חתכי החרוט

מאת· **מיכאל קורן**, משרד החינוך

מבוא

כאשר נלמדות בבית הספר התיכון האליפסה, הפרבולה וההיפרבולה, מוזכרת בדרך כלל העובדה כי שלוש עקומות אלה נקראות "חתכי החרוט", כיוון שהן מתקבלות כאשר מישור חותך חרוט (אינסופי, כפול) שלא דרך קדקוד החרוט

כאן ננצל את תכונות הוקטורים במערכת צירים להוכחת טענה זו, וכדי למצוא מתי בדיוק מתקבלת כל אחת מן העקומות נשלים את התמונה על־ידי כך שנראה כי כאשר המישור החותך עובר דרך קדקוד החרוט, החתך המתקבל הוא נקודה בודדת, ישר, או שני ישרים נחתכים

הפיתוח יתבצע במספר שלבים תחילה נזכיר שתי הגדרות של המכפלה הסקלרית, ונראה איך אפשר בעזרתן להציג קוסינוס של זווית בין שני וקטורים, לפי שעורי הוקטורים. בשלב השני נראה איך לבחור מערכת צירים נוחה, כשנתונים חרוט ומישור החותך אותו. בשלב השלישי נפתח משוואה של חרוט במערכת הצירים שבחרנו, ונחשב את המשוואה של חתך החרוט והמישור. בשלב האחרון, נחקור את משוואת החתך, במקרים השונים, כדי להראות מהי צורת החתך בכל מקרה.
לסיום, נטפל כאמור לעיל, גם במקרה שהמישור עובר דרך קדקוד החרוט.

1. המכפלה הסקלרית

המכפלה הסקלרית של שני וקטורים $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$ היא $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, וכן היא מכפלת אורכי שני הוקטורים בקוסינוס הזווית שביניהם (בפרט, אורך של וקטור שווה לשורש המכפלה הסקלרית שלו בעצמו) לפיכך, את הזווית θ בין שני הוקטורים $\overrightarrow{OA}$ ו $\overrightarrow{OB}$ אפשר לחשב לפי הנוסחה.

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \tag{1}$$

זווית בין ישר לוקטור אפשר לחשב על־ידי חישוב הזווית בין וקטור הנמצא על הישר ("וקטור כיוון" של הישר) לבין הוקטור; אם הזווית בין הוקטורים קהה, הזווית בין הישר והוקטור היא הזווית המשלימה ל $180°$.

לפרטים נוספים על וקטורים ותכונותיהם ראה למשל [1], [2].

2. בחירת מערכת צירים

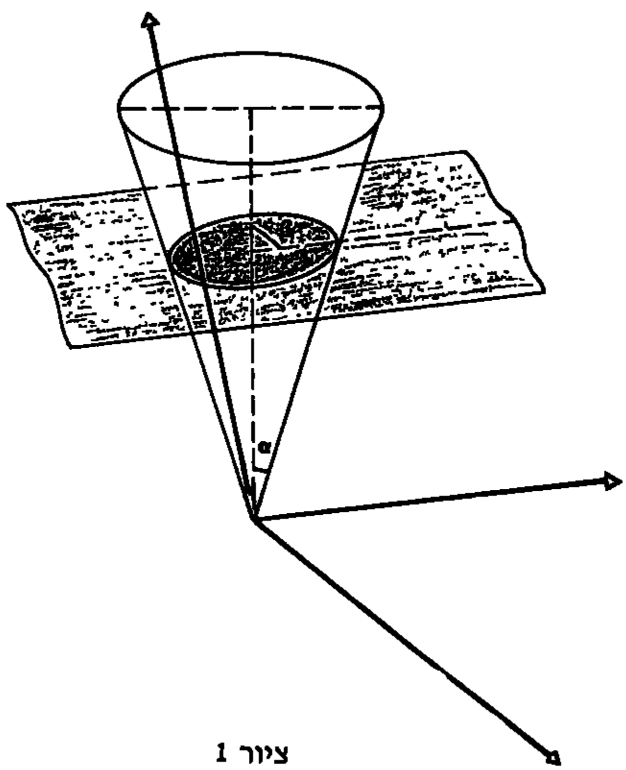
נתונים חרוט שזווית החתך הצירי שלו היא 2α, $(0 < \alpha < 90^\circ)$ ומישור החותך אותו שלא דרך הקדקוד, ויוצר זוית β עם ציר החרוט, $(0 \le \beta \le 90^\circ)$. אפשר לקבוע במרחב מערכת צירים שתקיים·

א ראשית הצירים היא קדקוד החרוט

ב. משוואת המישור היא $z = 1$.

