המושג 'פונקציה' בטריגונומטריה אצל תלמידי כיתות י"א ו-י"ב – השוואה בין פונקציות אלגבריות ופונקציות טריגונומטריות[1]

גילי קלונובר
תיכון 'היובל', כפר סבא

הקדמה

בכל שנות עבודתי כמורה שמתי לב שיהכניסהי של תלמידים לטריגונומטריה אינה קלה מדובר בתלמידי הרמות הגבוהות במתמטיקה 4 ו- 5 י"ל, בתחילת כיתה י"א ההרגשה היא שהתלמידים אינם רואים בפונקציות הטריגונומטריות **עוד** פונקציות הנוספות למאגר הפונקציות שכבר יש להם, אלא משהו חדש, אחר, קשה יותר נדמה לי שגם אלה מהם המצליחים במבחנים בטריגונומטריה עובדים באופן טכני למדיי, ואינם מצליחים להגיע להבנה עמוקה של הפונקציות הטריגונומטריות

רציתי לבדוק תחושה זו ולנסות להאיר את מקור הקושי של התלמידים בלימוד הטריגונומטריה

לשם כך ערכתי מחקר אשר מטרתו הייתה לבחון את הבנת המושג פונקציה בהתייחסו לפונקציות טריגונומטריות לעומת פונקציות אלגבריות, בשכבות גיל שונות (י"א ו-י"ב), וברמות לימוד שונות (4 י"ל ו-5 י"ל): וכן לגלות את המכשולים האינטואיטיביים העיקריים אשר עלולים להקשות על תלמידים בפתרון בעיות בפונקציות טריגונומטריות

סקירת ספרות

המכתם הסיני 'תמונה שווה אלף מילים' משקפת יפה את התפקידים השונים, לעתים המשלימים, של שני סוגי הסגנונות הקוגניטיביים המוכרים לנו האחד הוא חזותי-מרחבי והוליסטי מטבעו, השני הוא מילולי-ליניארי או סדרתי מטבעו כיום מוסכם על-ידי הפסיכולוגים ועל-ידי החוקרים העוסקים ביצירתיות כי חשיבה יצירתית היא יעילה ביותר כאשר שני סגנונות הפעולה האלה מתפקדים בתיאום

החשיבה המתמטית אינה יוצאת דופן מכלל זה, ובתוכה - המושג פונקציה

המושג פונקציה הוא אחד הרעיונות הבסיסיים ביותר במתמטיקה המודרנית הוא מהווה לבנה בסיסית ורבת כוח בבניין המתמטיקה הפורמלית, ומתברר שזהו אחד מהמושגים הקשים ביותר לתפישה בלימוד המתמטיקה בבית הספר ייתכן שאחת הסיבות לכך היא המורכבות של המושג פונקציה ומושגי המשנה הרבים הקשורים אליו

Tall ו- Vinner (1981) עושים הפרדה בין האופן שהאינדיבידואל חושב על מושגים לבין הגדרתם הפורמלית

המושגים דימוי המושג והגדרת המושג הוצגו לראשונה על-ידי וינר והרשקוביץ (1980) ומאוחר יותר הוגדרו על-ידי טול ווינר (1981) באופן הבא

ה- **Concept Image**, **דימוי המושג**, הוא המבנה הקוגניטיבי השלם הקשור במושג, הכולל בתוכו את כל התמונות המנטליות, התכונות והתהליכים הקשורים במושג דימוי המושג נבנה במשך השנים, דרך חוויות מכל הסוגים וניסיון אישי, ומשתנה כתוצאה מגירויים שונים שהפרט נחשף אליהם וכתוצאה מתהליך התבגרותו השינוי אינו חייב להיות רציף והגיוני מכאן ברור כי דימוי המושג עשוי להשתנות מאדם לאדם דימוי המושג יכול גם להשתנות אצל אותו אדם במצבים שונים

הגדרת המושג, על-פי Tall ו- Vinner, היא התיאור המילולי של המושג שהתלמיד בונה הגדרת המושג יכולה להיות אישית, (personal concept definition), או להיות הגדרה פורמלית, שהתלמיד לומד (formal concept definition) מכאן שהגדרת המושג יכולה להתפתח מתוך הוראה מכוונת הגדרת המושג הפורמלית יכולה להילמד על-ידי שינון, או בהבנה מלאה בין אם ההגדרה פורמלית או עצמית

המחזיק בה יכול לשנותה מזמן לזמן, וכך הוא יכול לעבור מהגדרה פורמלית להגדרה עצמית מאחר שהגדרת המושג יכולה להילמד על-ידי שינון, ההחזקה בהגדרת המושג איננה מעידה בהכרח על הבנתו לעתים ההגדרה מובאת בפני התלמיד לפני שיש לו איזשהו תיאור של המושג המוגדר בהמשך תהליך ההוראה יש לדאוג למלא חסר זה וליצור את דימוי המושג הנכון והשלם

