הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

"**קשר-חם**": ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תמטי

הנושא: **חכמת הדבורים**

הוכן ע"י: נצה מובשוביץ-הדר.

תקציר: בנסיון לענות על השאלה "האם הדבורים בונות בחכמה את חלת הדבש?" מתבצע דיון על הגופים המרחביים היעילים לבניה זו.

מילות מפתח: הנדסת המרחב, הנדסת המישור, שטח פנים, נפח, כדור, גליל, חרוט, פיאונים, פיאון קמור, פיאון קעור, מנסרה, פירמידה, ריצוף מישור, מצולעים.

החומר הוגש במסגרת: "קשר-חם" בחיפה, סדנא ראשונה בשנה"ל תשנ"ו, אוקטובר 1996.
"קשר-חם" בתל-אביב, סדנא ראשונה בשנה"ל תשנ"ו, אוקטובר 1996.
"קשר-חם" בבאר-שבע, סדנא ראשונה בשנה"ל תשנ"ו, נובמבר 1996.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 15 עמודים.

חכמת הדבורים[2,1]

הקדמה

הדבורים אוצרות את הדבש בחלת-דבש הבנויה משעווה. האם הדבורים בונות בחכמה את החלה? האם האדם יכול לשפר את המבנה?!? - ננסה לברר את השאלה הזאת באופן שיטתי. נתחיל בשתי הנחות יסוד שטבעי לקבל אותן:

א) יש לתכנן את צורת התא בחכמה.

ב) יש לתכנן את צורת האריזה של התאים בחכמה.

מה פירוש "בחכמה"?

כשמדובר בתכנון בחכמה של צורת התא ושל מארז התאים, נראים ארבעת השיקולים הבאים כמתקבלים על הדעת:

א) נרצה לתכנן את התאים כך שיהיו כולם בעלי אותה צורה ובגודל אחיד. הדבר יחסוך בהכשרת "פועלי הייצור" ויאפשר גם אוטומציה ועבודה בשיטה של "סרט נע".

ב) אם ידועה כמות הדבש שאותה יש לאגור בחלה, יהיה זה הגיוני לחתור לניצול כמות קטנה ככל האפשר של שעווה לייצור כל תא. לחילופין, אם עומדת לרשותנו כמות שעווה מסוימת לייצור התא נרצה למצוא לו צורה שבה ניתן לארוז כמות מירבית של דבש.

ג) חשוב לשים לב לכך שמארז תאי-הדבש, שמקובל לכנותו בשם "חלת-הדבש", אמור לאפשר גישה לכל תא ועל כן הוא יכול להיות לכל היותר דו-שכבתי.

ד) בקבלת ההחלטה על צורת התא עלינו לזכור עוד שצורת התאים צריכה להיות כזו שאריזתם במרחב תהיה יציבה מבחינת שיווי המשקל, כלומר שאם נערום אותם זה על זה או זה לצד זה המבנה לא יתמוטט.

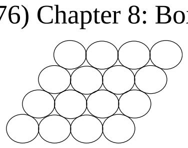
אף כי הכדור הוא הגוף בעל שטח הפנים המינימלי לנפח נתון, הכדור לא יכול לשמש לבניית החלה שכן הקריטריון האחרון מוציא מכלל אפשרות תאים בעלי צורה של כדור. אלה לא רק שאינם יציבים די הצורך כדי לערום אותם זה על זה, אלא שבהצבתם זה ליד זה, נשארים חללים רבים בלתי מנוצלים. נוסף על כך אין כל אפשרות להגיע לכך שלשני תאים סמוכים תהיה דופן משותפת, דבר שיכול היה לחסוך בשעווה. גם אם דואגים לצופף אותם ככל האפשר, אין לשני תאים סמוכים יותר מנקודה אחת משותפת.[3]

---

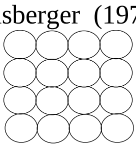
[1] מאמר זה פורסם בגיליון 20 של עלי"ה - כתב העת למורים למתמטיקה בעל-יסודי .1997

[2] על הערותיהם המאירות, תודתי נתונה לד"ר א. בונה, לפרופ' ד. ויס, לגב' א. וורטהיים, לד"ר א. רז, לגב' ז. שחם ולד"ר א. שמוקלר . חיפה, נובמבר 1996

[3] שאלה מעניינת בהקשר זה נוגעת לכדורים בעלי רדיוס נתון, שרוצים לארוז אותם בתיבה כך שניצול הנפח של התיבה יהיה מירבי. כדאי לשים לב לכך שאם שכבה מישורית אחת של כדורים מסודרת כמו בשרטוט שמימין אז כל כדור בשכבה נוגע ב-6 כדורים, ואילו בסידור שמשמאל כל כדור נוגע ב-4 כדורים בלבד. בעיית האריזה במרחב היא יותר מסובכת, כמובן. קפלר שיער שאריזה בשכבות כמו באיור ב כשכדורי השכבה העליונה נמצאים ברווחים שבין רביעיות של כדורי השכבה התחתונה, היא האריזה היעילה ביותר. שאלות אריזה הן שאלות מרתקות בעלות השלכות מעשיות. מתמטיקאים רבים בני-זמננו מתעניינים בהן והתוצאות מופיעות בספרות. למשל בספר: Honsberger (1976) Chapter 8: Box Packing Problems (ר' רשימת המקורות).



איור א



איור ב

בניגוד לכדורים, אריזה של גלילים (או של חרוטים) בשתי שכבות, יכולה להתבצע תוך הצמדה של שניים כך שיהיה להם בסיס משותף. אבל למרות שגלילים אפשר לערום די בקלות זה על גבי זה למבנה די יציב, הרי שכל שני גלילים סמוכים שאינם בעלי בסיס משותף, אין להם יותר מקו משותף. כך שעדיין מדובר במבנה "בזבזני" למדי מבחינת ניצול חומר הבנייה של הדפנות. חרוטים הם בעייתיים, במובן זה לפחות באותה מידה. לעומת זאת גופים שכל דפנותיהם מישוריות נוטים להיות יותר יציבים ואפשר אולי לתכנן אותם כך שכל דופן תהיה משותפת לשני תאים. דבר זה, אם אכן יתאפשר, יחסוך מאד בכמות השעווה שתידרש לבניית התאים. הדעת נותנת, איפוא, שנעדיף תאים שכל דפנותיהם שטוחות. בנוסח מתמטי יותר, נקבל איפוא את ההחלטה הבאה:

החלטה ראשונה: התא יהיה בעל צורה של פאון (פולי-אדר), כלומר גוף מרחבי שכל פאותיו הן מצולעים (מישוריים). מסיבות שכבר מנינו, נרצה לתכנן את חלת הדבש כך **שהתאים יהיו כולם בעלי אותה צורה ואותו גודל והמארז שלהם יהיה דו-שכבתי.**[4]

אילו פאונים נעדיף - קמורים או קעורים?

נשים לב שבעצם החלטנו להתמקד בבניית מבנה דו-שכבתי של פאונים זהים בעלי בסיס משותף. עדיין מספר האפשרויות העומדות בפנינו בבחירת הפאונים שיצטרפו לחלה, הוא עצום.

