משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים

אוניברסיטת חיפה
הפקולטה לחינוך

מטה מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי
المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

על אינדוקציה מתמטית

חלק ראשון

מדור: חושבים מתמטיקה

כתב: אלכסנדר חייט

תקציר: מאמר זה הוא חלקו הראשון של מאמר העוסק בהוכחה בעזרת עיקרון האינדוקציה, כאשר חלקו השני עוסק בהרחבת הנושא ובעיקרון האינדוקציה המורחבת. חלק זה מציג מבוא לאינדוקציה, הוכחת עיקרון האינדוקציה בדרך השלילה, דרכי הוכחה הנדרשים מתלמידים וסוגיות הכרוכות בכך. סוף המאמר עוסק בהוכחת אי-שוויונות באינדוקציה בשלוש שיטות שונות ודיון ביתרונות ובחסרונות של שיטות אלה.

מילות מפתח: אינדוקציה, דדוקציה, עיקרון המספר המינימאלי, שיטת השרשרת, אי שוויונות שקולים.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 39, תשס"ח 2008, עמוד 20.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 7 עמודים.

מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע ע"י אוניברסיטת חיפה עפ"י מכרז מס' **6/1.07**
הפרויקט מבוצע עבור האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים, המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי -- הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל' 04-8288351 פקס. 04 - 8240757
דוא"ל: hmathcntr@construct.haifa.ac.il אתר: http://highmath.haifa.ac.il

על אינדוקציה מתמטית - חלק ראשון

אלכסנדר חייט

הקדמה ורקע כללי

בגיליון זה מופיע חלק ראשון של המאמר העוסק במבוא לאינדוקציה, בדרכי הוכחה הנדרשות מהתלמידים ובסוגיות הכרוכות בכך. מאמר המשך למאמר זה, שיופיע בגיליון הבא, יעסוק בהרחבת הנושא בכלל, ובעיקרון האינדוקציה המורחבת בפרט.

משמעות המילה אינדוקציה בשפה הלטינית היא: השראה. בהקשר שלנו השראה לרעיון כלשהו, כלל כלשהו, או נוסחה כלשהי.

דפוס החשיבה של האינדוקציה, המשמשת ככלי חשוב בענפים רבים של המתמטיקה, נתפס בעיני בוגרי בית הספר כשיטה "מפוקפקת", מין טריק שהמציאו מתמטיקאים (או אולי מורים למתמטיקה?) לצורכיהם, ולכן קשה להאמין בו. כתוצאה מחוסר האמון בשיטת האינדוקציה, גם השימוש בה לעתים מוטעה. מטרת המאמר לתת למורים כלים להתמודד עם הדעות הקדומות של התלמידים ביחס לאינדוקציה ולהפנות את תשומת לבם למספר נקודות חשובות בהקשר לנושא זה. (לדיון נוסף בנושא האינדוקציה, כולל דוגמאות להבהרה של נקודות בעייתיות של הנושא, ניתן לקרוא במאמר של נ. מובשוביץ- הדר, (ראה במקורות).

בין ההיגדים המבטאים טענות כלשהן קיימים שני סוגים חשובים: טענות כלליות וטענות פרטיות. למשל, טענות כלליות על אנשים מתייחסות לכל אדם, טענות כלליות על מספרים מתייחסות לכל מספר, וכו'.

בהרבה מקרים המילה "כל" לא מופיעה במפורש בטענה כללית, וכדי לגלות אותה צריך לשנות את נוסח הטענה. למשל, הטענה "סכום הזוויות של משולש שווה ל- 180°", פירושה שסכום הזוויות של כל משולש שווה ל- 180°.

טענות פרטיות מתייחסות לעצם בודד. למשל, אבי הוא אזרח מדינת ישראל; סכום הזוויות של המשולש הזה שווה ל- 180°.

בהיסק מסקנות אפשר לעבור מטענות כלליות לטענות פרטיות. מעבר כזה נקרא **דדוקציה**. משמעות המילה דדוקציה היא "הסקה" (deductio בשפה הלטינית). מתמטיקה היא מדע דדוקטיבי, כאשר מטרת הוכחות של משפטים כלליים היא שימוש בהם למקרים פרטיים. למשל, מכך שסכום הזוויות של כל משולש שווה ל- 180° אפשר להסיק מסקנה לגבי משולש ספציפי.

