המספרים החופשיים

עלי מרצבך
המחלקה למתמטיקה, אוניברסיטת בר-אילן

המתמטיקאים הרחיבו את המושג 'מספר טבעי' עד המספרים המרוכבים, דרך המספרים השלמים, הרציונליים והממשיים אנו מציעים פה הרחבה חדשה של המספר הממשי שתיקרא מספר חופשי מספר חופשי הוא צורה פשוטה של המושג המתמטי הנקרא משתנה מקרי, והוא מתאים לכמעט כל המדידות שאנו עושים יום-יום, כאשר המספר המתקבל הוא בדרך כלל לא ממש מדויק, או שיש אי-ידיעה או אי-ביטחון מסוים בנכונותו

הקדמה

במשך ההיסטוריה הרחיבו המתמטיקאים כמה פעמים את המושג 'מספר' בכל פעם, ההרחבה באה לענות על צרכים מסוימים, בדרך כלל צרכים שנבעו לא רק מהפשטה מתמטית גרידא, אלא גם מבעיות שנתקלו בהן אנשים המשתמשים במתמטיקה בשאלות מעשיות בכל פעם, הקבוצה החדשה המוגדרת על-ידי הקבוצה הקודמת, מאפשרת להגדיר מושגים מתמטיים חדשים ופוריים וכן לפתור בעיות שלא נפתרו קודם במאמר זה נסקור בקצרה את ההרחבות השונות ואז נציע גם אנו קבוצה חדשה של יצורים מתמטיים המרחיבה את המספרים הממשיים כפי שיוסבר להלן, יצורים אלו ייקראו 'מספרים חופשיים' מפני שאין להם ערך קבוע מראש והם יכולים להשתנות מבחינה מתמטית, המספר החופשי דומה מאוד למושג המשתנה המקרי, מבחינה מעשית, אנו נתקלים בכל יום במספרים חופשיים מדידות לא מדויקות, תחזיות שונות, תוצאות של משחקים, תכנון כלכלי ועוד

ההרחבות הקלסיות

המספרים הטבעיים

לפי אפלטון, המספרים הטבעיים $N = \{0, 1, 2, 3, \ \}$ מאפיינים את המין האנושי ביחס לשאר בעלי חיים המתמטיקאי הגרמני היהודי קרונקר (Kronecker) היה אומר שאלוקים נתן לנו את המספרים הטבעיים וההמשך הוא מעשה אדם מאז הראו מתמטיקאים (כמו Peano) על-ידי אקסומטיזציה, כי גם המספרים הטבעיים הם יצירת האדם בכל אופן, המספרים הטבעיים מהווים את חומר הגלם הראשוני של המתמטיקה הן תיאורטית, והן יישומית המספר הטבעי ידוע כבר אלפי שנים (פרט למספר אפס שהוגדר מאוחר יותר) והוא מאופיין כתכונה משותפת של כל הקבוצות הסופיות שאפשר לקשור ביניהן על-ידי התאמה חד-חד-ערכית, ועל

המספרים השלמים

הכנסת המספרים הטבעיים השליליים והגדרת המספרים השלמים $Z = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2. \ \}$ באה כתוצאה מצרכים מגוונים מאוד נסתפק בהערה מתמטית המתמטיקאים רצו להפוך את N לחבורה, כלומר להתאים לכל מספר מספר אחד, כך שהסכום שווה לאפס, או במלים פשוטות יותר, הם רצו להיות מסוגלים לפתור כל משוואה מהצורה $x + a = 0$ כאשר a מספר טבעי המספרים השלמים אפשרו להגדיר את פעולת החיסור נוסף על פעולת החיבור והכפל, שהיו כבר קיימות ב-N

המספרים הרציונליים

המספרים הרציונליים Q הוכנסו כדי לפתור משוואות ליניאריות, כלומר משוואות מהצורה $ax + b = 0$ כאשר a ו-b מספרים שלמים ו-a שונה מאפס הם מאפשרים להגדיר את פעולת החילוק מספר רציונלי מוגדר אז כמנה של שני מספרים שלמים (כאשר המכנה שונה מאפס) קבוצת המספרים הרציונליים הייתה ידועה כבר לפני יותר משלושת אלפים שנה, אבל העובדה כי קבוצה זו מהווה שדה היא אחד היסודות של האלגברה המודרנית (בשדה, נוסף על התכונות של חבורה, קיימת פעולת כפל כך שלכל איבר שונה מאפס יש איבר הפוך ביחס לפעולת הכפל) כמו ש-Z היא החבורה הקטנה ביותר המכילה את N, כך הקבוצה Q היא השדה הקטן ביותר המכיל את Z