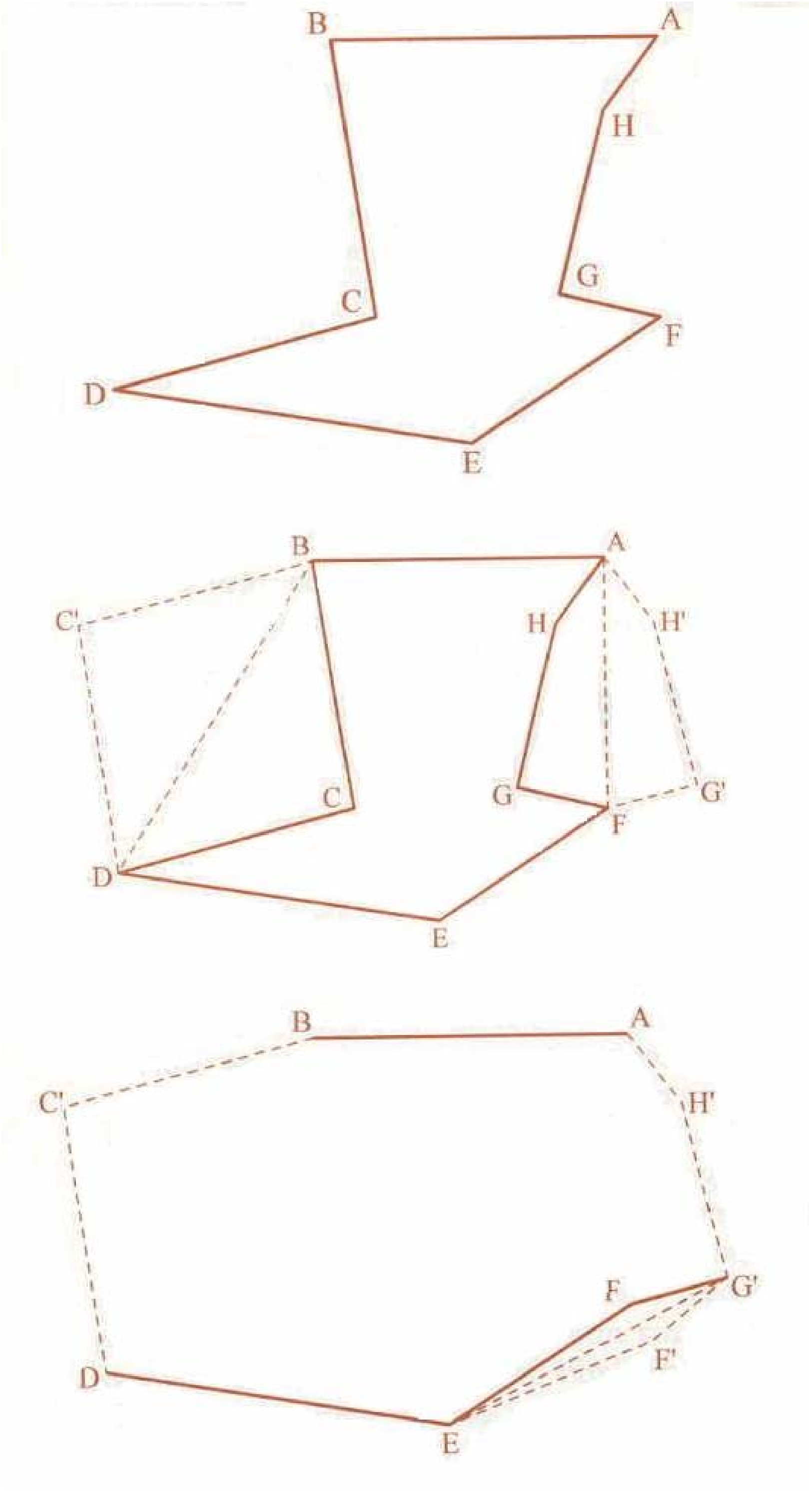
הפאונים נחלקים לשני סוגים: קמורים וקעורים. באופן גס (מאד!) פאון קמור הוא פאון שבמבנהו דומה במשהו לכדור, לגליל או לחרוט אלא שדפנותיו מישוריות. פאון קעור, לעומת זאת, נראה כאילו מישהו "הכניס בו אגרוף". באופן מדויק יותר: פאון קמור הוא פאון שחתך הרוחב שלו בכל מישור אפשרי (למעט הדפנות עצמן) הוא מצולע קמור ואילו פאון קעור יש לו לפחות חתך רוחב אחד (בנוסף אולי לאחת הדפנות) שהוא מצולע קעור.[5] איזה סוג עדיף?

נזכור שמבין שני תאים הצורכים כמות זהה של שעווה לבנייתם, נעדיף תמיד את התא שמכיל כמות גדולה יותר של דבש. כלומר מבין שני פאונים בעלי אותו שטח-פנים נעדיף את זה שנפחו הוא הגדול יותר. באופן אינטואיטיבי לחלוטין, נראה די ברור שקופסא "מעוכה" פנימה (קעורה) מכילה פחות מאחותה שאיננה מעוכה (קמורה), גם אם המעיכה לא שינתה (הגדילה) את שטח הפנים שלה. תימוכין לאינטואיציה הזאת אפשר למצוא בטענה הבאה: לכל מצולע קעור אפשר להתאים מצולע קמור השווה לו בהיקפו, אך גדול ממנו בשטחו. באיור 1 מתואר תהליך של יצירת התאמה כזאת. אף כי אין באיור זה כדי להוכיח את הטענה, אפשר ללמוד ממנו איך באמצעות שיקופים מתאימים, אכן אפשר לבנות לכל מצולע קעור את בן זוגו הקמור השווה לו בהיקפו.

החלטה שנייה: התאים יהיו בעלי צורה של פאונים קמורים.

4 הביולוג הנודע Stephen Hales, מבני דורו של אייזק ניוטון, נקט בגישה מקורית למציאת פתרון לבעיה המתמטית של מילוי החלל התלת-ממדי מבלי להותיר רווחים. הוא מילא חבית באפונים וערך ניסוי פיסיקלי בו דחס את כדורי האפונה כך שהרווחים ביניהם הצטמצמו לגמרי. הוא מצא שהאפונים התעוותו וקיבלו צורות שונות בעלות 13 ו-14 דפנות. הממצאים שלו לא קידמו אותו לפתרון הבעיה.

5 מצולע קמור הוא מצולע (קו שבור פשוט סגור) שכל קטע המחבר שתיים מנקודות השפה שלו, מכיל בנוסף לשתי נקודות אלו, אך ורק נקודות פנימיות של המצולע, או אך ורק נקודות שפה. במצולע קעור יש לפחות קטע אחד המחבר שתיים מנקודות השפה שלו, שיש עליו לפחות נקודה אחת מחוץ למצולע.



איור 1 : התאמה של מצולע קעור ABCDEFGHלמצולע קמור
ABC'DEF'G'H' השווה לו בהיקפו, אך גדול ממנו בשטחו

אילו פאונים קמורים נעדיף - מנסרות? פירמידות? פיאונים אחרים?

מבין המנסרות והפירמידות, די ברור שהמנסרות עדיפות. אחרי הכול, אם משווים מנסרה ופירמידה שיש להן אותו גובה ובסיסים חופפים, ידוע שנפח המנסרה גדול פי שלושה מנפח הפירמידה בעוד ששטח הפנים של המנסרה גדול בפחות מפי שלושה, מזה של הפירמידה (למעשה הוא מעט יותר מפי שניים). כל בר-דעת יעדיף איפוא להשקיע פחות מפי שלושה בכמות השעווה, כדי לקבל מקום גדול פי שלושה לדבש.

המנסרות עצמן יכולות להיות נטויות או ישרות. שתי מנסרות בעלות בסיסים חופפים ואותו גובה, שהאחת ישרה והשנייה נטויה, הן כידוע שוות נפח. לפיכך נעדיף לענייננו את הישרה בהיותה בעלת שטח פנים קטן יותר. מה גם שהמנסרות הישרות, בהיותן בעלות פאות צדדיות שכולן מלבניות וניצבות לבסיסים, הן גופים נוחים מאוד לבנייה ולאריזה.

הבסיסים, לפי שעה, אינם נכנסים לשיקולים של שטח הפנים ולכן העובדה ששטח המצולע הקמור גדול מזה של הקעור השווה לו בהיקפו, אינה מקלקלת את השורה.

החלטה שלישית: נעדיף תא שצורתו היא מנסרה קמורה ישרה, לפי שעה. אל האפשרות של פאון (קמור) אחר נחזור בהמשך.

ננסה לברר לעצמנו מבין כל המנסרות הקמורות הישרות איזו נעדיף?

אילו מבין המנסרות הקמורות הישרות נעדיף?