דדוקציה כדרך להסקת מסקנות מקובלת גם מחוץ למתמטיקה. למשל, מכך שאזרחי ישראל (כלומר, כל אזרח) מעל גיל 18 זכאים להצביע בבחירות, אפשר להסיק מסקנה על זכות ההצבעה עבור אזרח ספציפי שמלאו לו 18 שנים.

מעבר הפוך, ממסקנות פרטיות למסקנות כלליות נקרא **אינדוקציה**. משמעות המילה אינדוקציה היא "השראה" (induction בשפה הלטינית), בהקשר שלנו השראה לרעיון כלשהו, כלל כלשהו, או נוסחה כלשהי.

באינדוקציה משתמשים כאשר רוצים להסיק כלל ממספר של מקרים פרטיים. שימוש אופייני באינדוקציה בהקשר המדעי הוא, קביעה של חוקי הטבע על סמך הרבה מקרים, שבהם נצפתה התנהגות התואמת את החוק.

השיטה הזאת נהוגה גם בחיי יום-יום: לאחר שרואים כי תופעה כלשהי מתרחשת בנסיבות מסוימות מספר רב של פעמים, מסיקים מכך שהיא **תמיד** מלווה את הנסיבות האלה. למשל, כך אנו יודעים שאֵש מחממת, שלאחר הלילה בא היום ולאחר היום בא הלילה וכך הלאה. גם כאשר אנו מצפים להתנהגות מסוימת של אנשים מוכרים, אנו משתמשים בשיטת האינדוקציה.

ההבדלים בין מסקנות שונות שמסיקים באמצעות אינדוקציה הם ברמת המהימנות שלהן. הביטחון בציפייה לגבי התנהגות של אדם מסוים נמוך בדרך כלל מביטחון בחוק טבע.

ההכללה מהפרט אל הכלל משמשת אותנו גם במתמטיקה. כך על סמך מספר איברים ראשונים של סדרה, אפשר לנסח השערה על איברי הסדרה באופן כללי. אך כל עוד אין לנו מידע נוסף על הכלל שלפיו מקבלים את איברי הסדרה, מהימנות ההשערה הזאת מוטלת בספק (ראה דוגמאות במאמר שהוזכר לעיל).

אכן, הניסיון להשתמש בשיטת האינדוקציה במתמטיקה באופן דומה לזה שמשתמשים בה במדעי הטבע היה מקובל במאה ה- 18. (הבולט מבין המתמטיקאים שעבדו בשיטה הזו היה אוילר – גדול המתמטיקאים של המאה הזאת.) לצד הצלחות, גישה זו הביאה גם לטעויות חמורות.

למשל, לייבניץ (1646-1716), אחד מאבות המתמטיקה המודרנית, הוכיח שכל מספר טבעי מהצורה n^3-n מתחלק ב- 3, כל מספר מהצורה n^5-n מתחלק ב- 5, כל מספר מהצורה n^7-n מתחלק ב- 7. על סמך עובדות אלה הוא גיבש השערה שכל k

אי-זוגי טבעי, מהצורה $n^k - n$ מתחלק ב- k. אך כעבור זמן הוא בעצמו גילה ש- $2^9 - 2 = 510$ לא מתחלק ב- 9.

לפעמים כלל שמתקבל על סמך מספר דוגמאות, מתקיים עבור הרבה מאוד מקרים נוספים עד שהוא מופר.

למשל: בשנות ה- 40 של המאה ה- 20, בכתב עת מתמטי חשוב הופיעה השערה: עבור כל מספר ראשוני p, המספר $2^{p-1}-1$ לא מתחלק ב- p^2. בדיקה ישירה עבור כל המספרים הראשוניים הקטנים מאלף אוששה את הטענה, אך בהמשך התברר שהיא לא נכונה עבור המספר 1093 (שהוא מספר ראשוני), כלומר, $2^{1092}-1$ מתחלק ב- 1093^2.

ובכן, נכונות של טענה כלשהי על אודות המספרים הטבעיים, בהרבה מקרים פרטיים אינה ערובה לכך שהיא מתקיימת בכל המקרים: קיימים אינסוף מספרים טבעיים, לכן לא ניתן לבדוק אודותיהם טענות באופן פרטני. כך נשאלת השאלה איך אפשר לדעת שטענה כלשהי על אודות המספרים הטבעיים מתקיימת תמיד?

את התשובה לשאלה הזאת מספק עיקרון האינדוקציה המתמטית.

