קוראים כותבים

פתרון מקורי למשוואה

קרן גרוסמן
בית הספר 'בית ירחי'
גבעת אבני

ברצוני להציע פתרון מקורי למשוואה
$a\sin x + b\cos X = c$
הפעם ניתן הפתרון ברדיאנים

נסביר את תהליך הפתרון על־ידי דוגמה
יש לפתור את המשוואה
$2\sin X + 2\ 8\cos X = 3$
$a\sin x + b\cos X = c$ — שצורתה הכללית

1 נחלק את המשוואה במקדם של sinx, ב־2, ונקבל

$$\sin X + \frac{b}{a}\cos X = \frac{c}{a} \quad / \quad \sin X + 1\ 4\cos X = 1\ 5$$

2 א נפעיל arctg על המקדם של ה־cosX, על 1 4, ונקבל

$\mathrm{arctg}(\frac{b}{a}) = d$ נסמן / $\mathrm{arctg}1\ 4 = 0\ 95$

ב נחליף את המקדם של cosX בהצגתו האחרת — בטנגנס המספר שהתקבל

$$\sin X + \mathrm{tg}d\cos X = \frac{c}{a} \quad / \quad \sin X + \mathrm{tg}0\ 95\cos X = 1\ 5$$

* מובן, כי מדויק יותר להמשיך לעבוד עם arctg1 4 במקום עם ערכו הקטוע 0 95, אם כי פחות נוח, לטעמי

3 נכפיל את המשוואה ב־cos0.95, שהוא מספר שונה מ־0, ונקבל

$$\cos d\sin X + \sin d\cos X = \frac{c}{a}\cos d \quad /$$
$$\cos 0\ 95\sin X + \sin 0\ 95\cos X = 1\ 5\cos 0\ 95$$

4 כעת נכנס את אגף שמאל של המשוואה לפי הנוסחה $\sin(\alpha + \beta)$, ונקבל

$$\sin(d + X) = \frac{c}{a}\cos d \quad / \quad \sin(0\ 95 + x) = 0\ 87$$

וההמשך הוא טריוויאלי

* יש לציין, כי אם בשלב 1 של הפתרון נחלק את המשוואה במקדם של cosX ובשלב 2 נפעיל את arctg על המקדם של sinX, אז בשלב 4 נגיע להפעלת הנוסחה cos (α--β)

הוכחה נוספת של המשפט העיקרי במאמרו של דן בוחניק: 'משימה בגיאומטריה אוקלידית' - על"ה 21 ושאלה פתוחה

אבי סיגלר
מכללת חיל האוויר

להלן אציג הוכחה נוספת למשפט המרכזי מתוך מאמרו של דן בוחניק (על"ה 21 55-59)