המספרים הממשיים

נהוג ליחס לאסכולה היוונית את גילוי העובדה, כי יש אורכים שונים שאי-אפשר למדוד אותם על-ידי המספרים הרציונליים הדוגמה הפשוטה והידועה ביותר היא 'מספר' שהעלאתו בריבוע נותנת את המספר הטבעי 2 מתברר, שזהו בדיוק אורך האלכסון של ריבוע בעל צלע השווה לאחד (לפי משפט פיתגורס) וקל מאוד לבדוק כי יצור כזה אינו מספר רציונלי יצורים כאלה הפריעו מאוד לחוש האסתטי של היוונים, ולכן קראו להם מספרים אירציונליים הקבוצה המורכבת מהמספרים הרציונליים והאירציונליים נקראת קבוצת המספרים הממשיים והיא מסומנת ב R ההגדרה הפשוטה ביותר והטבעית ביותר (לטעמי) המציגה גם את בניית המספרים הממשיים, היא כדלהלן מסתכלים על סדרה אין-סופית של מספרים רציונליים כך, שההפרש בין שני איברים עוקבים של הסדרה הולך וקטן לאפס ככול

שמתקדמים בסדרה (סדרה כזאת נקראת סדרת קושי – Cauchy אבל אין בה שום קושי מיוחד!) אם לסדרה כזאת אין גבול שהוא מספר רציונלי, אז נצמיד לה גבול ונקרא לו מספר אירציונלי מתברר, שבנייה זו כשרה למהדרין מבחינה מתמטית והקבוצה R היא עדיין שדה ובעלת תכונות נפלאות היא מהווה את פתח גן העדן המתמטי דוגמה נוספת של מספר ממשי היא המספר π הידוע, המוגדר כיחס בין היקף של כל מעגל לקוטרו למרות שהמספר π היה ידוע מימים ימימה, העובדה כי π הוא מספר אירציונלי הוכח רק ב-1771 (על-ידי Lambert) π הוא הגבול של סדרת המספרים הרציונליים

$$3,\quad 3.1,\quad 3.14,\quad 3.141,\quad 3.14159,\quad 3.141592,\ldots$$

קל מאוד להוכיח שמספר ממשי הוא רציונלי אם ורק אם הפיתוח העשרוני שלו הוא סופי או מחזורי אולם לגבי π, קשה מאוד להוכיח כי הפיתוח אינו מחזורי (הרמב״ם הרגיש בזה, ראה פירושו למשניות, סוף הפרק הראשון, מסכת עירובין) ולמעשה למברט השתמש בשיטה אחרת כדי להוכיח כי π הוא אירציונלי

אפשר לחלק את R לכמה תת-קבוצות

המספרים האלגבריים: המספרים האלגבריים הם המספרים הממשיים שהם פתרון של פולינום (רב-איבר, בעברית נכונה) עם מקדמים שלמים למשל $\sqrt{2}$, שהזכרנו למעלה, וכן כל שורש (מכל סדר) של כל מספר טבעי הוא מספר אלגברי

המספרים הטרנסצנדנטליים: אלו המספרים הממשיים שאינם אלגבריים להפתעתנו הרבה, מתברר שיש מספרים ממשיים כאלה והם אף מהווים את הרוב (רוב מבחינת העצמה, לפי משפט Cantor) למשל, לינדמן (Lindemann) הוכיח ב-1882 כי π הוא מספר טרנסצנדנטלי דוגמה אחרת, לא פחות חשובה, של מספר טרנסצנדנטלי היא המספר e (הוכח על-ידי Hermite ב-1873) הנה הגדרות שונות של המספר e זהו הגבול של סדרת המספרים הרציונליים שאיברה הכללי הוא $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ או של סדרה שאיברה הכללי $2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ מבחינה גיאומטרית, e הוא המספר הממשי כך שהשטח החסום בין ציר ה-x, ההיפרבולה $y=\frac{1}{x}$ והקווים $x=1$ ו- $x=e$ שווה בדיוק לאחד ולסיום הגדרה רביעית של e זהו המספר הממשי היחיד כך שהנגזרת של הפונקציה המעריכית $y=e^x$ שווה לפונקציה עצמה

את קבוצת המספרים הטרנסצנדנטליים אפשר לחלק לקבוצת המספרים הנורמליים וקבוצת המספרים שאינם נורמליים.