החל משנות השמונים נפוצה הדעה כי להגדרת המושג תפקיד שולי בלבד דימוי המושג הלך ותפש מקום יותר ויותר נכבד במאמרים האחרונים, עד כי Sfard (1991, עמ' 3) ו-Vinner (1991, עמ' 69) מגדירים את דימוי המושג כתפישת המושג

[1] המאמר מתבסס על עבודת M A אשר נכתבה בהנחייתו של פרופסור אפרים פישביין מהמגמה להוראת המדעים בחוג לחינוך באוניברסיטת תל-אביב

וכהבנתו לרכוש מושג פירושו ליצור את הדימוי שלו ברגע שדימוי המושג נוצר, הגדרתו עבור הפרט נעשית בלתי מהותית ולא חשובה לרוב היא נשארת בלתי פעילה או אף נשכחת בעת ההתמודדות עם משמעות המושג

תלמידים תופשים את המושג פונקציה דרך כמה דוגמאות אופייניות

טבעי ביותר להתבונן בהיבטים שונים של נושאים מתמטיים, ופונקציות בפרט, בדרך גרפית אבל מסתבר שלתלמידים ההצגה הגרפית של פונקציה איננה חלק מדימוי המושג פונקציה נראה שהם נוטים לפתרון בעיות בדרך אנליטית ולא בדרך חזותית

וינר ודרייפוס (1989) טוענים כי למרות שרוב התלמידים יודעים לסרטט את הגרפים של פונקציות פשוטות, הם מתייחסים אל גרף הפונקציה כמשהו **חיצוני** לפונקציה עצמה ולא כחלק מהמהות שלה

תלמידים נוטים לגשת לפתרון בעיה בדרך אנליטית, מבלי להתייחס לייצוג החזותי של הנתונים,
(Selden, Mason and Selden 1989)

Thomas(1988), Rival (1987), Blackett (1987), וכמו כן Tall (1986a) (אצל אייזנברג) הראו שתלמידים יכולים לפתח הבנה עמוקה של מושגים ברמה גבוהה הקשורים לפונקציות על-ידי שימוש בכלים ויזואליים יותר מכך הם הראו שכאשר הדגש הוא על ההתפתחות הויזואלית יש 'שמירה', 'החזקה' חזקה יותר בהם מאשר כאשר הדגש הוא על פיתוחם בדרך אנליטית

פישביין (1990) סובר כי לייצוג החזותי תפקיד מרכזי בתיאוריה של המתמטיקה ובהשלכות הדידקטיות שלה הוא טוען כי החשיבה שלנו איננה יכולה לפעול ביעילות כל עוד היא נשארת ברובד המופשט הטהור באמצעות סימבולים אין אנו יכולים לפעול במיומנות, בצורה יעילה ובונה, מבלי להוסיף לסימבולים איזשהו ייצוג חזותי בעל משמעות אינטואיטיבית עבורנו

על-פי פישביין (1987) אדם נוטה לחשוב באמצעות תמונות החשיבה נוטה להיות חזותית, פיגורטיבית אנו נוטים לתרגם כל אינפורמציה לצורה ויזואלית וזה מקל על קליטת האינפורמציה והבנתה ומה שאין אנו יכולים לדמיין ויזואלית, קשה לנו להבין מנטלית

דרייפוס (1991) סובר כי כדי להצליח במתמטיקה רצוי שלתלמיד יהיה ייצוג מנטלי עשיר של מושגים ייצוג הוא עשיר אם הוא מכיל היבטים רבים של אותו מושג, הקשורים זה בזה ייצוג הוא דל אם הוא מכיל מעט אלמנטים, דבר הגורם לחוסר גמישות בפתרון בעיות לגבי פונקציות הפרט יצור ייצוג מנטלי יחיד או מספר ייצוגים לאותו מושג מתמטי על בסיס ההצגות השונות שהובאו בפניו בכיתה מספר ייצוגים מנטליים לאותו מושג עשויים להשלים זה את זה ולהשתלב לייצוג יחיד ושלם של המושג כתוצאה מתהליך זה, לתלמיד יש ייצוג רב קשרים (multiple-linked), וזה מאפשר לו להשתמש באחדים מהם בו-זמנית ולעבור מייצוג אחד למשנהו ביעילות, בהתאם לשלב בו הוא נמצא בפתרון הבעיה הניצבת לפניו