כבר ראינו שלמנסרות הקמורות והישרות יש עדיפות על פני הקעורות והנטויות. אולם מנסרות ישרות קמורות הן בעלות צורות רבות לאין ספור. צורת הבסיסים (או חתך הרוחב של המנסרה) היא הקובעת את הצורות השונות של המנסרות. נתעניין איפוא במנסרות ישרות שבסיסיהן מצולעים קמורים[6]. את אלה האחרונים ניתן למיין למשפחות של מצולעים לפי מספר הצלעות. בתוך כל משפחה אפשר לזהות כאלה שהם שווי-צלעות, אך לא שווי-זוויות, כאלה שהם שווי-זוויות, אך לא שווי-צלעות וכאלה שהם בעלי שתי התכונות גם יחד – הידועים בשם מצולעים משוכללים. נפח המנסרה הוא מכפלת שטח הבסיס שלה בגובהה. שאלתנו כרגע היא: מבין כל המנסרות הקמורות ובעלות מספר שווה של דפנות, איזו היא בעלת הנפח הגדול ביותר? אם נוסיף ונניח שהמנסרות כולן שוות בגובהן, השאלה מצטמצמת למעשה לשאלה: מבין כל המצולעים בעלי אותו מספר צלעות ואותו היקף, איזה הוא בעל השטח הגדול ביותר?[7]

אינטואיטיבית ובתוספת חיזוק אמפירי באמצעות תוכנה גרפית מתאימה, לא קשה לחוש באמיתותה של הטענה הבאה: **מבין כל המצולעים (הקמורים) בעלי אותו מספר צלעות ואותו היקף, המצולע המשוכלל הוא בעל השטח הגדול ביותר.**[8]

---

[6] נחזור ונזכיר, למען הסר ספק, כי הבסיסים עצמם עדיין לא נכנסים לשיקולנו. על צורת הסגירה של התאים נדון בנפרד בהמשך.

[7] אפשר לחקור את הבעיה באופן ניסויי בעזרת תוכנת מחשב כגון: "גיאומטריה בתנועה" של לוגל, או "המשער הגיאומטרי" של מט"ח. בוחרים מצולע בעל מספר מסוים (די גדול, למשל 12) של צלעות, וקובעים את ההיקף כגודל בלתי משתנה. מזמינים את חישוב השטח ואז משנים את צורת המצולע על ידי הזזת קודקוד זה או אחר. בודקים אילו שינויים בצורת המצולע גורמים להקטנת השטח ואילו גורמים להגדלתו.

[8] טענה זאת נשענת על ההנחה שקיים מצולע בעל שטח מכסימלי. ההוכחה המובאת כאן נשענת על הנחה זו מבלי להוכיחה. הוכחה שלמה יותר לטענה זאת אפשר למצוא בספרות. למשל בפרק 12 בספרו של איבן ניבן Niven (1981 p. 231-235) (ר' רשימת המקורות).

אולם, כפי שקורה פעמים רבות במתמטיקה, ההוכחה המלאה לכך איננה קצרה (ואף על פי כן היא מעניינת).

נבחן תחילה את המצב במשפחת המשולשים.

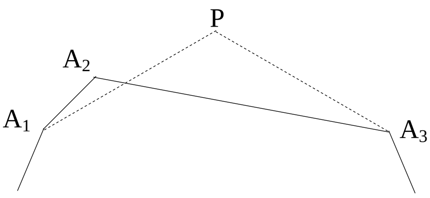
יהיו a , b , c אורכי הצלעות של המשולש. היקפו הוא לפיכך $a + b + c$ ושטחו על פי נוסחת הירון : $\{s(s - a)(s - b)(s - c)\}^{1/2}$ כאשר s הוא מחצית ההיקף. על פי הנחתנו ההיקף קבוע ועל כן s הוא גודל קבוע. השטח המירבי מתקבל כאשר המכפלה $(s - a)(s - b)(s - c)$ מקבלת ערך מכסימלי. שלושת הגורמים במכפלה הם בעלי סכום קבוע שכן

$$(s - a) + (s - b) + (s - c) = 3s - a - b - c = s$$

בהסתמך על משפט אי-שוויון הממוצעים[9], המכפלה מקבלת ערך מכסימלי כאשר שלושת הגורמים שווים, כלומר $s - a = s - b = s - c$ או במילים אחרות כאשר $a = b = c$. המשולש בעל השטח המכסימלי הוא על כן שווה-צלעות וזהו גם המשולש המשוכלל.

כפי שנראה מיד, ההוכחה הכללית לכך שבקרב המצולעים בעלי מספר שווה של צלעות (גדול משלוש) ואותו היקף, המצולע המשוכלל הוא המצולע בעל השטח המירבי, נובעת ישירות מהעובדה שאפשר להגדיל את השטח של כל מצולע (קמור) לא משוכלל בעל n צלעות מבלי לשנות את היקפו. נוכיח עובדה זאת, בנפרד לגבי מצולעים שכל צלעותיהם שוות ובנפרד לגבי כאלה שלא כל צלעותיהם שוות. נתחיל מהאחרונים.

במצולע שונה-צלעות בעל יותר משלוש צלעות, יש לפחות זוג אחד של צלעות סמוכות לא שוות, נסמן אותן $A_1A_2 \neq A_2A_3$ כאשר A_1 , A_2 , A_3 הם שלושה קודקודים סמוכים. נראה שתמיד קיימת נקודה P הנמצאת באותו צד של A_1A_3 שבו נמצאת A_2, כך שמתקיים $A_1P + PA_3 = A_1A_2 + A_2A_3$ ושטחו של המשולש A_1PA_3 גדול משטחו של המשולש $A_1A_2A_3$ (איור2).



איור 2 : שלושה קודקודים סמוכים של צלעות בלתי-שוות במצולע

הקודקודים A_1 ,A_3 הם נקודות קבועות על כן הקטע A_1A_3 הוא בעל אורך קבוע. אנו בודקים את כל האפשרויות לאתר נקודה P כך שיתקיים התנאי :

$$A_1P + PA_3 = 2s - A_1A_3 = \text{constant}$$

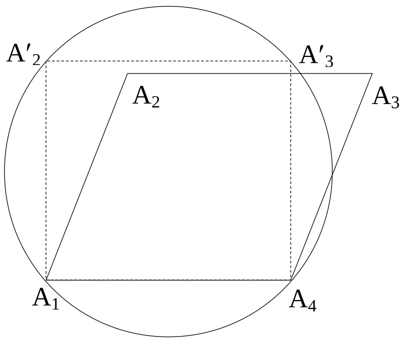
[9] משפט אי-שוויון הממוצעים קובע כי אם $a_1, a_2 ,..., a_n$ הם n מספרים אי-שליליים אזי סכומם גדול מ- n פעמים השורש ה-n-י של מכפלתם או שווה לו, והשוויון מתקיים כאשר $a_1=a_2 = ... =a_n$. אחת התוצאות שלו היא שאם n פונקציות חיוביות הן בעלות סכום קבוע, אזי מכפלתן מקבלת ערך מכסימלי בנקודה בה ערכי כל הפונקציות שווים (אם קיימת).

לדוגמא מכפלת שתי הפונקציות : $f(x)=x^2$; $g(x)=1-x^2$ מקבלת ערך מכסימום ב- $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ – שהוא הערך שבו $g(x)=f(x)$. את ההוכחה הכללית אפשר למצוא בספרות, למשל בספרו של איבן ניבן Niven (1981 p. 26) (ר' רשימת המקורות).

כאשר *s* הוא חצי ההיקף של המשולש $A_1A_2A_3$. המיקום של הנקודה P הוא על כן על שפת האליפסה שמוקדיה הם הקודקודים A_1, A_3. שטח המשולש A_1PA_3 הוא מחצית המכפלה של A_1A_3 בגובה על צלע זו מהקודקוד P שממולה. הוא יקבל ערך מכסימלי כאשר הגובה יהיה מכסימלי שכן הצלע קבועה, וזה יקרה אם הקודקוד P יימצא באחד הקצוות של הציר הקטן של האליפסה כלומר כאשר $A_1P = PA_3$. מכאן שהמצולע המתקבל מהמצולע המקורי על ידי החלפת A_2 ב- P, גדול בשטחו מהמצולע המקורי, אך שווה לו בהיקפו.