ג. הוקטור $(\cos\beta, 0, \sin\beta)$ הוא וקטור כיוון של ציר החרוט

ואכן, נקבע את ראשית הצירים בקדקוד החרוט, נקבע את ציר z במאונך למישור הנתון, ונקבע את היחידה של הצירים כמרחק בין הראשית למישור הנתון לפיכך משוואת המישור היא $z = 1$. אם ציר החרוט מתלכד עם ציר z (כלומר $\beta = 90^\circ$), נבחר את ציר x באופן שרירותי אם ציר החרוט אינו ציר z, (כלומר $\beta < 90^\circ$), נבחר את ציר x בכיוון ההיטל של ציר החרוט על המישור הנתון (או, ליתר דיוק, כהיטל של ציר החרוט על המישור העובר דרך קדקוד החרוט ומקביל למישור הנתון, $z = 0$) אם $\beta > 0$, נבחר את הכיוון החיובי של ציר x באופן, שציר החרוט יהיה ישר עולה מאחר והזווית בין ציר החרוט למישור החותך היא גם הזווית בין ציר החרוט לציר x, ברור כי הוקטור $(\cos\beta, 0, \sin\beta)$ הוא וקטור כיוון של ציר החרוט (ראה ציור 1)



ציור 1

3. משוואת החרוט ומשוואת החתך

במערכת הצירים שבחרנו, נקודה $A(x, y, z)$ שאינה קדקוד החרוט (כלומר אינה הראשית) נמצאת על החרוט אם ורק אם הוקטור $\overline{OA}$ יוצר זוית α עם ציר החרוט לפיכך, לפי נוסחה (1), נקבל כי משוואת החרוט (ללא קדקודו) היא

$$\frac{x\cos\beta + z\sin\beta}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \pm\cos\alpha \qquad (2)$$

(האורך של $(\cos\beta, 0, \sin\beta)$ הוא כמובן 1). אחרי העלאה בריבוע וסידור מקבלים

$$(x\cos\beta + z\sin\beta)^2 = \cos^2\alpha\ (x^2+y^2+z^2) \qquad (2')$$

(שים לב, כי נקודת הקדקוד (0,0,0) מקיימת הפעם את המשוואה).
משוואת המישור החותך היא $z = 1$; על־ידי הצבת הערך של z במשוואת החרוט נקבל

$$(x\cos\beta + \sin\beta)^2 = \cos^2\alpha\ (x^2+y^2+1)$$

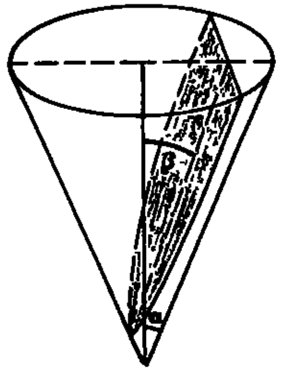
ואחרי סידור נקבל

$$(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)x^2 - 2\sin\beta\cos\beta\cdot x + \cos^2\alpha\cdot y^2 = \sin^2\beta - \cos^2\alpha \qquad (3)$$

4. צורת החתך

לפני שנחקור את המשוואה (3) למקרים השונים, ננסח את הטענות כמשפט

משפט 1: נתונים חרוט שזווית החתך הצירי שלו היא 2α, ומישור שאינו עובר דרך קדקוד החרוט. החתך של המישור והחרוט הוא:
א. פרבולה — אם $\beta = \alpha$ (ציור 2);
ב. אליפסה — אם $\beta < \alpha$ (ציור 1);
ג. היפרבולה — אם $\beta > \alpha$ (ציור 3).



ציור 2

הוכחה: נטפל תחילה במקרה $\beta = \alpha$. משוואת החתך היא

$$-2\sin\beta\cos\beta\cdot x + \cos^2\beta\cdot y^2 = \sin^2\beta - \cos^2\beta \iff$$

או

$$\cos^2\beta\cdot y^2 = 2\sin\beta\cos\beta\cdot x + \sin^2\beta - \cos^2\beta \iff$$

או

$$\cos^2\beta\cdot y^2 = 2\sin\beta\cos\beta(x - \mathrm{ctg}2\beta)$$

על־ידי חילוק ב $\cos^2\beta$ והצבת $x' = x - \mathrm{ctg}2\beta$ נקבל כי משוואת החתך במקרה זה היא

$$y^2 = 2\mathrm{tg}\beta\cdot x'$$

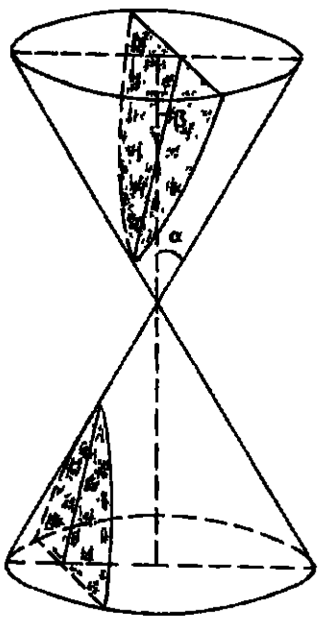
וזו משוואה של פרבולה.