דרייפוס (1991) רואה את תהליכי הלמידה כמורכבים מארבעה שלבים

1 שימוש בייצוג יחיד (אם כי בלימוד המושג פונקציה תלמידים פוגשים כבר בהתחלה במספר ייצוגים דיאגרמת חצים, טבלה, ביטוי אלגברי, מכונת קלט פלט, קבוצת זוגות סדורים, גרף וכו')
2 שימוש במספר ייצוגים של המושג המתמטי **במקביל**
3 פיתוח הקשרים בין הייצוגים המקבילים
4 אינטגרציה של הייצוגים ומעבר גמיש ביניהם

התהליך הקשה של מעבר למושג המופשט תלוי בקשרים הנוצרים בין הייצוגים השונים קשרים אלו נבנים בשלב השלישי של תהליך הלמידה קשרים חזקים מאפשרים לתלמיד לעבור מייצוג לייצוג, דבר המבהיר לו את המושג הנלמד ומאפשר את הסינתזה וההפשטה שעליו לעשות במעבר מהייצוגים השונים, הקשרים ביניהם, תכונותיהם, אל המושג המופשט עצמו כאשר תהליך זה נשלם, התלמיד יצר לעצמו את הרעיון המופשט של המושג הנלמד הפרט 'רכש' (owns) לעצמו את המושג

השערות המחקר

בהתבסס על ניסיוני בהוראה שיערתי כי התלמידים מבינים פחות טוב את המושג פונקציה בהתייחסו לפונקציות טריגונומטריות מאשר בהתייחסו לפונקציות אלגבריות שיערתי כי תלמידי 5 יחידות לימוד (י"ל) מבינים את המושג פונקציה טוב יותר מתלמידי 4 י"ל, הן בהתייחסו לפונקציות טריגונומטריות והן בהתייחסו לפונקציות אלגבריות; וכי תלמידי י"ב מבינים את המושג פונקציה טוב יותר מתלמידי י"א, הן בהתייחסו לפונקציות טריגונומטריות והן בהתייחסו לפונקציות אלגבריות

מתודולוגיה

הבנת התלמידים את המושג פונקציה נבדקה דרך הבנתם את התכונות הבאות של פונקציה תחום הגדרה, קבוצת התמונות, מציאת מקורות לתמונות נתונות, היות הפונקציה זוגית, אי-זוגית, לא זוגית ולא אי-זוגית, תחום עלייה, התחום בו הפונקציה חיובית והתרת אי-שוויון פשוט
לצורך בדיקת השערות המחקר חובר שאלון עם שאלות על התכונות הנ"ל, ובחלק מהשאלות היה על התלמיד לענות על אותה שאלה לגבי פונקציה אלגברית ולגבי פונקציה טריגונומטרית

את השאלון העברתי בחמישה בתי ספר תיכוניים עיוניים במרכז הארץ

הנבדקים היו 165 תלמידי כיתות י״א ו-י״ב ברמות 4 ו-5 י״ל במתמטיקה

בכל הכיתות אשר השתתפו במחקר הוצגו הפונקציות הטריגונומטריות כפונקציות (שהארגומנט שלהן יכול להיות כלשהו, ולאו דווקא לייצג זווית), ולא כיחסים גיאומטריים

הפונקציות שהופיעו בשאלונים הן

פונקציות אלגבריות

$$f(x) = 2x + 4$$

$$g(x) = 3x^2$$

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

פונקציות טריגונומטריות

$$k(x) = \sin 2x$$

$$r(x) = \cos x + 1$$

$$t(x) = \tan \frac{x}{3}$$

את הבנת המושג פונקציה בהתייחס לפונקציות טריגונומטריות לעומת פונקציות אלגבריות, בדקתי על-ידי השוואת אחוז התשובות הנכונות לגבי פונקציות טריגונומטריות ואחוז התשובות הנכונות לגבי פונקציות אלגבריות בשאלות בעלות תוכן זהה, דהיינו אותה שאלה המתייחסת פעם לפונקציה טריגונומטרית ופעם לפונקציה אלגברית

ממצאים

תוצאות המחקר איששו את השערות המחקר פרט להשערה בדבר השפעת הגיל על הבנת המושג פונקציה נמצא כי השפעת הגיל תלויה ברמת הלימוד במתמטיקה ברמה של 4 י״ל-תלמידי י״ב אכן טובים יותר מתלמידי י״א, ואילו ברמה של 5 י״ל אין הבדל משמעותי בין תלמידי י״ב לתלמידי י״א

כמו כן תוצאות המחקר אפשרו לי לגלות את הטעויות שעושים תלמידים בפתרון בעיות בפונקציות טריגונומטריות, ולנתח אותם