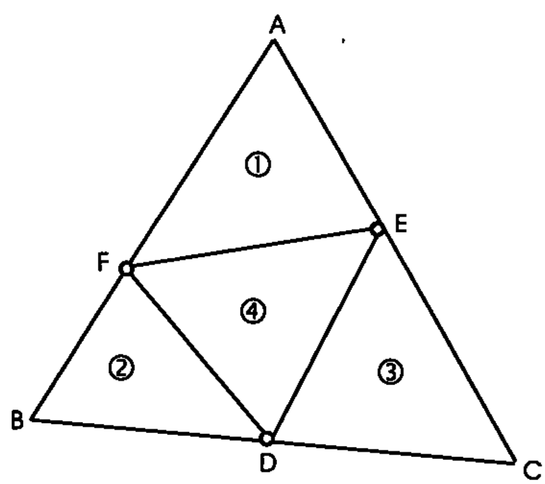
משפט

במשולש C, B, A, נתונות 3 נקודות כלשהן D, E, F על הצלעות BC, CA, AB, בהתאמה אזי

$$S_4 \geq \mathrm{Min}\,(S_1, S_2, S_3)$$

כאשר S_1 מבטא את שטח המשולש ה-i

סרטוט 1



הוכחה

נסמן

$$\frac{AF}{FB}=\gamma\ ,\ \frac{CE}{EA}=\beta\ ,\ \frac{BD}{DC}=\alpha$$

ונביע את השטחים S_1,S_2,S_3 ו-S_4 באמצעות α, β, γ, ושטח המשולש ABC

למה 1

$$\boxed{S_1 = S_{ABC}\frac{\gamma}{(\beta+1)(\gamma+1)}} \qquad (1)$$

הוכחה

$$\frac{S_1}{S_{ABC}} = \frac{AF}{AB}\,\frac{AE}{AC}$$

$AF = AB\,\frac{\gamma}{\gamma+1}$ ו-, $AE = AC\cdot\frac{1}{\beta+1}$

לכן טענת הלמה נובעת מידית

למה 2

$$\boxed{S_1 = S_{ABC}\cdot\frac{1+\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}} \qquad (2)$$

הוכחה

$$S_4 = S_{ABC} - (S_1 + S_2 + S_3)$$

לכן

$$S_4 = S_{ABC} -$$

$$-S_{ABC}\ \underbrace{\frac{\gamma}{(\beta+1)(\gamma+1)}}_{S_1} + \underbrace{\frac{\alpha}{(\gamma+1)(\gamma+1)}}_{S_2} + \underbrace{\frac{\beta}{(\beta+1)(\alpha+1)}}_{S_3}$$

פתיחת סוגריים, מכנה משותף והוצאת S_{ABC} גורם משותף מוכיחות מידית את (2)

כדי להוכיח את המשפט, עלינו להוכיח שלא ייתכנו γ, β, α, אי-שליליים המקיימים בו זמנית את מערכת האי-שוויונים הבאים

$$(3)\quad \begin{cases} S_1 > S_4 & \Leftrightarrow \dfrac{\gamma}{(\beta+1)(\gamma+1)} > \dfrac{1+\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)} \\ S_2 > S_4 & \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{(\alpha+1)(\gamma+1)} > \dfrac{1+\alpha\beta\gamma}{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)} \\ S_3 > S_4 & \Leftrightarrow \dfrac{\beta}{(\beta+1)(\alpha+1)} > \dfrac{1+\alpha\beta\gamma}{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)} \end{cases}$$

שקולה למערכת האי-שוויונים

$$(3^*)\quad \begin{cases} \gamma(\alpha+1) > 1+\alpha\beta\gamma \\ \alpha(\beta+1) > 1+\alpha\beta\gamma \\ \beta(\gamma+1) > 1+\alpha\beta\gamma \end{cases}$$

וגם למערכת האי-שוויונים

$$(3^{**})\quad \begin{cases} (a)\ \alpha\gamma(1-\beta) > (1-\gamma) \\ (b)\ \alpha\beta(1-\gamma) > (1-\alpha) \\ (c)\ \beta\gamma(1-\alpha) > (1-\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^*)\ \alpha\gamma(\beta-1) < (\gamma-1) \\ (b^*)\ \alpha\beta(\gamma-1) < (\alpha-1) \\ (c^*)\ \beta\gamma(\alpha-1) < (\beta-1) \end{cases}$$

מקרה א: $\alpha=\beta=\gamma=1$ במקרה זה (a) מהווה סתירה כי גם האגף השמאלי וגם האגף הימני 0, ולא ייתכן אי־שוויון חזק

מקרה ב: ללא הגבלות כלליות $\alpha=\beta=1$, $\gamma\neq 1$ במקרה זה (c) מהווה סתירה מאותו נימוק כמו במקרה א

מקרה ג: ללא הגבלות כלליות, $\alpha=1$, $\beta\neq 1$, $\gamma\neq 1$

$$(c)\ \Rightarrow\quad 0>1-\beta\Rightarrow\beta>1$$

$$(b)\ \Rightarrow\quad \alpha\beta(1-\gamma)>0\Rightarrow\gamma<1$$

מ (c) ו־ (b) נובע כי $\begin{cases}\alpha\gamma(1-\beta)<0 \\ 1-\gamma>0\end{cases}$

בסתירה לאי־שוויון (a)

$$\alpha\gamma(1-\beta) > (1-\gamma)$$

מקרה ד $\alpha\neq 1$, $\beta\neq 1$, $\gamma\neq 1$

(I) אם $\beta>1$ מ־(a^*) נובע ש־ $\gamma>1$ ואז מ־(b^*) נובע ש־ $\alpha>1$ לכן $\alpha\cdot\beta\,\gamma>1$

