $(1, 5)$ .
- עמ' 73 ת' 17א': במקום המספר 1 שמופיע במטריצה כשורה השנייה ובעמודה השנייה צ"ל -1.
- עמ' 80 ש' 2: הוסף סימן הערת שוליים בסוף השורה; הערת השוליים מעמוד 81 שייכת הנה.
- עמ' 81 ש' 9: אגף ימין צ"ל  $5x^3(-1/x+3/x^2)$
- עמ' 82 ש' 5-: במכנה במקום  $6t - 7$  צ"ל  $6t + 7$ .
- עמ' 82: העבר את הערת השוליים לעמוד 83.
- עמ' 84 ש' 9-: הוסף סוגריים משולבים משני הצדדים.
- עמ' 86 ת' 5: צ"ל ציין מהו תחום ההצבה המותר בתבניות דלהלן ופשט אותן.
- עמ' 86 ת' 5-n': במכנה במקום  $b + bc + bd$  צ"ל  $b^2 + bc + bd$ .
- עמ' 88 ת' 16: במקום שונה מ 0 צ"ל שונה מ 0 ומ  $\sqrt{-5}$ .
- עמ' 88 ת' 15: למחוק את המילים אין-סוף.
- עמ' 89 ת' 19: במונה במקום  $x^2 - 1$  צ"ל  $x - 1$ .
- עמ' 90 ת' 24-ד': במקום  $y$  צ"ל 4.
- עמ' 91 ת' 28-ב': במקום  $x(m + 2)$  צ"ל  $x(m + 12)$ .
- עמ' 91 ת' 30-ב': באגף ימין במקום  $k^2 - k$  צ"ל  $x^2 - k$ .
- עמ' 92 ש' 3-: במקום  $2x$  צ"ל  $4x$ .
- עמ' 93 ש' 11: הוסף סימון של קבוצה  $\{(3, 5); (-5, -3)\}$ .
- עמ' 94 ש' 4: במקום  $y$  צ"ל  $y^2$ . במקום מהמשוואה צ"ל מן המעלה.
- עמ' 94 ש' 8: במקום 2577 צ"ל  $25 \pm 7$ .
- עמ' 96 ת' 7: במקום 250 צ"ל 370.
- עמ' 96 ת' 14: להוסיף שני הרוכבים יצאו בעת ובעונה אחת.
- עמ' 97 ת' 16: להוסיף: המרחק בין A ו B הוא 291 ק"מ.
- עמ' 97 ת' 17: במקום 4000 צ"ל 1800.
- עמ' 99 ת' 33: במקום 81 צ"ל 112.
- עמ' 99 ש' 1-: במקום כמות הזהב ב 5% צ"ל תכולת הזהב בנתך ב 5%.
- עמ' 100 ש' 2: במקום גדל צ"ל פחת.



- עמ' 133 שרטוט: הקו המרוסק הוא אנך  
אמצעי לקטע AB.
- עמ' 134 שרטוט: ציר ה  $y$  צריך להיות אנך  
אמצעי לקטע AB. במקום  $(y, x)$  צ"ל  $(x, y)$ .
- עמ' 134 ש' 15: במקום  $2ax + x^2$   
צ"ל  $2ax + a^2$ .
- עמ' 134 ש' 17: סימן המחובר השלישי באגף  
שמאל הוא +; המכנה הוא  $p^2 - q^2$ .
- עמ' 134 ש' 19: המכנה הוא  $p^2 - q^2$ .
- עמ' 135 שרטוט: ה"אליפסה" צריכה להיות  
מעגל שמרכזו על ציר ה  $x$  ימינה מ B.
- עמ' 136 ש' -7: במקום -25 צ"ל +9.
- עמ' 137 ש' -6: במקום 31 צ"ל 21.
- עמ' 138 ש' 9: במקום  $r^2$  צ"ל  $r_2$ .
- עמ' 138 ש' 10, 11: צ"ל  $|AF_2|, |AF_1|$ .
- עמ' 138 שרטוט: הוסף  $F_1$  בנקודה  $(-2, 0)$ .
- עמ' 140 ש' 4: סגור סוגריים במכנה.
- עמ' 141 ש' -6: החלף ביניהם את b ו c.
- עמ' 145: כותרת הסעיף צריכה להיות המישור  
של גאוס
- עמ' 146 ש' -2: במקום במישור צ"ל במישור.
- עמ' 147 ש' 5: במקום  $z = r \cos \theta + i \sin \theta$   
צ"ל  $z = r \cos \theta + i r \sin \theta$
- עמ' 148 ש' 1: מחק את הסוגר.
- עמ' 150 ש' 11: במקום  $z = w + ti$   
צ"ל  $z = w + t$
- עמ' 152 ש' 8-12: ככל מקום באגף שמאל של  
המשוואות במקום 2 צ"ל 12.
- עמ' 154 ש' -6: במקום  $4z + 4z$  צ"ל  $-4z$ .
- עמ' 155 ש' 12: במקום לחילון צ"ל לחילוק.
- עמ' 156 ש' 7: באגף הימני ביותר הוסף את  
הגורם 5.
- עמ' 156 ש' -8: במקום של צ"ל על.
- עמ' 157 ש' 9: מספר הערת השוליים הוא (2).