אביא בפניכם חלק מן הממצאים שקיבלתי

פתרון משוואות פשוטות (מציאת מקורות לתמונות)

להלן התוצאות שקיבלתי כתשובה לשאלות שבדקו את יכולת התלמידים לפתור משוואות (אלגבריות וטריגונומטריות) דהיינו למצוא מקורות לתמונות נתונות

השאלות היו

* עבור כל אחת מהפונקציות שלהלן מצא את המקורות של התמונות הבאות

f(x)=10 x= k(x)=0 7845 x=

g(x)=75 x= r(x)+1=1 5 x=

h(x)= -10 x= t(x)= 2 x=

* פתור את המשוואות הבאות

f(x)+1=5 x= 2k(x)+3=9 x=

2g(x)+3=219 x= 5+r(x)=7 x=

$\frac{1}{h(x)}$ -2=10 x= $\frac{1}{t(x)}$ -2=10 x=

והרי התוצאות

התפלגות התשובות של פתרון משוואות פשוטות ומציאת מקורות לתמונות בפונקציות אלגבריות ובפונקציות טריגונומטריות (באחוזים)

		נכון	שגוי	לא ענו
י״ב 5 י״ל	פונקציות אלגבריות	86 5	13 5	0
	פוני טריגונומטריות	30 2	64 3	5 5
4 י״ל	פונקציות אלגבריות	66 7	32 3	1 0
	פוני טריגונומטריות	22 9	70 8	6 3
סה״כ י״ב	פונקציות אלגבריות	77·9	21 6	0 5
	פוני טריגונומטריות	27 0	67 1	5 9
י״א 5 י״ל	פונקציות אלגבריות	77 8	20 8	1 4
	פוני טריגונומטריות	31 3	56 9	11 8
4 י״ל	פונקציות אלגבריות	60 5	30 2	9 3
	פוני טריגונומטריות	11 6	58 2	30 2
סה״כ י״א	פונקציות אלגבריות	69 6	25 3	5 1
	פוני טריגונומטריות	22 0	57 5	20 5
סה״כ 4 י״ל	פונקציות אלגבריות	63 1	31 1	5 8
	פוני טריגונומטריות	16 4	63 6	20 0
סה״כ 5 י״ל	פונקציות אלגבריות	81 9	17 4	0 7
	פוני טריגונומטריות	30 7	60 4	8 9

בכל ארבע הקבוצות התלמידים שולטים טוב יותר בפונקציות אלגבריות מאשר בפונקציות טריגונומטריות (פער של כ-56% ב-י״ב 5 י״ל, כ-45% ב-י״ב 4 י״ל וב-י״א 5 י״ל וכ-50% בי״א 4 י״ל)

תלמידי 5 י"ל שולטים טוב יותר מתלמידי 4 י"ל, הן בפונקציות אלגבריות והן בפונקציות טריגונומטריות

תלמידי י"ב שולטים טוב יותר מתלמידי י"א הן בפונקציות אלגבריות והן בפונקציות טריגונומטריות, אך הפער אינו גדול (כ-8% בפונקציות אלגבריות ו 5% בפונקציות טריגונומטריות)

השגיאות האופייניות אשר נמצאו אצל תלמידים בפתרון משוואות הן:

1. תלמידים מבלבלים בין מקור - x, לבין תמונה - f(x)
2. שגיאות הקשורות במחזור הפונקציה מוצאים פתרון אחד ומתעלמים ממחזוריות הפונקציה, רושמים מחזור שגוי, מבצעים פעולות אלגבריות רק על הארגומנט ולא גם על המחזור
3. שגיאות הקשורות במספר הפתרונות מסתפקים במציאת פתרון אחד גם אם במחזור אחד יש יותר מפתרון אחד

תחום עלייה של פונקציה

להלן התוצאות שקיבלתי כתשובה לשאלה שבדקה את יכולת התלמידים למצוא תחום עלייה של פונקציה (אלגברית וטריגונומטרית)

השאלה הייתה

א מצא את תחום העלייה של הפונקציה $g(x)=3x^2$

ב מצא את תחום העלייה של הפונקציה $r(x)=\cos x+1$

והרי התוצאות

התפלגות התשובות לגבי תחום עלייה של פונקציה אלגברית ושל פונקציה טריגונומטרית (באחוזים)

		נכון	שגוי	לא ענו
י"ב 5 י"ל	פונקציה אלגברית	94 1	0	5 9
	פוני טריגונומטרית	17 6	70 6	11 8
4 י"ל	פונקציה אלגברית	58 8	11 8	29 4
	פוני טריגונומטרית	5 9	58 8	35 3
סה"כ י"ב	פונקציה אלגברית	76 5	5 9	17 6
	פוני טריגונומטרית	11 8	64 7	23 5