נותר להוכיח שגם את שטחו של כל מצולע שווה-צלעות בלתי-משוכלל, אפשר להגדיל מבלי לשנות את היקפו. על פי ההנחה המצולע, שהוא כאמור בעל ארבע צלעות חופפות או יותר, אינו משוכלל, לפיכך לא כל קודקודיו נמצאים על מעגל אחד. יתרה מזאת, גם לא כל ארבעה קודקודים סמוכים מונחים על מעגל אחד. שהרי שלוש נקודות שאינן על ישר אחד קובעות באופן יחיד מעגל העובר דרכן. לכן, אם כל ארבעה קודקודים סמוכים היו מונחים על מעגל אחד, אזי כל n הקודקודים היו על אותו מעגל. על כן קיימים במצולע הנדון ארבעה קודקודים סמוכים A_1,A_2,A_3,A_4 שאינם נמצאים על מעגל אחד. נראה שאפשר להחליף שניים מארבעת הקודקודים האלה באחרים, כך שיחד עם שניים מהקודמים יהיו ארבעתם על אותו מעגל ושטח המצולע יגדל, מבלי לפגוע בסך אורכי הצלעות.

לאמיתו של דבר, כנגד כל מרובע שאינו בר-חסימה, קיים מרובע בר-חסימה, שאורכי צלעותיו שווים לאלה של האחר. כדי להשתכנע בכך נחשוב על המרובע כעשוי מכפיסי-עץ דקיקים המחוברים בברגים בקודקודים, כך שאורכי הצלעות קבועים, אבל הזוויות ניתנות לשינוי. אם מרחיקים שני קודקודים נגדיים זה מזה, שתי הזוויות בשני הקודקודים האחרים גדלות ואפשר להגדיל את סכומן עד מעל ל-$180°$. אם מקרבים את הקודקודים הנגדיים, הזוויות הנגדיות הולכות וקטנות ואפשר להקטין את סכומן עד מתחת ל- $180°$. במצב ביניים מסוים, סכום הזוויות הנגדיות הוא בדיוק $180°$ והמרובע ניתן לחסימה. איור 3 מראה מעגל העובר דרך שניים מארבעת הקודקודים של מרובע $A_1A_2A_3A_4$ שאינו בר-חסימה (המעגל הנקבע על ידי שלושה מארבעת קודקודיו בוודאי אינו מכיל את הרביעי). המרובע $A_1A'_2A'_3A_4$ הוא בר-חסימה ואורכי צלעותיו שווים לאלה של המרובע המקורי.

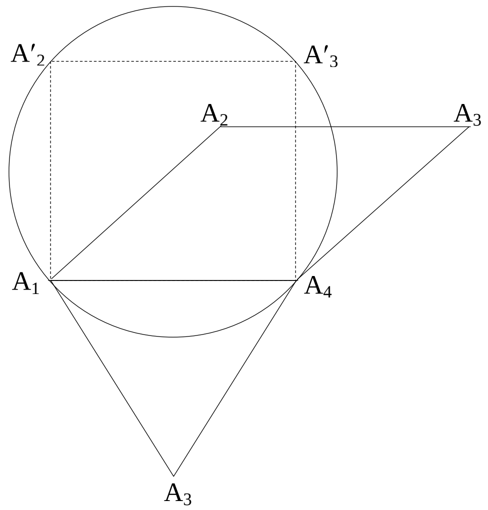


איור 3 : מעוין לא בר-חסימה ומעוין בר-חסימה בעלי שצלעות שוות

מרובע הניתן לחסימה במעגל שטחו גדול יותר משטחו של כל מרובע אחר שצלעותיו בעלות אותם אורכים באותו סדר. כדי להוכיח זאת נסמן את אורכי הצלעות של מרובע כלשהו ב- a , b , c , d. השטח שלו נתון על ידי הנוסחה :

$$A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{2}abcd\left[1+\cos(\theta+\lambda)\right]$$

שבה s מסמן את חצי ההיקף, ו- θ, λ הן שתי זוויות נגדיות. הערך המינימלי של $\cos(\theta+\lambda)$ הוא 1– והוא מתקבל אם ורק אם $\theta+\lambda = 180°$, כלומר אם המרובע הוא בר-חסימה. במקרה זה A^2 מקבל ערך מכסימלי. בכך הוכחנו את הטענה.



איור 4 : ארבעה קודקודים (סמוכים) במחומש שווה-צלעות לא משוכלל שאינם על מעגל אחד

עתה נחזור אל ארבעת הקודקודים הסמוכים A_1 , A_2 , A_3 , A_4 שאינם על מעגל אחד, במצולע בלתי-משוכלל שווה-צלעות בעל ארבע צלעות או יותר. נתייחס לרגע אל המרובע הנוצר על ידי ארבעה קודקודים אלה (ר' איור 4). כפי שראינו יש מרובע בר-חסימה $A_1\ A'_2\ A'_3\ A_4$ השווה לו באורכי הצלעות, אך גדול ממנו בשטחו ומתקיים :

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_1A'_2 = A'_2A'_3 = A'_3A_4$$

על ידי החלפת הקודקודים A_2,A_3 של המצולע המקורי ב- A'_2,A'_3 בהתאמה, נוצר מצולע חדש שווה-צלעות כמו קודמו, שווה לו בהיקפו, אך גדול ממנו בשטחו. וזהו מה שרצינו להוכיח.

עתה, הואיל והבטחנו שלכל מצולע לא-משוכלל – שווה-צלעות או שונה-צלעות – קיים מצולע אחר בעל אותו מספר צלעות, אותו היקף ושטח גדול יותר, נובע מכאן שהמצולע בעל השטח המירבי הוא המשוכלל. זאת כמובן בהנחה (שטעונה הוכחה נפרדת, כאמור בהערת-שוליים 8), שבין כל המצולעים שיש להם אותו מספר צלעות ואותו היקף, אכן קיים כזה ששטחו הוא הגדול ביותר. לכן, בבניית תאי חלת הדבש נקבל **החלטה רביעית: נעדיף תא שצורתו היא של מנסרה ישרה משוכללת.**

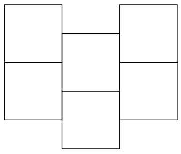
השאלה המתבקשת היא : אילו מביניהן נעדיף?

אילו מבין המנסרות הקמורות הישרות והמשוכללות נעדיף?

חלת הדבש, כאמור, מהווה מבנה המנצל את החלל באופן מירבי. שני תאים סמוכים זה לזה הם בעלי דופן משותפת ואין רווחים ביניהם. אילו מנסרות ניתנות לאריזה שכזאת?

הואיל והנחנו שהתאים כולם שווים בצורתם בכלל ובגובהם בפרט, הרי גם כאן, כמו קודם, השאלה מצטמצמת בעצם לשאלה המישורית: אילו מצולעים (קמורים) חופפים "מרצפים" את המישור? באומרנו "מרצפים" אנו מתכוונים לכיסוי מושלם שאינו מותיר רווחים.

לאור ההחלטות שכבר קיבלנו נוכל להסתפק בחקירת השאלה לגבי מצולעים משוכללים ולכן לא נעסוק כאן בריצופים אחרים.[10] נגביל את הדיון ל"ריצוף פשוט" כלומר ריצוף באמצעות מצולעים (חופפים זה לזה) שמניחים אותם זה לצד זה בשיטת "צלע-אל-צלע" כך שלשני מצולעים סמוכים יש צלע (שלמה) ושני קודקודים במשותף. דוגמא לריצוף לא פשוט על ידי אריחים ריבועיים שווים משורטטת באיור 5.