המספרים הנורמליים: המספרים הנורמליים הוגדרו על-ידי בורל (Borel) נתבונן בפיתוח העשרוני של מספר ממשי אם כל ספרה מ-0 עד 9 מופיעה בו בשכיחות של $\frac{1}{10}$, כל מחרוזת של שתי ספרות מ-00 עד 99 מופיעה בשכיחות של $\frac{1}{100}$ וכך הלאה במלים אחרות, אם כל מחרוזת של n ספרות מופיעה בשכיחות של $\frac{1}{10^n}$, אז אומרים שהמספר הוא נורמלי

אפשרות אחרת הייתה להתבונן בכל הבסיסים השונים ולא להסתפק בפיתוח המספר לפי בסיס 10 האם קיימים מספרים נורמליים? בורל הוכיח כי כמעט כל מספר הוא נורמלי. כלומר, אם בוחרים מספר (נגיד בקטע [0, 1]) באופן אקראי, אזי בהסתברות אחד זהו מספר נורמלי ולמרות זאת, קשה מאוד להצביע על מספרים נורמליים אפילו לגבי מספרים ממשיים כמו π או e אין יודעים עד היום הזה אם הם נורמליים או לא הדוגמה הראשונה של מספר נורמלי ניתנה על-ידי Champernowne, והוא

$$0.12345678910111213.$$

זהו מספר נורמלי לפי בסיס 10 כאשר רושמים את כל המספרים הטבעיים, הכתובים לפי בסיס 10, לפי סדרם הטבעי

הרחבות נוספות

קבוצת המספרים הממשיים R זכתה להרחבות שונות והחשובה ביותר היא קבוצת המספרים המרוכבים C גם מספר מרוכב אפשר להגדיר בדרכים שונות נסתפק בהגדרה כללית לקבוצת המספרים הממשיים הזו היה חיסרון אחד יש פולינומים עם מקדמים שלמים שאין להם שורשים ב-R, כלומר, לא קיים שום מספר ממשי הפותר אותם למשל, אין פתרון ב-R למשוואה $x^2+1=0$ המספרים המרוכבים באים למלא את החסר ב-C יש פתרון לכל פולינום (אפילו עם מקדמים מרוכבים) ולשמחתנו, הקבוצה C נשארה שדה שלם (כל סדרת קושי מתכנסת) אמנם שילמנו מחיר לא קטן להרחבה זו אי-אפשר להשוות בין שני מספרים מרוכבים, יצאנו מהתחום הטבעי של הגדול והקטן אבל היופי והעושר הטמונים ב-C מצדיקים בהחלט את העסקה. המושג 'קואטרניאון', ובאופן כללי יותר המושג 'וקטורי', באו להכליל את המספר המרוכב

הכללה אחרת לגמרי של R (ושוב לא כאן המקום להאריך בנושא) הוא המושג מספרים לא-סטנדרטיים שהוגדר על-ידי המתמטיקאי היהודי רובינסון (Robinson) [1] יצורים אלו

מובילים אותנו למינוח עדין ביותר של האנליזה המושג 'קטן ביותר' והיפוכו, המושג 'הגדול ביותר' [1]

המספרים החופשיים

אנו מציעים כאן הרחבה של המושג 'המספר הממשי' (בעיקרון כל מה שנאמר כאן אפשר ליישום על המספרים המרוכבים, אבל לשם פשטות, נסתפק בהרחבת העולם הממשי)

לפני שנפרוש את ההגדרה המתמטית של המספר החופשי, נביא מספר דוגמאות

דוגמאות

1 נתחיל במדידה ברצוננו למדוד משהו (גובה, משקל, אורך, טמפרטורה, וכו') אם נמדוד אותו משהו מספר פעמים, אז בעולם אידיאלי נקבל תמיד אותה התוצאה אולם באופן מעשי, נקבל תמיד תוצאה קצת שונה זאת נקודת מבט של המדען ובפרט של הסטטיסטיקאי הוא עושה הבחנה ברורה וחדה בין מספר קבוע שמכיל מעט מידע, לבין 'נתון סטטיסטי', העשוי להשתנות ומכיל מידע רב הסיבות לכך שמקבלים תוצאות שונות בכל מדידה הן רבות ומגוונות (שגיאות מדידה, שגיאות העברה, שינוי נתונים התחלתיים וכו') ואפשר לכתוב