י"א 5 י"ל	פונקציה אלגברית	76	12	12
	פוני טריגונומטרית	16	52	32
4 י"ל	פונקציה אלגברית	10 5	26 3	63 2
	פוני טריגונומטרית	0	15 8	84 2
סה"כ י"א	פונקציה אלגברית	47 7	18 2	34 1
	פוני טריגונומטרית	9 1	36 4	54 5

סה"כ 5 י"ל	פונקציה אלגברית	83 3	7 2	9 5
	פוני טריגונומטרית	16 7	59 5	23 8

סה"כ 4 י"ל	פונקציה אלגברית	33 3	19 5	47 2
	פוני טריגונומטרית	2 8	36 1	61 1

בכל ארבע הקבוצות התלמידים שולטים טוב יותר בפונקציה אלגברית מאשר בפונקציה טריגונומטרית (פער של כ-75% ב-י"ב 5 י"ל, 60% ב- י"א 5 י"ל, כ-53% ב -י"ב 4 י"ל וכ-10% ב-י"א 4 י"ל)

תלמידי 5 י"ל שולטים טוב יותר מתלמידי 4 י"ל, הן בפונקציה אלגברית והן בפונקציה טריגונומטרית בפונקציה טריגונומטרית הפער קטן יותר (כ -14% לעומת כ-50%)

תלמידי י"ב שולטים **בפונקציה אלגברית** טוב יותר מתלמידי י"א (פער של כ-30%), ואילו **בפונקציה טריגונומטרית: אין הבדל** בין תלמידי י"א לתלמידי י"ב (פחות מ-3%)

אחוז התשובות הנכונות של התלמידים בשתי הקבוצות נמוך ביותר (כ-10%)

יש להניח כי הסיבה לכך היא העובדה שהתלמידים **אינם נעזרים** בגרף הפונקציה בבואם לענות על שאלה מסוג השאלה הנדונה

ואכן, מהתשובות לשאלה מס' 12 (ראה להלן) מתברר כי לא יותר מ-9% מתלמידי 4 י"ל, ולא יותר מ-29% מתלמידי 5 י"ל נעזרים בגרף הפונקציה, בבואם לענות על שאלות בפונקציות טריגונומטריות

סיכום התוצאות

נמצא כי אחוז התשובות הנכונות לגבי פונקציות טריגונומטריות **נמוך** מאחוז התשובות הנכונות לגבי פונקציות אלגבריות

מתוך השאלות לגבי פונקציות אלגבריות, התלמידים ענו נכון על כ-66% מהשאלות

ואילו מתוך השאלות לגבי פונקציות טריגונומטריות, התלמידים ענו נכון על כ-29%

פער של כ-37% "לרעת" הפונקציות הטריגונומטריות.
תוצאה זו מאששת את השערת המחקר הראשונה: התלמידים אכן מבינים פחות טוב את המושג פונקציה בהתייחסו לפונקציות טריגונומטריות מאשר בהתייחסו לפונקציות אלגבריות

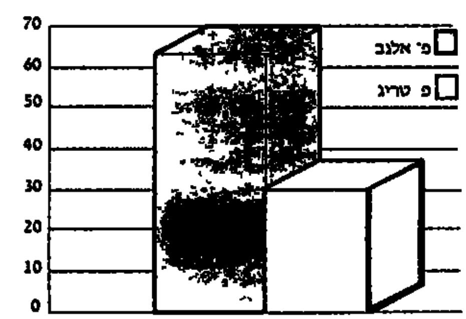
השוואה גרפית בין אחוזי התשובות הנכונות בפונקציות אלגבריות ובפונקציות טריגונומטריות

כמו כן נמצא כי

תלמידי 5 י"ל שולטים טוב יותר מתלמידי 4 י"ל, הן בפונקציות אלגבריות והן בפונקציות טריגונומטריות.