איור 5: ריצוף בריבועים לא בשיטת "צלע-אל-צלע"

כדי שייוצר ריצוף פשוט במצולעים צריכים שלושה מצולעים או יותר להיפגש בכל קודקוד של כל מצולע, כך שסביב הקדקוד המשותף ייווצר סכום זוויות של 360° בדיוק. לא פחות ולא יותר. נבדוק את האפשרויות השונות:

מספר הצלעות במצולע המשוכלל	מידת כל זווית במצולע	מספר המצולעים בכל קודקוד	סכום הזוויות סביב כל קודקוד	הייתכן ריצוף?
3	60°	3	180°	לא
3	60°	4	240°	לא
3	60°	5	300°	לא
3	60°	6	360°	כן
4	90°	3	270°	לא
4	90°	4	360°	כן
5	108°	3	324°	לא
5	108°	4	432°	לא[11]
6	120°	3	360°	כן
7 ומעלה	מעל 120°	3	מעל 360°	לא[12]

[10] השאלה המעניינת יותר מבחינה מתמטית היא זו שאינה מגבילה את המצולעים למשוכללים בלבד. שאלה זו העסיקה מתמטיקאים רבים במשך שנים ארוכות ולא הושלמה עד 1967, כאשר ריצ'רד ברנדון קירשנר (Richard Brandon Kershner) מצא שלושה מחומשים שבעזרת כל אחד מהם ניתן לרצף את המישור, שעד אותה עת נעלמו מעיני החוקרים שעסקו בבעיה. פרטים רבים ומעניינים על הבעיה אפשר למצוא במאמרו של מרטין גרדנר (1975) Gardner (ר' רשימת המקורות).

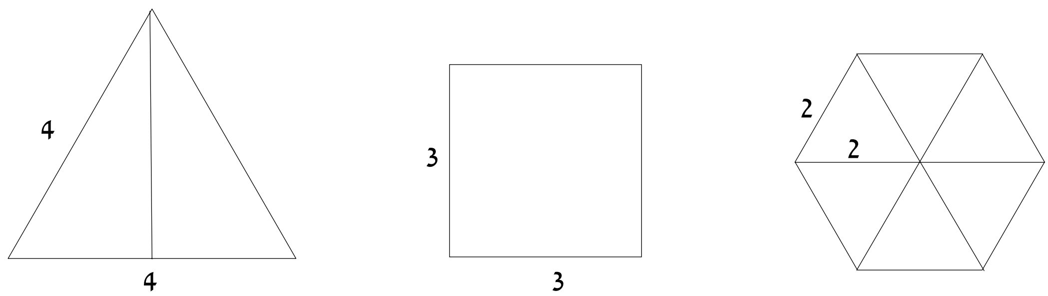
[11] כפי שציינו בהערת השוליים הקודמת, אפשר לרצף את המישור במחומשים בלתי-משוכללים.

[12] מעניין לציין כי אי אפשר לרצף את המישור ריצוף פשוט במצולעים בעלי 7 צלעות או יותר גם אם אין הם משוכללים. את הוכחת העובדה הזאת אפשר למצוא בספרות, למשל בספרו הנ"ל של איבן ניבן Niven (1981, pp 150-152) (ר' רשימת המקורות).

המסקנה המתבקשת מהנתונים המופיעים בטבלה, היא שהמנסרות "המועמדות" לבניית תאי חלת הדבש הן רק מנסרות שבסיסיהן: משולשים שווי-צלעות, ריבועים או משושים משוכללים. מביניהן נעדיף כמובן את זו שאוצרת כמות מירבית של דבש.

נזכור כי מדובר במנסרות השוות בשטח הפנים שלהן ובגובהן, לכן עולה שוב השאלה: איזה משלושת המצולעים הללו הוא בעל השטח הגדול ביותר, בהנחה ששלושתם בעלי אותו היקף?

נראה תחילה דוגמה. נניח שהיקפו של כל אחד מהמצולעים הוא 12 יחידות. שטחו של משולש שווה-צלעות שהיקפו 12 יחידות אורך הוא $4\sqrt{3}$ (פחות מ-8) יחידות שטח. שטח הריבוע בעל אותו היקף הוא 9 יחידות שטח ושטח המשושה הוא: $6\sqrt{3}$ כלומר למעלה מ-9 יחידות שטח.



באופן כללי: אם נגדיר את היקף המצולע כיחידה אחת, אזי צלע המשולש אורכה 1/3 יחידה ושטחו $\frac{\sqrt{3}}{36}$ יחידת שטח. צלע הריבוע אורכה 1/4 יחידה ושטחו 1/16 יחידת שטח. שטח הריבוע גדול משטח המשולש שכן: $\frac{1}{16}=\frac{9}{144}>\frac{4\sqrt{3}}{144}=\frac{\sqrt{3}}{36}$

צלע המשושה אורכה 1/6 היחידה, ושטחו $\frac{\sqrt{3}}{24}$ יחידות שטח. הוא גדול משטח הריבוע כי[13]:

$$\frac{\sqrt{3}}{24}=\frac{2\sqrt{3}}{48}>\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{48}=\frac{1}{16}$$

מכאן קצרה הדרך להחלטתנו החמישית והאחרונה:

החלטה חמישית: המנסרה המשושה(המשוכללת) עונה על כל הדרישות שהצבנו לבניית תאי חלת הדבש.

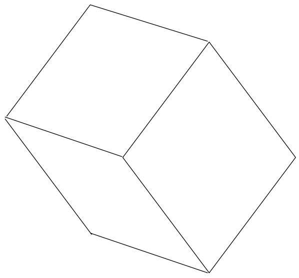
נותרה עוד רק שאלת המכסה.

ומה בדבר המכסה?

טבעי היה להניח שהדבורים מסתפקות במבנה של מנסרה משוכללת משושה לבניית תאי חלת הדבש. כידוע, כל אחד מבסיסיה (המישוריים) של מנסרה משושה משוכללת מורכב משלושה מעוינים חופפים (ר' איור 6), אבל הדבורים בונות לתא "גג" לא מישורי. חכמתן של הדבורים

[13] באופן כללי, בין המצולעים המשוכללים בעלי אותו היקף, המצולע המשוכלל בעל $n+1$ צלעות הוא בעל שטח גדול יותר מזה שיש לו רק n צלעות. הוכחה לכך נמצאת בספרות (למשל בספרו של איבן ניבן Niven (1981) p. 113-114) (ר' רשימת המקורות).

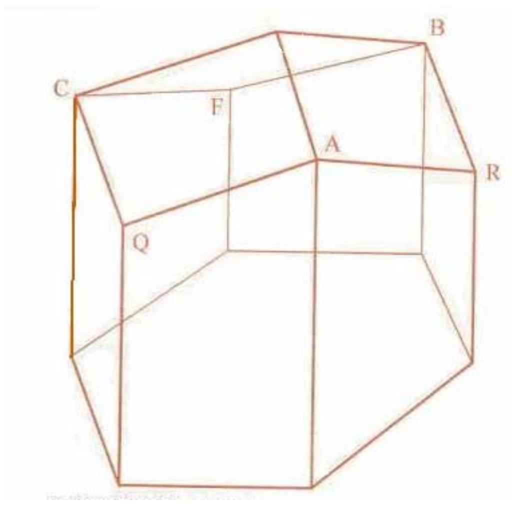
מפתיעה לא פחות מחריצותן. מסתבר שהן משכילות לחתום כל תא בצורה הכלכלית ביותר. מכסה משושה נראה אולי ממבט ראשון כצורה המתאימה ביותר לסגירת התא, אולם לא היא.



איור 6 : מבט מלמעלה על מכסה המנסרה

תאי חלת הדבש חתומים על ידי מכסה המורכב משלושה מעוינים חופפים הנטויים זה אל זה ואל ציר המנסרה בזוויות שוות, ופאות המנסרה מהוות טרפזים חופפים.[14] שלושת חלקי הגג המעוינים נפגשים בנקודה הגבוהה ביותר S המהווה קודקוד של זווית קהה בכל מעוין. המישורים ABC ו- PQR מקבילים זה לזה וניצבים לפאות הצדדיות. המישור ABC מחלק את המרחק של קצה הגג S ממישור PQR לשני חלקים שווים (ר' איור 7).