נתון נצפה = ערך מדויק + שגיאה

הנתון הנצפה, או ערך המדידה, שהתקבל הוא דוגמה של מספר חופשי מספר שאינו קבוע באופן מוחלט (כאשר השגיאה היא אפס, המספר החופשי מצטמצם למספר ממשי)

2 תוצאה של זריקת קוביה גם כאן, בעיקרון, התוצאה היא מספר טבעי 1, 2, או 6, אבל מספר זה אינו קבוע מראש הוא יכול להשתנות, וזאת דוגמה נוספת של מספר חופשי

3 מספר ההרוגים בשבוע בתאונות דרכים בישראל זהו מספר לא ידוע מראש, המשתנה משבוע לשבוע, שחשוב מאוד להעריכו לקביעת מדיניותו של המינהל לבטיחות בדרכים היום ממוצע ההרוגים הוא בסביבות 12 לשבוע, וכמובן, שכולנו מקווים שמספר זה ירד במספר חופשי נתקלים שוב כאשר אפשר לכתוב

מספר ההרוגים = 12 + שינויים שונים

מתוך דוגמאות אלו (ועוד הרבה אחרות), המפתח להבנת המספר החופשי הוא המשוואה:

מספר חופשי = מספר ממשי + משתנה מקרי

המספרים החופשיים שאנו מגדירים הם בעלי קשר עם תורת ההסתברות ויש להם זיקה חזקה לסטטיסטיקה (תורת עיבוד נתונים מספריים)

האקראיות

בראש ובראשונה יש להסביר מהו משתנה מקרי ומהו המושג 'אקראיות' לא נגדיר פה את המושג 'המשתנה המקרי' זהו מושג מתמטי והקורא המעוניין בהגדרה מדויקת יכול לפנות לספרות המתמטית המתאימה (בעברית, הספר היחיד עם ניתוח מתמטי ע' מרצבך וא' שמרון תורת ההסתברות הוצאת אקדמון, ירושלים תשנ"ה)

לגבי המושג האקראיות, ההגדרות אינן פשוטות, ויש להן השלכות בתחום הפילוסופיה וכן בתחום התיאולוגיה אולם המדע רואה היום אקראיות בכל תופעות הטבע ואין מודלים במדעי הטבע ללא הכנסת תהו ובהו (הנקרא גם כאוס או אנדרלמוסיה[2]) לא סביר להניח שזוהי אפנה חולפת נראה, שבאמת העולם שאנו חיים בו כה מורכב עד כי יש הרבה תופעות שלא ניתנות לחיזוי (גם באופן תיאורטי) ואין מנוס מלהוסיף מקדמים אקראיים במשוואות הדיפרנציאליות הבאות לתאר מצב מסוים

מהי סדרת ספרות אקראיות? גרדנר (Gardner, 1977) עונה שכנראה אין דרך מתמטית אוביקטיבית להגדיר סדרה אקראית קנות (Knuth, 1981) מציע מספר הגדרות שונות, כאשר אחת מהן היא הפיתוח (העשרוני, למשל) של מספר נורמלי כלומר, המספר הנורמלי הוא האב-טיפוס של האקראיות, ולכן קשה מאוד לבנות מספר נורמלי!

היום יש הרבה שיטות ליצירת מספרים אקראיים, הנקראים גם מספרים פסידו-אקראיים אלגוריתמים אלו משתמשים בפונקציות מתמטיות, ויוצרים מספרים הדומים למספרים אקראיים על-ידי מספר רב של איטרציות שיטות הדמיה אלו

1 האנליסה הלא-סטנדרטית של רובינסון היא נושא מאמרו של ויקטור הנריק, "להורות חשבון אינפיניטסימלי בעזרת אינפיניטסימלים", שהופיע בשני חלקים בעל"ה 4, 5