עיקרון האינדוקציה המתמטית

להלן ניסוח עיקרון האינדוקציה:

אם טענה על המספרים הטבעיים מקיימת את שתי הדרישות הבאות:

א. **הטענה נכונה עבור n_0 טבעי כלשהו;**

ב. **מכך שהטענה מתקיימת עבור מספר טבעי כלשהו, נובע שהיא מתקיימת עבור המספר הבא;**

אז היא נכונה עבור כל המספרים הטבעיים ה $\le n_0$.

(המספר n_0 עשוי להיות שווה לאפס. השתייכות או אי-השתייכות של 0 לקבוצת המספרים הטבעיים, היא עניין טכני ולא עקרוני: יש ספרים שכוללים את 0 ויש שלא, אין לנושא זה שום חשיבות באינדוקציה.)

הערה דידקטית: בדוגמאות הראשונות ואף בניסוח הראשוני של עיקרון האינדוקציה עדיף להחליף את "n_0" ב- "1" כדי לא להכביד על התלמידים (ולהכליל את השיטה אחרי שהרעיון עצמו נקלט). כך נעשה גם בהמשך של סעיף זה במאמר.

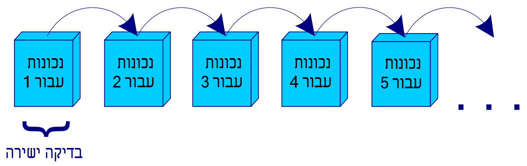
הערה: מה שגורם לספק במהימנות של עיקרון האינדוקציה אצל התלמידים היא דרישה ב'. לכאורה מהנחה שהטענה נכונה מסיקים שהיא אכן מתקיימת. מדוע העיקרון הזה תקף?

במתמטיקה עשויים להיות שני סוגים של תשובות לשאלה הזו: האחד הוא הוכחה, במקרה הזה יש להוכיח שעיקרון האינדוקציה נובע מהנחות יסוד בסיסיות יותר. השני, העיקרון מתקבל כאקסיומה, ואז ההצדקה צריכה להיות אינטואיטיבית. לעיקרון האינדוקציה אפשר לתת הנמקה בכל אחד משני הסוגים. בספרים רבים מובא העיקרון כאקסיומה.

נתאר את האינטואיציה שעומדת מאחורי עיקרון האינדוקציה המתמטית: נניח שדנים בטענה כלשהי על מספרים טבעיים המקיימת את שתי הדרישות.

לפי דרישה א': הטענה מתקיימת עבור 1; לכן לפי דרישה ב' היא מתקיימת עבור 2 (המספר הבא אחרי 1); מכך שהטענה מתקיימת עבור 2 (שוב לפי ב') היא מתקיימת גם עבור 3. מנכונותה עבור 3 נובעת נכונותה עבור 4, וכו"ל.

לאורך ההיסטוריה נימקו המתמטיקאים הוכחות אינדוקטיביות על-פי דרך זו, לפני שהעיקרון נוסח באופן פורמאלי במאה ה- 19.



> מה שגורם לספק במהימנות של הוכחה בעזרת אינדוקציה, בקרב תלמידים, היא הדרישה שאם טענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו והיא נכונה עבור המספר הבא אחריו, אז היא נכונה לכל מספר.

דרך אחרת היא להוכיח את עיקרון האינדוקציה. ההוכחה היא בדרך השלילה.

נניח שקיים מקרה בו טענה כלשהי הוכחה באמצעות אינדוקציה שגויה. כלומר, לגבי אותה טענה קיים ערך כזה שעבורו הטענה איננה מתקיימת. יהי m הערך המינימלי שעבורו הטענה אינה תקפה.

שלב בדיקת בסיס האינדוקציה אישש את הטענה עבור 1, לכן $m > 1$. ובכן, הטענה שלנו מתקיימת עבור $1, 2, \ldots (m-1)$ ואילו עבור m היא לא מתקיימת.

לפי שלב צעד האינדוקציה על סמך נכונות הטענה עבור k, ניתן לקבוע את נכונותה עבור $(k+1)$, ובפרט, אם נציב במקום k את $m-1$, נקבל שהטענה מתקיימת גם עבור $m = k+1$. הגענו לסתירה עם ההנחה שעבור m הטענה לא מתקיימת.