- עמ' 102 ש' -1: צ"ל  $d + c > 0$ .
- עמ' 103 ש' 3: במקום 0 צ"ל c.
- עמ' 103 ש' 8: במקום 0 צ"ל c.
- עמ' 104 ש' 3: צ"ל  $\pm\sqrt{c/a}$ .
- עמ' 104 ש' -7: במקום g צ"ל y.
- עמ' 104 ש' -2: במקום מוצדקות צ"ל מוצדקת.
- עמ' 105 שרטוט: החלף ביניהם את  $(0, 6)$   
ואת  $(6, 0)$ .
- עמ' 107 ש' 6: במקום  $y/x$  צ"ל  $y/3$ .
- עמ' 107 ש' 12: צ"ל  $C \equiv (0, 2)$   
ו  $D \equiv (0, -2)$
- עמ' 108 ש' -1: אחרי לכפול צ"ל את אגפי  
המשוואות, בכל מספר שונה מאפס.
- עמ' 110 ש' -5: באגף הימני ביותר צ"ל  
 $\pm b\sqrt{x^2/a^2-1}$
- עמ' 111 ש' 4: בראשית השורה צ"ל  $2a$ .
- עמ' 112 ש' 2, 3: שלושת השורשים האחרונים  
חם:  $\sqrt{1 - a^2/x^2}$
- עמ' 112 ש' -5: במקום  $\frac{x^2}{a^2}$  צ"ל  $\frac{a^2}{x^2}$
- עמ' 113 שרטוט: המלבן צריך להיות סימטרי  
ביחס לצירים, וקדקדו נמצאים על  
האלכסונים.
- עמ' 114 שרטוט תחתון: החלף ביניהם  $y_1$  ו  $y_2$ .
- עמ' 114 ש' -3: צ"ל  $|AC|$  וצ"ל  $|BC|$ .
- עמ' 115 ש' 3: צ"ל  $|AB|$ .
- עמ' 116 ש' -7: באגף שמאל במקום  
 $(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2$   
צ"ל:  $x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$
- עמ' 118 ח' 3: במקום ה, ו, z צ"ל ד, ה, ו.
- עמ' 124 ח' 42: צ"ל  $A \equiv (0, 2)$
- עמ' 125 ח' 51: במקום  $hax + n$  צ"ל  $n + ax$ .
- עמ' 126 ח' 56: במקום מיוצד צ"ל מיוצג.
- עמ' 132 בצירור: במקום  $A(a, 0)$  צ"ל  $A(0, a)$ .

עמ' 157 ש' 5- : מספר הערת השוליים הוא (3) .

עמ' 157 ש' 1- : שורה זו היא הערת השוליים (3) .

עמ' 158 ח' 3 : מחק את "באמצעות פרמטרים" .

$$\text{עמ' 162 ח' 29- : צ"ל } \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{z_2} .$$

עמ' 163 ח' 34 : במקום של קבוצות צ"ל אח קבוצות .

•

הסימון 3- : פירושו שורה שלישית מלמטה .