(פער של כ-28% בפונקציות אלגבריות וכ-25% בפונקציות טריגונומטריות)

תוצאה זו מאששת את השערת המחקר השנייה
תלמידי 5 י"ל אכן מבינים את המושג פונקציה טוב יותר מתלמידי 4 י"ל, הן בהתייחסו לפונקציות טריגונומטריות והן בהתייחסו לפונקציות אלגבריות



אחוז התשובות הנכונות בפונקציות טריגונומטריות **נמוך** מאחוז התשובות הנכונות בפונקציות אלגבריות, הן אצל תלמידי 5 י"ל (פער של כ-40%), והן אצל תלמידי 4 י"ל (פער של כ-35%)

כן נמצא כי
תלמידי י"ב שולטים טוב יותר מתלמידי י"א הן בפונקציות אלגבריות (פער של כ-14%), והן בפונקציות טריגונומטריות (פער של כ-9%)

אולם כאשר השוויתי את תלמידי י"א לתלמידי י"ב בכל רמת לימוד בנפרד גיליתי כי

ברמת 4 י"ל תלמידי י"ב אכן טובים יותר מתלמידי י"א ואילו **ברמת 5 י"ל אין הבדל משמעותי בין תלמידי י"א לתלמידי י"ב.** ממצא זה מחזק את הגישה שאומצה על-ידי מספר בתי ספר תיכוניים, לפיה תלמידי 5 י"ל ניגשים לבחינת הבגרות במתמטיקה כבר בסוף כיתה י"א ולא רק בסוף כיתה י"ב

כדי לעמוד על דרך החשיבה של התלמידים שאלתי את השאלה הבאה (שאלה מס' 12)

כדי להקל על עצמי את הטיפול בפונקציות טריגונומטריות אני נעזר ב

1 מעגל טריגונומטרי 2 גרף 3 שניהם 4 אף לא באחד מהם 5 אחר

מתשובות התלמידים התברר כי כשליש מתלמידי 5 י"ל נעזרים הן במעגל טריגונומטרי והן בגרף, לעומת רק כ -7% מתלמידי 4 י"ל

כשליש מתלמידי 4 י"ל **אינם נעזרים** במעגל טריגונומטרי **ואינם נעזרים** בגרף

כמו כן שאלתי
האם אתה מרגיש שהטיפול בפונקציות הטריגונומטריות קל לך יותר או קשה לך יותר מאשר הטיפול בפונקציות אחרות?

למעלה מ-65% מהתלמידים קבעו כי הטיפול בפונקציות טריגונומטריות קשה להם יותר מהטיפול בפונקציות אלגבריות (65 1% ב-י"א 4 י"ל, 72 9% ב-י"א 5 י"ל, 81 25% ב-י"ב 4 י"ל ו-76 2% ב-י"ב 5 י"ל) תלמידים אלה נימקו את קביעתם באופן הבא

- יש מספר תשובות
- המספר האינסופי של הפתרונות
- יש להתחשב במעגל היחידה ובכך שהפונקציה מחזורית
- החומר נלמד בשנה שעברה ואינו בשימוש כמו הפונקציות האחרות הוא נשכח ממני
- **דורש שימת לב מיוחדת לפתרון הגרפי**
- אלה לא פונקציות 'רגילות' הן מחזוריות והן לא משתמשות ב'מספרים רגילים' אלא בזוויות-במעלות או ברדיאנים
- פונקציות טריגונומטריות **חדשות יותר** מאלגבריות
- **הטריגונומטריה זו תפיסה חדשה של עולם המתמטיקה.**
- קשה לי יותר כי לא תרגלתי מספיק
- קשה כי יש המון תחומי עלייה וירידה **אי-אפשר לחבר ולחסר כלום**
- כי יש טיפול ברדיאנים והוא מסובך יותר מפונקציות רגילות שהן מספריות
- יותר עליות וירידות התנהגות לא קבועה של הפונקציה לכל אורכה
- כי יש הרבה נקודות קיצון
- הפונקציות הטריגונומטריות **דורשות יותר מחשבה לפעמים גם סרטוט גרף**
- כי צריך להסתבך עם ה-K
- **אם הייתי זוכרת את הגרף, הייתי יודעת לפתור**

- פונקציות רגילות אני מכיר מכיתה ז׳ בערך, וזה מתבסס על מה שלמדתי מכיתה א׳ לעומת זאת, פונקציות טריגונומטריות הכרתי רק מתחילת השנה, אין קשר בין חומר זה לבין כל חומר שהוא שלמדתי בעבר
- אין לי מושג איך משתמשים בגרף ובמעגל טריגונומטרי

מתשובות התלמידים נראה כי שלושה דברים עיקריים מקשים עליהם את הבנת הפונקציות הטריגונומטריות ויכולת הטיפול בהן, והם
- הבנת תכונת המחזוריות של פונקציה
- הזמן הקצר מדיי המוקדש להצגת הפונקציות הטריגונומטריות בפני התלמידים ולהכרת תכונותיהן
- העובדה שכלל ההתאמה של הפונקציות הטריגונומטריות אינו מבוטא באמצעות מספרים ופעולות חשבון, כפי שהתלמידים רגילים

מיון הטעויות

אפשר לחלק את הטעויות של תלמידים בפתרון בעיות בפונקציות טריגונומטריות למספר קטגוריות