הערה: הטרנפורמציה $x' = x = \mathrm{ctg}2\beta$ שקולה להזזה של מערכת הצירים, בכיוון ציר x בלבד, בשעור $\mathrm{ctg}2\beta$ לפרטים נוספים על הזזות, ראה [3], (עמ' 242-248), [4].

כעת נעבור למקרים שבהם הזוויות α ו β שונות. נוכל לעבור מן המשוואה

$$(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)x^2 - 2\sin\beta\cos\beta\cdot x + \cos^2\alpha\cdot y^2 = \sin^2\beta - \cos^2\alpha \qquad (3)$$

על־ידי השלמה לריבוע, למשוואה



(4)

$$(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)\cdot\left(x-\frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\right)^2 + \cos^2\alpha\cdot y^2 = \sin^2\beta-\cos^2\alpha + \frac{\sin^2\beta\cos^2\beta}{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$$

בדומה למקרה הראשון, אפשר להציב

$$x' = x-\frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$$

ציור 3

קל לראות כי אם האיבר החופשי ב (4) (אגף ימין) שונה מאפס, אז. אם המקדם של $(x')^2$ חיובי $(\alpha < \beta)$, המשוואה מתארת אליפסה, ואם המקדם שלילי, המשוואה מתארת היפרבולה

להשלמת הטיפול יש אפוא להראות כי האיבר החופשי אכן שונה מ 0.
לשם כך נבדוק מתי איבר זה שווה ל 0:

$$\sin^2\beta - \cos^2\alpha + \sin^2\beta\cos^2\beta/(\cos^2\alpha - \cos^2\beta) = 0$$

$$(\sin^2\beta - \cos^2\alpha)\ (\cos^2\alpha - \cos^2\beta) + \sin^2\beta\cos^2\beta = 0$$

$$\sin^2\beta\ \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\ (\cos^2\alpha - \cos^2\beta) = 0$$

מאחר ש $\cos^2\alpha$ שונה מאפס, נוכל על־ידי צימצום לפשט את התנאי ל $\sin^2\beta\text{-}(\cos^2\alpha\text{-}\cos^2\beta) = 0$ או $\cos^2\alpha = \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, אך $0 < \alpha$ ולכן השוויון האחרון אינו מתקיים אף פעם, לפיכך האיבר החפשי במשוואה (4) שונה מאפס, והמשוואה מתארת אליפסה או היפרבולה, לפי היחס בין α ל β

5. המישור החותך את החרוט דרך הקדקוד

בדומה למה שעשינו במקרה הקודם, נוכל להניח כי החרוט והמישור נמצאים במערכת צירים שבה משוואת המישור היא, הפעם

$$z = 0$$

ומשוואת החרוט היא שוב

$$(x\cos\beta + z\sin\beta)^2 = \cos^2\alpha\ (x^2 + y^2 + z^2) \qquad (2)$$

הפעם החיתוך הוא עם המישור $z = 0$, ולכן נקבל כי משוואת החתך היא

$$x^2\cos^2\beta = \cos^2\alpha\ (x^2 + y^2)$$

או

$$(\cos^2\beta - \cos^2\alpha)x^2 = \cos\alpha \cdot y^2 \qquad (5)$$

מכאן קל להסיק את המשפט הבא.

משפט 2: אם מישור עובר דרך קדקוד חרוט שזווית החתך שלו 2α, ויוצר זווית β עם ציר החרוט, אז החתך הוא ישר אם $\beta = \alpha$, החתך הוא הקדקוד בלבד אם $\beta < \alpha$, והחתך הוא זוג ישרים נחתכים, אם $\beta > \alpha$.

ביבליוגרפיה

1. **אלגברה** ארבע וחמש יחידות, כרך ב׳, וקטורים בגישה גיאומטרית המרכז הישראלי להוראת המדעים על שם עמוס דה־שליט, האוניברסיטה העברית, ירושלים.
2. **אלגברה** ארבע וחמש יחידות, כרך ב׳, וקטורים בגישה אלגברית. המרכז הישראלי להוראת המדעים על שם עמוס דה־שליט, האוניברסיטה העברית, ירושלים.
3. מ. משלר. **אלגברה לשנת הלימודים השמינית.** הקבוץ המאוחד. תשל״ח
4. ב בן יהודה. **גיאומטריה אנליטית.** מסדה 1966.