ובכן, ההנחה שהטענה לא מתקיימת עבור m כלשהו הביאה אותנו לסתירה. ובאופן יותר כללי, ההנחה שקיים מקרה שבאמצעות

עיקרון האינדוקציה אפשר להוכיח טענה שגויה, מביאה לסתירה. הסתירה הזאת מאוששת את עיקרון האינדוקציה.

אחרי שראינו את ההוכחה, נשאלת השאלה מה הטעם להכניס את עיקרון האינדוקציה כאקסיומה?

התשובה היא שבהוכחה לעיל השתמשנו בעיקרון אחר, עקרון המספר המינימלי, אשר קובע שאם יש מספרים טבעיים בעלי תכונה כלשהי, אז קיים מספר מינימלי בעל אותה תכונה. במקרה שלנו התכונה של המספרים האלה היא, שעבורם לא מתקיימת הטענה שהוכחה באינדוקציה.

עיקרון המספר המינימלי הזה מאוד ברור מבחינה אינטואיטיבית על סמך ההיכרות שלנו עם המספרים הטבעיים, ולכן נראה לי שעדיף להשתמש בו לצורך שכנוע תלמידים בנכונות עיקרון האינדוקציה. אך יש לזכור ששני העקרונות, עיקרון האינדוקציה ועיקרון המספר המינימלי, הם שווי עוצמה (כל אחד נובע מהשני), לכן את עיקרון האינדוקציה אפשר גם לקבל כאקסיומה (ולהוכיח באמצעותו את עיקרון המספר המינימלי).

החלק של האינדוקציה מסתכם בהגעה לנוסחה, לפני ההוכחה, ואילו ההוכחה עצמה היא בשיטה הדדוקטיבית הנהוגה במתמטיקה.

נקודה חשובה בנוגע לשימוש בעיקרון האינדוקציה היא שבאמצעותו מוכיחים טענות שהגיעו אליהן בדרך אחרת, למשל, על-ידי התבוננות במקרים פרטיים והכללת המסקנה למקרה הכללי. כלומר, החלק של האינדוקציה במשמעותה המילולית (מעבר מהפרט אל הכלל) מסתכם בהגעה לביטוי האלגברי. החלק הזה מסתיים לפני ההוכחה, ואילו ההוכחה עצמה היא בשיטה הדדוקטיבית הנהוגה במתמטיקה. כלומר, למרות השם "אינדוקציה", למעשה העיקרון הנדון הוא דדוקטיבי: בצעד האינדוקציה מוכיחים, שמעבר מנכונות הטענה עבור מספר כלשהו לנכונותה עבור המספר הבא, נכון עבור כל מספר!

כדי להבדיל את השיטה המתמטית מזו של מדעי הטבע, האינדוקציה הנהוגה במתמטיקה נקראת אינדוקציה מלאה (כלומר, המכסה את כל המקרים). זאת בניגוד לאינדוקציה לא מלאה שבאמצעותה מתקבלים חוקים של מדעי הטבע. חוקי הטבע מנוסחים על סמך ניסיון בלבד, ועלולים להתגלות כלא נכונים במקרים מסוימים (זאת דרכה של הפיזיקה, לגלות חוקים חדשים ולצמצם את טווח התקיפות של החוקים הקיימים). טענות המוכחות על-ידי אינדוקציה מתמטית (מלאה) אינן יכולות להימצא כבלתי נכונות.

כדי להשתמש בעיקרון האינדוקציה להוכחות של טענות ספציפיות יש צורך לתרגם את הביטויים "מספר טבעי כלשהו" ו"המספר הבא" לסימנים מתמטיים. להלן ניסוח עיקרון האינדוקציה המתמטית שישמש אותנו בהוכחות.

אם טענה על אודות מספרים טבעיים מקיימת את שתי הדרישות הבאות:

א. הטענה נכונה עבור $n=1$;

ב. מכך שהטענה מתקיימת עבור $n=k$ (עבור n שווה ל- k טבעי כלשהו) נובע שהיא מתקיימת עבור $n=k+1$;

אז הטענה נכונה עבור כל n טבעי.