2 ראה יששכר אונא, חוקי אנדרלמוסיה, עלי"ה 8

אינן אקראיות באמת (אלא אם כן, מוסיפים "זרעי" חיצוני לאלגוריתם) והבעיה המרכזית שלהן היא שבסופו של דבר הן יוצרות מבנים קבועים שאפשר לגלות אותם

לעומת שיטות הדמיה קלסיות, יש סדרת מספרים שעד היום הזה מסרבת לגלות מבנה קבוע זוהי סדרת הספרות בפיתוח של π כפי שהסברנו קודם ידועות 6 מיליארד הספרות הראשונות של π (הומצא על-ידי היפני Kanada, בספטמבר 1995) ובינתיים כל המבחנים הסטטיסטיים שהופעלו על הסדרה הארוכה הזו האמורים לגלות מבנה מיוחד או חוקיות מסוימת נכשלו, וכנראה עוד ייכשלו אבל, כאמור, אין אנו יודעים אם π מספר נורמלי או לא

הגדרת המספרים החופשיים

תהי f פונקציה

$$f\ [0,\infty)\to[0,1]$$

f תיקרא פונקציית קביעות אם היא מקיימת את התכונות הבאות

א f מונוטונית לא יורדת

$$s<t\Rightarrow f(s)\le f(t)$$

ב f(t) שואפת לאחד כאשר t שואף לאין-סוף

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=1$$

ג f(t) רציפה מימין לכל t

$$\lim_{n\to\infty}f\left(t+\frac{1}{n}\right)=f(t)$$

עתה מספר חופשי X מוגדר להיות זוג

$$X=(EX,f_X)$$

כאשר EX הוא מספר ממשי ו- f_X פונקציית קביעות כלשהי אם $f_X(t)=1$ לכל t (פונקציה קבועה), אזי המספר החופשי X מצטמצם למספר ממשי EX במלים אחרות, נזהה את המספר הממשי a עם הזוג (a, f) כאשר f היא הפונקציה השווה זהותית ל-1

בדרך כלל, הפונקציה f_X מודדת את מידת הקביעות של המספר החופשי X או את מידת ההתרחקות של X מהמספר הממשי EX ככל ש- f_X קרובה יותר ל-1, המספר החופשי קרוב יותר למספר ממשי

לפני שנביא דוגמאות נזכיר תכונה של המספר החופשי (שנוכיח בהמשך) המבטאה היטב את "החופשיות" של מספר זה

יהי $X=(EX,f_X)$

מספר חופשי ונסמן $\alpha_X=\inf\{t:f_X(t)=1\}$

אזי $EX-\alpha_X\le X\le EX+\alpha_X$

(יחס הסדר בין מספרים חופשיים יוגדר בהמשך) במלים אחרות, החופשיות של X מצומצמת לרווח סביב EX בעל אורך $2\alpha_X$ וכמובן, $\alpha_X=0\Leftrightarrow X\in R$

נעבור עתה למספר דוגמאות

1 זורקים מטבע שעל פניו כתוב 1 ועל גביו כתוב 0 התוצאה של הזריקה הוא המספר החופשי $X=\left(\frac{1}{2},I_{\left[\frac{1}{2},\infty\right)}(t)\right)$

כאשר I_A היא הפונקציה המציינת של הקבוצה A

$$I_A(t)=\begin{cases}1 & t\in A\\ 0 & t\notin A\end{cases}$$

אם ידוע כי המטבע מוטה כך שהסיכוי שיפול על פניו הוא מספר $p\ (\frac{1}{2}<p<1)$, אזי המספר החופשי שהוא תוצאת הזריקה הוא הזוג

$$X=(p,\ pI_{[1-p,\ p)}(t)+I_{[p,\infty)}(t))$$

2 המספר החופשי שהוא תוצאה של זריקת קובייה סימטרית הוא

$$X=\left(\frac{7}{2},\frac{t}{3}I_{\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)}(t)+I_{\left[\frac{5}{2},\infty\right)}(t)\right)$$

בהמשך נסביר איך קיבלנו דווקא פונקציה זו בינתיים נשים לב, כי כל הפונקציות מקיימות את שלוש התכונות של פונקציות קביעות כמו כן, בדוגמה האחרונה, $\alpha_X=\frac{5}{2}$,

ולכן מתקבל כמובן

$$1=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\le X\le\frac{7}{2}+\frac{5}{2}=6$$