1 מוצאים פתרון אחד ומתעלמים מהמחזור
2 מחזור שגוי
3 עבודה לא נכונה עם המחזור
4 בפתרון משוואות שלהן שתי קבוצות של אינסוף פתרונות, התלמידים רושמים רק קבוצה אחת של אינסוף פתרונות
5 פותרים אי-שוויון כאילו הוא משוואה, ומשנים את סימן השוויון לסימן אי-שוויון, כלומר משתמשים בסכמה לוגית שאינה נכונה לסיטואציה, דבר אשר מוביל כמובן לפתרון שגוי
6 בפתרון אי-שוויון מוסיפים את המחזור רק לאגף אחד
7 התלמידים עושים פעולות על הארגומנט של פונקציה טריגונומטרית ועל אגף ימין זו היא טעות חמורה ביותר המעידה על העובדה שהתלמידים אינם מבינים את המשמעות של פונקציה טריגונומטרית של ארגומנט מסוים
8 מערבבים מעלות ורדיאנים
9 טעויות הנראות כנובעות מטכניקה אלגברית לקויה, אך ייתכן מאוד כי הסיבה שלהן היא חוסר הבנה של המושג ׳מחזוריות׳ לפעמים התלמידים מוצאים את הפתרון הנכון לארגומנט, וטועים בפעולות האלגבריות הבאות הנדרשות למציאת X

לאור טעויות התלמידים ברור כי יש מכשולים אינטואיטיביים המקשים על התלמידים בפתרון בעיות בפונקציות טריגונומטריות מכשולים אלה נובעים מחוסר הבנה של המושג ׳מחזוריות׳, מאי הבנה של מצבים שבהם תיתכנה שתי קבוצות של אינסוף פתרונות, מבלבול במושגים ׳תחום׳ ו׳טווח׳ ומשימוש בסכמות אשר אינן מתאימות לסיטואציות (שימוש במודלים אינטואיטיביים אשר אינם מתאימים לבעיות)

דיון ומסקנות

ברור שיש הבדל בין חשיבה מספרית, שהתלמידים רגילים אליה, שהם מתרגלים אותה כל שנות לימודיהם בבית הספר, ובה הם משתמשים בפתרון בעיות בפונקציות אלגבריות, לבין חשיבה על פונקציה מחזורית, אשר לה לפעמים מספר פתרונות במחזור אחד

יש כאן קושי אינטואיטיבי שיש להתגבר עליו

אפשר לעשות זאת בעזרת דגש על ויזואליזציה, כפי שמציעים החוקרים ונסקר בסקירת הספרות, בעזרת אמצעי המחשה כמו סביבה ממוחשבת וכמובן, בעזרת תרגול רב ומגוון

כמו כן אל לנו לשכוח שהפונקציות הטריגונומטריות הן חדשות,יחסית, לתלמיד הוא נתקל בהן לראשונה בתחילת כיתה י״א, והזמן המוקדש להן בכיתה, להכרת הצגותיהן הגרפיות ותכונותיהן הוא קצר, וכפי הנראה אינו מספיק להבנת הנושא ולהפנמתו

פישביין (1990) סובר כי טעויות של תלמידים בפתרונות אינן תוצאה של מעידה או חוסר תשומת לב רגעית, או התנהגות אקראית הנובעת מחוסר ידע, אלא הן תוצאה של חוקים אשר התלמידים ״ממציאים״, והם שונים מהחוקים של המתמטיקאים

התלמיד אינו ״ממציא״ חוקים חדשים באופן אקראי בדרך כלל חוקים לא נכונים אלה מונעים על-ידי מודלים אינטואיטיביים ראשוניים, אשר אותם מעוררים מצבים מעשיים שהתלמיד נתקל בהם מודלים אלו יוצרים את החוקים השגויים, תומכים בהם, מובילים להכללה ויוצרים מכשולים, קשרים, ‘bugs’, בחשיבה של התלמיד

החשיבה המושגית שלנו איננה רק פעולה מיומנת בסמלים, על-פי כללים מסוימים הסמלים אינם רק ישויות פורמליות טהורות הם קשורים למודלים על כן, כדי להתגבר על המכשולים ו׳להתיר׳ את הקשרים אין זה מספיק לזהות את הכללים השגויים שלפיהם פעל התלמיד, אלא יש לזהות את המקורות לכללים השגויים הללו, כלומר את המודלים שמאחוריהם לאחר שזה נעשה יש לחביא את התלמיד לידי כך שיהיה מודע לקיום המודלים הללו ולהשפעתם