כבר בראשית המאה ה-18 העלו זואולוגים את ההשערה שהמבנה הייחודי הזה הוא חסכוני בחומרי בנייה והציגו אותה כאתגר למתמטיקאים בני אותה תקופה. הבעיה היא : האם אפשר לתכנן למנסרה משוכללת ישרה, "גג" המורכב משלושה מעוינים חופפים, כך שיתקבל גוף השווה בנפחו לזה של המנסרה (שבסיסיה מישוריים) ושטח הפנים שלו יותר קטן? אולי אפילו מינימלי? - ננסה לפתור אותה.

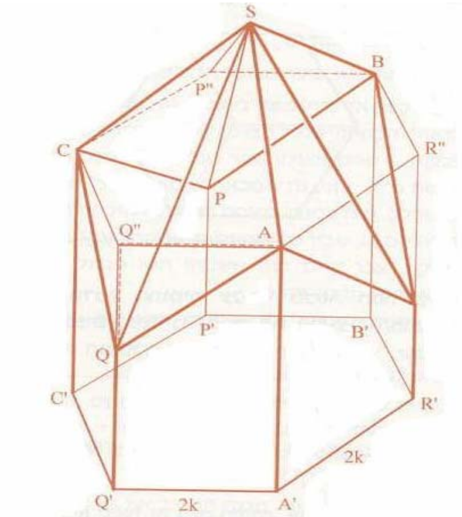


איור 7 : מנסרה משושה עם מכסה משלושה מעוינים חופפים

נניח שחתך הרוחב של המנסרה הוא משושה שצלעו $2k$. המקצועות הצדדים העוברים דרך הקודקודים P, Q, R חותכים את המישור העובר דרך ABC מחוץ לתא בנקודות P'', Q'', R'' בהתאמה ויוצרים משושה משוכלל $AR''BP''CQ''$ שצלעו $2k$. המרחק בין המישור PQR לבין המישור ABC שווה למרחק בין קצה הגג S לבין המישור ABC. נסמן אותו ב- x. אפשר לראות שנפח המנסרה לא משתנה אם בוחרים בסגירה שלה על ידי שלושת המעוינים הנטויים כפי

[14] נמשיך ונקרא לפאון זה בשם מנסרה, אף כי פאותיו הצדדיות אינן מלבניות.

שתוארו לעיל במקום לסגור אותה במשושה AR″BP″CQ″, שכן התוספת שנוספת מהצד האחד של מישור ABC (הפירמידה המשולשת S·ABC) נגרעת מצידו השני (על ידי שלוש הפירמידות P·BCP″, Q·CAQ″, R·ABR″). השינוי שחל על ידי החלפת צורת המכסה הוא, איפוא, רק בשטח הפנים.



איור 8 : בתקווה שיסייע להבנת ההוכחה (למרות שהאלכסון הקטן של המעוין נראה כאילו הוא הגגדול)

איכותית, ברור שהוא קטן. כמותית, מצד אחד נוסף שטח המעוינים PBSC, QCSA, RASB ומאידך, נגרע שטח המשושה AR″BP″CQ″ (שהוא $6k^2\sqrt{3}$) ועוד נגרע סכום שטחי המשולשים: PP″B, PP″C, QQ″C, QQ″A, RR″A, RR″B (שהוא $6kx$). מידת השטח של מעוין היא מחצית מכפלת מידות האורך של האלכסונים. נחשב את שטחי המעוינים שנוספו: נשים לב לכך שהאלכסונים הקצרים של חתך הרוחב המשושה של המנסרה, A′B′ = B′C′ = C′A′ , אורכם $2k\sqrt{3}$ (הואיל וזוויות המשושה הן בנות 120°), וכזה הוא גם אורכם של הקטעים AB = BC = CA השווים להם בהתאמה ומהווים את האלכסונים הארוכים של המעוינים. נסמן את אורך האלכסון הקצר של כל אחד משלושת המעוינים ב- $2y$. מכאן שהשטח שנוסף על ידי שלושת המעוינים הוא $6ky\sqrt{3}$ החיסכון בשטח הפנים (תוך שימור הנפח!) המתקבל על ידי שינוי צורת הגג מגג שטוח לגג משופע כמתואר, הוא על כן: $6k^2\sqrt{3}+6kx-6ky\sqrt{3}=6k^2\sqrt{3}-6k[y\sqrt{3}-x]$

אם כן, כדי לקבל חסכון מכסימלי עלינו למצוא את המינימום של הביטוי בסוגריים המרובעים על ידי קציבת ערך מתאים של x. לשם כך נשים לב, תחילה, לכך שההיטל של $SR = 2y$ על ציר המנסרה הוא $2x$ (גובה הגג ממישור ABC) ועל המישור PQR הוא $2k$ (רדיוס המעגל החוסם את המשושה), ועל כן:

$$y^2 = k^2 + x^2 \qquad (1)$$

עכשיו, נסמן ב- u את $y\sqrt{3}-x$ (הביטוי בסוגריים המרובעים, אותו אנו מנסים למזער)

וב- v את הביטוי הסימטרי לו: $x\sqrt{3}-y$

נקבל: $u^2-v^2=3y^2-2xy\sqrt{3}+x^2-(3x^2-2xy\sqrt{3}+y^2)=2(y^2-x^2)=2k^2$

במלים אחרות

$$u^2 = 2k^2 + v^2 \qquad (2)$$

מכאן שהערך של x שעבורו u מקבל ערך מינימלי מתקבל כאשר v שווה לאפס כלומר כאשר $x\sqrt{3} = y$.

ממשוואות (1) ו- (2) נקבל $x = k\sqrt{\frac{1}{2}}$ ו- $y = k\sqrt{\frac{3}{2}}$. נתונים אלה קובעים את גודלם של שלושת המעוינים החופפים המרכיבים את גג המנסרה כמבוקש.

באופן איכותי ניתן לתאר את התוצאות האלה כך: מרכז המכסה המשושה הוגבה בשיעור של x שהוא פחות ממחצית צלעו ($2k$). באותה מידה הונמכו שלושה משש קודקודיו. השינוי בהשוואה לגג השטוח הוא כזה שאלכסוני המעוינים היוצאים ממרכז הגג החדש אל הקודקודים שהונמכו, התארכו בערך כדי רבע מאורכם המקורי (שהיה $2k$ והפך ל- $2y$).

למרות ההארכה של האלכסון היוצא ממרכז הגג הוא נשאר עדיין האלכסון הקצר של המעוין שכן האלכסון $\mathrm{SR} = 2y = 2k\sqrt{\frac{3}{2}}$ קצר מהאלכסון $\mathrm{AB} = 2k\sqrt{3}$. לפיכך שלוש הזוויות של המעוינים הנפגשים ב- S הן קהות. אם נסמן את הזווית SAR, הזווית החדה של המעוין, ב- 2α ואת AB ב- $2d$ נמצא ש- $\tan\alpha = \frac{y}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ומכאן:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

לפיכך הזווית החדה של המעוין המבוקש היא בת $2\alpha = 70°32'$ והזווית הקהה שלו 2β המשלימה אותה ל- $180°$ היא על כן בת $109°28'$.

נשלים את הנתונים הכמותיים בחישוב הזווית μ שבין האלכסונים הקטנים של המעוינים לבין ציר המנסרה העובר דרך S והזווית ν שבין המעוין לבין חתך הרוחב של המנסרה.

$$\tan\mu = \frac{2k}{2x} = \sqrt{2} \Rightarrow \mu = 90° - \alpha = 54°44'$$
$$\nu = 90° - \mu = \alpha = 35°16'$$

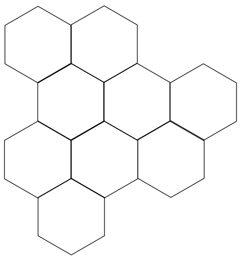
הואיל וטנגנס הזווית החדה A'AR של הטרפז המהווה את הפאה הצדדית של המנסרה הוא $\frac{2k}{x} = \sqrt{8}$ וזהו גם הערך של טנגנס הזווית החדה של המעוין 2α, הרי שהזווית החדה והזווית הקהה של הטרפז שוות בהתאמה לזווית החדה ולזווית הקהה של המעוין כלומר 2β, 2α בהתאמה. קל איפוא לראות שהפינות התלת-צדדיות S, P, Q, R הן חופפות ומשוכללות (כל צד הוא 2β) ועל כן גם הזוויות בין כל שני מישורים הנפגשים בפינות אילו כולן שוות זו לזו. באופן דומה, מאחר והפינות הארבע-צדדיות A, B, C גם הן חופפות ומשוכללות (כל צד הוא 2α), גם להן

יש זוויות מישוריות חופפות זו לזו. לכן, כדי לקצוב את גודל הזוויות המישוריות מספיק לקצוב את גודל הזווית בין שני מישורי הפאות הצדדיות הנפגשים בכל אחד משׁשת הקדקודים A, B, C, P, Q, R. הזווית הזאת היא זווית המשושה המהווה חתך רוחב של המנסרה, כלומר 120°.