נעבור עתה לדוגמאות יותר מעניינות

3 מספר הרוגים בשבוע בתאונות דרכים בכבישי ישראל נצא מההנחה שהמספר הממוצע של הרוגים הוא 12, ומשיקול מתמטי משתנה זה עוקב אחרי התפלגות פואסון (Poisson, זהו גבול של התפלגויות בינומיות עם הסתברויות נדירות) ולכן המספר החופשי המתקבל הוא

$$X = \left(12, \sum_{i=(12-t)}^{[12+t]} e^{-12} \frac{(12)^i}{i!}\right)$$

כאשר

$$(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \quad \text{אם} \\ t & t \in N \quad \text{אם} \\ [t]+1 & t \notin N \quad \text{אם} \end{cases}$$

($[t]$ הוא החלק השלם של t)

נשים לב כי בדוגמה זו, $\alpha_X = \infty$ (לצערנו הרב), אבל לא קשה להוכיח כי

$$f_X(t) \ge 1 - \frac{12}{t^2}$$

4 נסיים בדוגמה הראשונה שהזכרנו בסעיף הקודם

יהי X תוצאה של מדידה כאשר ידוע שהערך האמתי והמדויק של המדידה הוא המספר הממשי a. כאמור, למספר החופשי X המתאים לתוצאות המדידה יכולות להיות סטיות מימין ומשמאל ל-a ופונקציית הקביעות יכולה להיות הפונקציה הבאה

$$f_X(t) = \int_{a-t}^{a+t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(u-a)^2}{2}} du$$

כמו כן, $EX = a$

אפשר לעדן את הפונקציה $f_X(t)$ על-ידי פרמטר σ המודד את גודל סטיית התוצאה ביחס ל-a. פונקציית הקביעות היא

$$f_X(t) = \int_{a-t}^{a+t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(u-a)^2}{2\sigma^2}} du$$

מתקיים תמיד $f_X(t) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{t^2}$

כלומר אם, למשל, $\sigma = \frac{1}{10}$ ו-$t = 1$, אזי הסיכוי שהתוצאה המתקבלת היא בין $a-1$ ל-$a+1$ הוא גדול יותר מ-

$$1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

לסיכום, קיבלנו שמספר חופשי X שווה למספר ממשי EX ועוד שגיאה מסוימת או משתנה מסוים המתבטא על-ידי פונקציית קביעות

תכונות ראשונות של המספרים החופשיים

1 אפשר להגדיר את פעולות החשבון הרגילות בין המספרים החופשיים

2 יהי $X = (a, f_X(t))$ מספר חופשי אזי קיים מספר חופשי $Y = (0, f_Y(t))$ כך ש-$X = a + Y$

3 נגדיר סדר בין מספרים חופשיים יהיו $X = (a, f)$ ו-$Y = (b, g)$ שני מספרים חופשיים. נאמר ש-X קטן או שווה ל-Y ונכתוב כרגיל $X \le Y$ אם $a < b$ או אם $a = b$ ו-$f(t) \le g(t)$ לכל $0 \le t$

לא קשה לבדוק כי יחס זה הוא אכן יחס סדר (כלומר, בעל תכונות הרפלקסיביות, האנטי-סימטריות והטרנזיטיביות)

עתה לא קשה להוכיח את הטענה שהבאנו לעיל

$$EX - \alpha_X \le X \le EX + \alpha_X$$

ואמנם עבור $\alpha_X > 0$, האי-שוויונים ברורים, וכאשר $\alpha_X = 0$. פירושו $f_X(t) = 1$ לכל t, ולכן האי-שוויונים עדיין מתקיימים

קשר עם תורת ההסתברות

מספר חופשי אינו אלא סוג מסוים של מה שנקרא משתנה מקרי (או משתנה אקראי)

נסביר כאן בקצרה ובפשטות מהו משתנה מקרי (בהתאם לספר "תורת ההסתברות" מאת ע' מרצבך וא' שמרון), והקשר שלו עם מספר חופשי. נניח שנתונה קבוצה שנהוג לסמנה Ω ולקרוא לה המרחב המדגם. בתוך Ω, בוחרים בשבט F כלומר, באוסף של תת-קבוצות של Ω המקיים שלוש תכונות

1 $\Omega \in F$

2 אם $A \in F$ אזי גם $A^c \in F$ (A^c המשלים של A)