מאחר שהמודלים הללו הם ראשוניים הרי שהם חזקים מאוד ובעלי השפעה חזקה מאוד על התלמיד התלמיד משוכנע בנכונותם על כן, כדי ׳להביס׳ אותם יש למצוא מודל אינטואיטיבי נכון אחר אולם זה לא תמיד אפשרי לכן יש לפתח אצל התלמיד סימני אזהרה, אשר ימנעו ממנו לפעול

בצורה שגויה יש לתת לתלמיד הסבר הגיוני, אשר יהיה מלווה בתרגול, ולהפך התרגול חייב להיות מלווה בהבנת הרציונל של החוקים הנכונים

מכאן ברור כי מורה, המודע לחוק שגוי אשר לפיו פועלים תלמידיו בפתרון סוג מסוים של בעיות, יכול לעזור להם יותר מאשר מורה החושב שטעויות תלמידיו הן רק תוצאה של חוסר תשומת לב או חוסר ידע

לפיכך, היותנו מודעים לחוקים השגויים שלפיהם פועלים התלמידים בפתרון בעיות בפונקציות טריגונומטריות, יכול לשפר את דרכי ההוראה שלנו ואת איכותה, והרי זו שאיפתנו

המלצות דידקטיות

ממחקר זה עולות מספר המלצות דידקטיות

מאחר שבפונקציות הטריגונומטריות בא לידי ביטוי באופן משמעותי ביותר המושג 'מחזוריות', שהתלמידים אינם מבינים אותו כהלכה, יש להיות ערים לכך בעת הצגת הפונקציות הטריגונומטריות בפני התלמידים יש להקדיש יותר זמן מהזמן המוקדש בכיתה עד כה להבנת המושג מחזוריות ולהכרת הפונקציות הטריגונומטריות, הצגותיהן הגרפיות ותכונותיהן מומלץ לעשות זאת תוך שימת דגש על ההיבט הויזואלי, דהיינו שימוש בהצגות הגרפיות יחד עם החצגות האלגבריות, ומעבר מהצגה אחת לאחרת כדאי לעשות זאת בסביבה ממוחשבת, ויש להיעזר בתרגול רב ומגוון

בכיתות ברמה של 4 י"ל יש להקדיש לנושא הפונקציות הטריגונומטריות זמן רב יותר מהזמן המוקדש לנושא זה בכיתות ברמה של 5 י"ל

תוך כדי הצגת הפונקציות הטריגונומטריות בפני התלמידים וציון תכונותיהן, תכונות המוכרות לתלמידים מלימוד קודם של הפונקציות האלגבריות, יש להדגים בפניהם באופן גרפי כיצד כל תכונה באה לידי ביטוי, הן בפונקציות האלגבריות והן בפונקציות הטריגונומטריות זאת כדי שהתלמידים יראו בפונקציות הטריגונומטריות הרחבה של מאגר הפונקציות שכבר יש להם, ולא משהו חדש ואחר

בכל שלבי ההוראה על המורים להיות מודעים למודלים האינטואיטיביים השגויים שלפיהם פועלים התלמידים יש גם להביא את התלמידים לידי כך שיהיו מודעים לקיום המודלים הללו ולהשפעתם יש לפתח אצל התלמידים סימני אזהרה, אשר ימנעו מהם לפעול בצורה שגויה יש לספק לתלמידים הסברים הגיוניים במהלך הלימוד, וללוות את ההסברים בתרגול רב כמו כן יש לדאוג שכל תרגול יהיה מלווה בהבנת הרציונל של החוקים הנכונים

רשימת ספרות

Dreyfus, T [1991] Advanced Mathematical Thinking Processess, in D O Tall (Ed) *Advanced Mathematical thinking*, Chap 2, p 25-41. Dordrecht Kluwer Academic Pub

Eisenberg, T [1991] Functions and Associated Learning Difficulties, in D O Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking*, Chap 9, p 140-152 Dordrecht, Kluwer Academic Pub

Fischbein, E [1987] *Intuition in Science and Mathematics* An Educational Approach D Reidel Pub

Fischbein, E [1990] Intuition and Information Processing in Mathematical Activity, *International Journal of Educational Research* 14, no 1 31-49

Sfard, A. [1991] On the Nature of Mathematical Conceptions Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin *Educational Studies in Mathrmatics* 22(1) 1-36

Tall, D O and S Vinner [1981] Concept Image and Concept Definition in Mathematics - with Particular Reference to Limit and Continuity, *Educational Studies in Mathematics* 12· 151-159

Vinner, S and T Dreyfus [1989] Images and Definitions for the Concept of Function, *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (4) 356-366

Vinner, S [1991] The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics, in D Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking*, Chap 5, 65-81 Dordrecht, Kluwer Academic Pub