בגבולות הטעות במדידה, נמצא בטבע כי אכן הדבורים בונות את תאי חלת הדבש ממנסרות משושות החתומות על ידי מכסים עשויים משלושה מעוינים שהזוויות ביניהם הן של 120°. מעניין איפוא שגם לגג המנסרה שממנה הדבורים בונות את חלת הדבש יש מבנה חסכוני, פשוט ומשוכלל שבו הזוויות בין כל שני מישורים הן שוות. באומרנו זאת התעלמנו מהבסיס התחתון של המנסרה שעד כה כמעט שלא התייחסנו אליו. זהו המקום שבו נצמדות שתי שכבות של תאי חלת הדבש זו אל זו. נראה מיד שהעניין מתקשר לעוד "חוב" שהשארנו פתוח, בעניין הפאונים שאינם מנסרות או פירמידות ואולי ניתן באמצעותם להגיע לפתרון עוד יותר טוב לבעיית הבנייה של חלת הדבש.

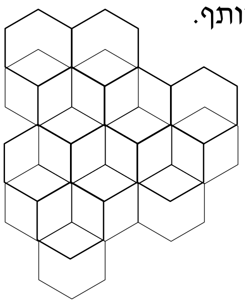
איך מסתדרים התאים בשתי שכבות?

על פי כל האמור עד כאן עולה שהדבורים, העמלות בחריצות על בניית תאי חלת הדבש, משכילות לחסוך בשעווה ע"י בנית תאים בעלי חתך רוחב משושה משוכלל, הנצמדים זה אל זה בדפנות הצדדיות ויוצרים חלה בת שתי שכבות שחתך הרוחב שלה נראה בערך כמו איור 9.



איור 9 : חתך לרוחב שכבה של תאים בחלת הדבש

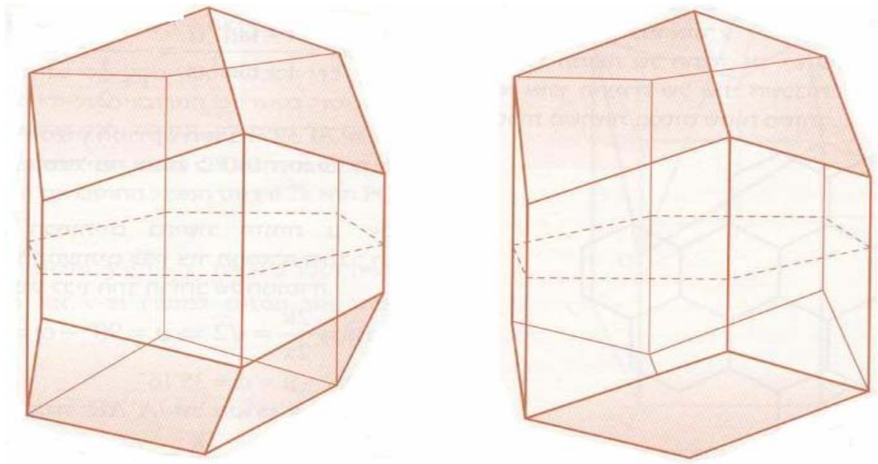
זהו אכן המבנה של החלה, אך יש עוד פרט אחד שעלינו ללבן והוא אופן היצירה של שתי השכבות. הדבורים אינן מצמידות מנסרות משושות בבסיס שטוח משותף. את אותה חוכמה שראינו לגבי מבנה הגג הן מנצלות גם לגבי הבסיס. בראשיהן המחודדים הן דוחסות את השעווה במרכזו של הבסיס התחתון של כל תא בשכבה העליונה כך שגם הוא מקבל צורה של שלושה מעוינים משופעים בעלי קודקוד משותף.



איור 10 : מבט מלמעלה על שתי השכבות בחלה

את השכבה העליונה הן בונות על השכבה התחתונה כך שקדקוד המכסה התחתון בתא של השכבה העליונה נכנס בשקע הנוצר על ידי שלושה תאים סמוכים של השכבה התחתונה. באיור 10 רואים מבט מלמעלה על שתי השכבות. יוצא מזה שכל תא בחלה, כשהוא חתום סגור משני

צדדיו במבנה תלת-מעויני, ונראה בעצם כמו אחד משני הפאונים באיור 11, הנבדלים זה מזה רק באוריינטציה ההדדית בין שני המכסים.



איור 11 : הצורה הפאונית של תא חלת הדבש

בשניהם, כמובן, הקודקודים של מרכזי המכסים נמצאים זה מול זה בשני הקצוות של ציר המנסרה. שניהם דוֹדֶקָאֶדרים, הימני עשוי כולו ממעוינים ונקרא : תריסרון מעויני Rhombic Dodecahedron. השמאלי עשוי שישה טרפזים ושישה מעוינים. אפשר לקבל אותם זה מזה אם חותכים לאורך "קו המשווה" המשושה שבאמצע הגובה ומסובבים את אחד החצאים ב- $60°$. לפיכך שני הפאונים הם שווים בנפחיהם ובשטחי הפנים שלהם.

תריסרון מעויני "משוכלל" העשוי ממעוינים שכולם חופפים, מתקבל על ידי בניית פירמידה משולשת שגובהה $\frac{a}{2}$ על כל אחת משש הפאות של קובייה שצלעה a. הואיל והקובייה היא גוף אשר ממלא את המרחב, גם התריסרון המעויני המתקבל באופן כזה הוא גוף הממלא את המרחב. כדי להיווכח בכך נתאר לעצמנו שמילאנו את המרחב בקוביות כאלו, צבענו אותן לסירוגין בשחור-לבן, הוצאנו את הקוביות השחורות ומילאנו את החללים שנוצרו על ידי בניית פירמידות בגובה $\frac{a}{2}$ על הפאות של הקוביות הלבנות. התריסרון המעויני הוא איפוא פאון שממלא את המרחב גם אם לא מגבילים את מספר השכבות לשתיים. נפחו כפול מנפח הקובייה והוא על כן $2a^3$. האלכסון הקצר של כל מעוין ארכו a, והגדול $a\sqrt{2}$. לפיכך שטח הפנים של התריסרון הוא : $12a^2\sqrt{2}$. הקודקודים הם משני סוגים – באחד נפגשים ארבעה פאונים ובשני שישה.

האם זהו המילוי החסכוני ביותר מבחינת היחס בין הנפח לבין שטח הפנים? האם האדם יכול לשפר את הפתרון של הדבורים?

לפני שניגש לשאלות אלו נציין כי היחס בין הנפח לבין שטח הפנים אינו גודל מוחלט. הוא תלוי באורך הצלע של המשושה המהווה חתך רוחב של התא. הדבורים בטבע בוחרות במידת התא המתאימה למידות הגוף שלהן. באומרנו "בוחרות" אין הכוונה לשיקול-דעת שהדבורים מפעילות. בכלל, בכל הניתוח שלעיל נקטנו בסגנון המייחס לדבורים חוכמה ובינה מתמטית בּיכוֹל. האמת היא שאנו בני האדם זקוקים למתמטיקה כדי לעמוד על צפונות הטבע.

יש להניח שאין זה אלא האינסטינקט של הדבורים המוביל אותן אל הפתרון האמור.[15]

סוף-דבר: האם האדם יכול לשפר את המבנה?