3 אם $A_1, A_2, \ldots \in F$ אזי גם $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

עתה נניח שקיימת מידת הסתברות P המוגדרת על הזוג (Ω, F) כלומר, פונקציה $P: F \to [0,1]$ כך ש-$P(\Omega) = 1$ ואם $\{A_n\}$ סדרה זרה של איברי F,

אזי $$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

השלשה (Ω, F, P) נקראת מרחב הסתברות

עתה משתנה מקרי זהו פונקציה $X: \Omega \to R$ כך שלכל מספר ממשי α, $\{\omega : X(\omega) \le \alpha\} \in F$ ולכן לכל משתנה מקרי, אפשר להגדיר את פונקציית ההתפלגות של X המסומנת F_X והמוגדרת על-ידי

$$F_X(t) = P\{\omega : X(\omega) \le t\}$$

קל להוכיח כי כל פונקציית התפלגות F מקיימת את התכונות הבאות:

1 $\lim_{t\to-\infty} F(t)=0 \quad , \quad \lim_{t\to+\infty} F(t)=1$

2 F מונוטונית לא יורדת $s<t \Rightarrow F(s)\le F(t)$

מתברר שגם ההיפך נכון המתמטיקאי קולמוגורוב (Kolmogorov) הוכיח שכל פונקציה המקיימת את התכונות 1 2 ו-3 היא פונקציית ההתפלגות של משתנה מקרי מסוים כלומר, אם נתונה פונקציה F עם התכונות האלה, אזי קיים משתנה מקרי X כך ש- $F=F_X$

יהי עתה X משתנה מקרי ו- F_X פונקציית ההתפלגות שלו ונתבונן בביטוי

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\,dF_X(t)$$

ביטוי כזה נקרא אינטגרל סטילטס (Stieltjes) של t ביחס ל- $F_X(t)$, על שם המתמטיקאי סטילטס שהגדיר אינטגרל כזה לפני כמאה שנה אין מה לפחד מאינטגרל כזה הוא מהווה הכללה פשוטה ושימושית מאוד לאינטגרל הרגיל המוכר מבית-הספר, ואנו מפנים את הקורא לספר 'תורת ההסתברות' כדי להראות את ההגדרה ותכונות בסיסיות של האינטגרל הזה נעיר רק שאם הפונקציה F_X גזירה אזי הביטוי הנ"ל שווה ל-

$$\int_{-\infty}^{\infty} tF_X^{\prime}(t)dt$$

בכל אופן, אם האינטגרל קיים וסופי אז הוא נקרא **התוחלת של X** והוא מסומן ב-EX אינטואיטיבית, התוחלת של X הוא הממוצע של X, הוא ערך אמצעי בין כל הערכים של הטווח של X

3 F רציפה מימין לכל t $\lim_{n\to\infty} F\left(t+\frac{1}{n}\right)=F(t)$

נחזור כעת למספרים החופשיים ונראה כי כל משתנה מקרי שיש לו תוחלת הוא בעצם מספר חופשי (ההיפך לא תמיד נכון) ואמנם, יהי X משתנה מקרי כזה ונגדיר את הפונקציה

$$f_X(t)=F_X(t+EX)-\lim_{n\to\infty}F_X\left((EX-t)-\frac{1}{n}\right)$$

נשים לב, כי לפונקציה f_X יש כל התכונות של פונקציית קביעות

כמו כן, מתקבל באופן מידי כי

$$f_X(t)=P\{\omega \mid |X(\omega)-EX|\le t\}$$

מתוך נוסחה זו מבינים היטב את משמעות פוקציית קביעות פונקציה זו מודדת עד כמה המספר החופשי הוא אכן חופשי - עד כמה הוא מרוחק מהמספר הממשי EX

יתרה מזו, אם $EX^2<\infty$ אז אי-שוויון צ'בישב (Chebyshev) אומר

$$f_X(t)\ge 1-\frac{E(X-EX)^2}{t^2}$$

המונה (הנקרא **השונות** של X) מודד גם כן עד כמה המשתנה המקרי X מרוחק מהתוחלת שלו

לסיכום, מספר חופשי הוא מצד אחד סוג חדש של מספר שנתקלים בו יום-יום, ומצד שני, סוג של משתנה מקרי שבו עוסק תחום מיוחד של מתמטיקה המכונה **תורת ההסתברות**.