אבל במקרה זה כל הביטויים המופיעים ב־(a^*), (b^*) ו־(c^*), חיוביים ואם נכפיל את האי-שוויונים (a^*), (b^*), (c^*), אגף אגף נקבל

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2(\beta-1)(\gamma-1)(\alpha-1) < (\beta-1)(\gamma-1)(\alpha-1)$$

לכן $\alpha\beta\gamma<1$ כסתירה ל־$\alpha\beta\gamma>1$

(II) אם $\beta>1$ מ־(c) נובע ש־$\alpha<1$ ומ־(b) נובע ש־ $\gamma<1$ לכן $\alpha\beta\gamma<1$ אבל במקרה זה כל הביטויים ב־(a), (b) ו־(c), חיוביים, משום כך אם נכפיל את ב־(a), (b), (c) אגף אגף נקבל

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) > (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$$

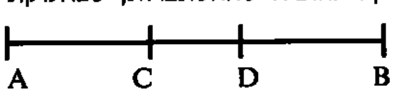
לכן $\alpha\beta\gamma>1$ בסתירה ל־$\alpha\beta\gamma<1$

הוכחנו אם כן שאין α, β, γ , אי-שליליים המקיימים בו זמנית את מערכת האי־שוויונים (3) לכן

$$S_{④} \geqslant \operatorname{Min}\,(S_{①}, S_{②}, S_{③})$$

הערה דידקטית

אפשר להציג את המשפט שהוכח כעובדה מפתיעה והסיבה לכך היא כדלקמן קל להוכיח שההסתברות, שבחלוקת קטע



לשלושה חלקים על־ידי הנקודות C, D, שהקטע האמצעי CD יהיה הקצר ביותר מבין AC, CD, DB, היא $\frac{1}{3}$

ועתה אם נעלה מימד, באנלוגיה, הקטע AB הופך למשולש ABC, אשר ינשברי ל-4 משולשים①,②,③ ו-④ כאשר ④ הוא המשולש האמצעי משולשים אלה אנלוגיים לקטעים AC, CD, DB, כאשר ④ אנלוגי ל-CD

צפוי אינטואיטיבית שלכל אחד מן המשולשים ①, ②, ③ ו־④ סיכוי שווה להיות בעל השטח הקטן ביותר (כמו של־CD סיכוי שווה להיות הקצר ביותר יחסית ל־AC ו־DB).

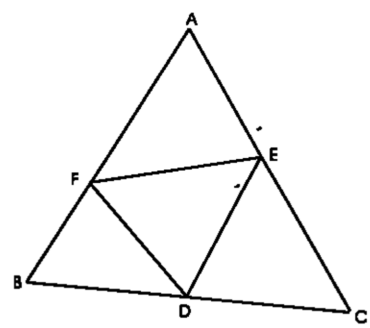
לכן ההסתברות האינטואיטיבית, הנובעת מאנלוגיה, ש־S④ יהיה קטן בשטחו ממינימום שטחי ①, ② ו־③ היא $\frac{1}{4}$

המשפט מוכיח שההסתברות המבוקשת אינה $\frac{1}{4}$ אלא 0

בעיה פתוחה

במשולש ABC נתונות 3 נקודות כלשהן D, E, F על הצלעות BC, CA, AB בהתאמה

סרטוט 2



השערתי היא

$$P_{DEF} \geq \mathrm{Min}\,(P_{DEC}\,,\ P_{AEF}\,,\ P_{BDF})$$

כאשר P הוא היקף המשולש שקדקדיו מצוינים

ניסיונותיי בשנתיים האחרונות להוכיח או להפריך את ההשערה, לא הצליחו. הוכחתי במקרים רבים (אם ABC שווה צלעות, אם D, E, F עקבי ציביאנות, אם DEF שווה צלעות, אם D, E, F היטלים של נקודה במשולש ABC) שההשערה נכונה, אך לא מצאתי הוכחה למקרה הכללי

אשמח אם אחד הקוראים ימצא הוכחה או הפרכה להשערה ויפרסם את ממצאיו בעלי"ה