מאות שנים מעסיקה את הקהילייה המתמטית שאלת האריזה החסכונית ביותר של המרחב האינסופי בפאונים. האם הטבע חנן את הדבורים ביכולת להגיע אל הפתרון הטוב ביותר, או שמא יכול האדם להגיע לפתרון טוב ממנו? אילו תאים שווי-נפח ממלאים את המרחב בצורה הצורכת מינימום של שטח-פנים? [16]

הכדור הוא כידוע המשטח הכולא את הנפח הגדול ביותר עבור שטח פנים נתון. אבל כדורים אינם ניתנים לאריזה בלי רווחים. במשך מאות שנים התחרו ביניהם קבוצות רבות על האריזה שאינה מותירה רווחים. הידועה ביותר בין הקבוצות הללו היא קבוצת הדבורים. תהילת המיומנות שבה הדבורים בונות את חלת הדבש במינימום של שעווה יצאה עוד בימי היוונים. פאפוס כתב: "הדבורים יודעות רק את העובדות השימושיות להן, שהמשושה יכיל יותר דבש לאותה כמות חומר מאשר הריבוע והמשולש." אכן, כפי שראינו, הפתרון במישור הוא המשושה המשוכלל שאותו ניתן לראות באופן ברור בחלת הדבש. אבל העולם שלנו הוא אינו מישורי, כידוע.

מבין חמשת הפאונים המשוכללים[17] היחיד שבעזרתו אפשר למלא את המרחב הוא הקובייה, והיא בוודאי לא החסכונית ביותר. מועמד בעל עדיפות גדולה הוא הפאון הלא משוכלל (אך מאוד סימטרי) הנקרא אוקטאדר קטום Truncated Octahedron. זהו אוקטאדר ממנו חותכים שש פירמידות שוות, אחת בכל קודקוד, בגובה מתאים כך שמתקבל פאון בעל ארבע-עשרה פאות: שש מהן בצורת ריבועים חופפים ושמונה בצורת משושים חופפים (ר' איור 12). זהו אחד הגופים החצי-משוכללים (Semi-regular). קיומם של גבישים בצורתם אוקטאדר קטום בטבע (למשל גביש הפלואוריד CaF_2) הוא שהוביל אליו את החוקרים. האוקטאדר הקטום ממלא את המרחב ללא רווחים. לפני למעלה ממאה שנה הראה לורד קלוין Lord Kelvin שעל ידי חיתוך עדין של פאות האוקטאדר הקטום ומקצועותיו בצורה מסוימת שמעגלת אותם במידה מעטה כך שהפאון יהיה מעט יותר כדורי, אפשר להקטין את שטח הפנים מבלי לשנות את הנפח והגוף החדש עדיין ימלא את המרחב. זאת ועוד – מתקבל פתרון טוב יותר מהפתרון של הדבורים!

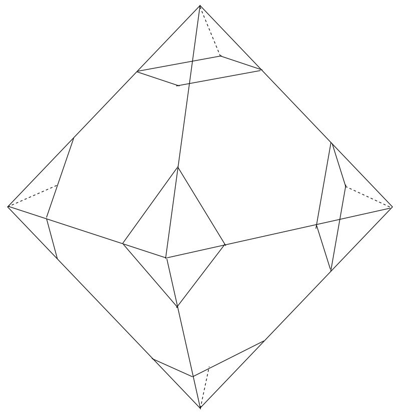
בחודש פברואר 1994 הודיעו ווייר ופלאן (D. Weair ו-R. Phelan) מעל דפי העיתון *Philosophical Magazine Letters* שהם הצליחו לשפר את פתרונו של לורד קלוין שניתן 107 שנים קודם לכן. הפתרון שלהם משפר את הפתרון של לורד קלוין ב- 0.3%, וזהו לדבריהם שיפור ראוי לציון בהקשר זה. גם הם כמו לורד קלוין משתמשים בפאונים כאבני היסוד ועושים בהם

15 ניסויים שנערכו על ידי יעקב ישי ושותפיו למקצוע בצרעות בחלל, מצביעים על כך שהפתרון שהדבורים מצאו בטבע הכפוף לחוק-המשיכה על כדור הארץ אינו בהכרח הפתרון בתנאי החלל (ר' רשימת המקורות Ishay Jacob Et als. 1994, 1995).

16 שאלה זו מסירה את האילוץ של גישה אל כל תא, שהדריך אותנו עד לכאן.

17 פאון משוכלל הוא משטח מרחבי סגור העשוי מפאות חופפות זו לזו שכל אחת מהן היא מצולע משוכלל. לא קל, אף כי אפשר להוכיח, שחמשת הפאונים המשוכללים היחידים הם: טטראדר (ארבעון, עשוי מארבעה משולשים שווי-צלעות חופפים שכל שלושה מהם נפגשים בקודקוד, סך הכול 4 קדקודים), אוקטאדר (תמניון, עשוי 8 משולשים שווי-צלעות חופפים, 6 קודקודים שבכל אחד מהם נפגשים 4 משולשים), הקסאדר (קובייה, 6 פאות ריבועיות חופפות, 8 קודקודים שבכל אחד נפגשות שלוש פאות), דודקאדר (תריסרון - 12 פאות מחומשות חופפות ומשוכללות ו-20 קודקודים שבכל אחד מהם נפגשים שלושה מחומשים משוכללים) ואיקוזאדר (עשרימון - עשרים פאות בצורת משולשים שווי-צלעות חופפים, בכל אחד משנים-עשר הקודקודים נפגשים 5 משולשים).

שינויים קלים. שלא כמו קלוין, הם ממלאים את המרחב בשני סוגים של פאונים שווי-נפח, אחד בעל 12 פאות ואחד בעל 14 פאות. בתקופתנו אין תימה בכך שהם הגיעו לפתרונם בסיועו של מחשב רב עוצמה.



איור 12: אוקטאדר קטום

האם זהו סוף הדרך? – העתיד יוכיח. בעיית מילוי המרחב באופן חסכוני, היא אחת מאותן בעיות מתמטיות פשוטות למראית עיין, שקל לנסח אותן ולהבין אותן, אך עדיין לא נמצאה תיאוריה שתאפשר פתרונן באופן שיטתי.

רשימת מקורות

DeTemple, Duane [1971]: “The Birds and the Bees”, part 2, *Mathematical Notes* 14(2). Washington State University, Pullman, Washington.

Dorrie, Heinrich [1965]: “The Honeybee cell” Problem no. 93 in: *100 Great Problems of Elementary Mathematics.* Dover New York NY. pp. 366-369

Ishay, Jacob & Megory, Emanuel & Glickman, Barry and Geadah, Michel [1994]: “The Effects of Micro-Gravity on Hornet’s Nest Building and Activity”, *Journal of Gravitational Physiology*, 1(1):110-111.

Ishay, Jacob and Sadeh, Dror [1975]: “Direction Finding by Hornets Under Gravitational and Centrifugal Forces”, *Science*, 190:802-804.

Gardner, Martin [1975]: “On Tessellating the Plane with Convex Polygon Tiles”, *Scientific American* 7(1975), pp. 112-117; 12(1975), pp. 117-118.

Gray, Jeremy [1994]: “Parsimonious Polyhedra”, Nature, 367 pp. 598-599.

Honsberger, Ross [1976]: *Mathematical Gems II.* MAA – The Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Exposition no. 2. pp. 58-89.

Niven, Ivan [1981]: *Maxima and Minima without Calculus*. MAA - The Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions, no. 6, Chapter 3, 4, 8, 12.

Niven, Ivan [1978]: “Convex Polygons that Cannot Tile the Plane”, *American Mathematical Monthly 8*5 pp. 785-792

Schattschneider, J. Doris [1978]: “Tiling the Plane with Congruent Pentagons”. *Math Magazine 51* pp. 29-44.

Steinhaus, Hugo [1983]: *Mathematical Snapshots*. Oxford University Press, New York, pp. 202-207.

Tóte, L. Fejes [1964]: “What the Bees Know and What They Do Not Know”, *Bulletin of the American Mathematical Society* 70, pp. 468-481.