בניסוח המסורתי של עיקרון האינדוקציה, כפי שהוא מובא לעיל, מופיעים שני סימנים, k המסמן מספר ספציפי ו- n המסמן "מספר רץ". ההבדל הזה מתבטא בהיעדר סימטריות מבחינת הכתיבה: בדרך כלל יחס השוויון "=" הוא סימטרי, אך לא כך במקרה שלפנינו. כאשר רושמים $n=k$ יכול להתקבל רושם שמותר לרשום גם $k=n$; הביטוי האחרון חסר משמעות במקרה שלנו. כדי לא לטעות, אפשר להשתמש באחת משלוש הדרכים הבאות:

1. נוסח חילופי של שתי הדרישות ללא איזכור של n בדרישה ב':

אם טענה על אודות מספרים טבעיים מקיימת את שתי הדרישות הבאות:

א. הטענה נכונה עבור $n=1$;

ב. מכך שהטענה מתקיימת עבור k $(k\geq 1)$ נובע שהיא מתקיימת עבור $k+1$;

אז היא נכונה עבור כל מספר טבעי (עבור כל n טבעי).

2. במקום שימוש בסימנים לרשום: "עבור n שווה ל- k" במילים.

3. למעשה, מדובר כאן לא בשוויון אלא בפעולת השמה, לכן אפשר לרשום $n:=k$ (המשתנה n מקבל ערך k). פעולת ההשמה הופיעה לראשונה במדעי המחשב, בשנים האחרונות משתמשים לפעמים בסימן ההשמה גם בספרות המתמטית. ההבדל בין יחס שוויון להשמה הוא: בשוויון קיימת סימטריות ובהשמה לא קיימת סימטריות.

הוכחה באינדוקציה מורכבת משני שלבים:

שלב א' נקרא בסיס האינדוקציה; ושלב ב' נקרא צעד האינדוקציה. ישנם ספרי לימוד שמחלקים את שלב ב' לתת-שלבים. למשל חלוקה לשלושה שלבים: ניסוח ההנחה, ניסוח הטענה שיש להוכיח עבור $k+1$ וההוכחה עצמה. אין ספק שבשלב של צעד האינדוקציה יש לבצע את כל הפעולות הנזכרות למעלה, אין זה עקרוני אם להקצות לכל אחד מהן סעיף מיוחד משלו או לא. נושא זה מוזכר כאן משום שכתוצאה מחוסר הביטחון של חלק

מהתלמידים בשיטת האינדוקציה, קיימת תופעה של הפרדה בין "עיקרון האינדוקציה של מורה/ספר פלוני" מול "עיקרון האינדוקציה של מורה/ספר אלמוני", שההבדל בינהם הוא בניסוחים המופיעים בהוכחה. לכן, כדאי שמורה המציג את עיקרון האינדוקציה בדרך מסוימת, יזכיר במהלך הדיון בנושא שקיימים גם ניסוחים אחרים, ומאידך ידגיש שכל הוכחה באינדוקציה מורכבת משני שלבים בסיסיים.

הוכחת אי-שוויונות באינדוקציה

אחד מהנושאים המרכזיים בשימוש באינדוקציה בבתי ספר הוא הוכחת אי-שוויונות. קיימות מספר דרכים להוכחת אי-שוויון באינדוקציה. דרך אחת עשויה להיות מסובכת מבחינה לוגית מדרך אחרת. שינויים קטנים לכאורה בכתיבת ההוכחה, גורמים לכך שהיא הופכת ללא נכונה (נושא זה נידון כאן בהרחבה משום שנתקלתי בקרב בוגרי תיכון בחוסר הבנה של הנושא).

צריך להדגיש כי קיים הבדל בין הוכחת אי-שוויון לבין פתרון אי-שוויון. כאשר פותרים אי-שוויון, קיומו **נתון**, והשאלה היא עבור אילו ערכים של הנעלמים מתקיים האי-שוויון. בהוכחת אי-שוויון עצם קיומו של היחס אי-שוויון בין שני אגפים מוטל בספק, כל עוד הוא לא הוכח.

השיטה המקובלת לפתור אי-שוויון היא טיפול בשני האגפים במקביל. את התוצאות רושמים בשורה מתחת. הנחת היסוד מאחורי השיטה היא שהאי-שוויונות בכל השורות **שקולים** זה לזה (כלומר, מתקיימים עבור אותם ערכים של נעלמים).

המבנה הלוגי של הוכחה אשר מטפלים בה במקביל בשני האגפים של האי-שוויון, שאותו יש להוכיח, הוא מסובך, משום שהאי-שוויונות בשורות השונות, אינם בהכרח שקולים זה לזה.

השיטה המומלצת להוכיח אי-שוויונות היא **שיטת השרשרת:** דהיינו, ההוכחה היא על-ידי שרשרת של שוויונות ואי-שוויונות. כך שבצד אחד של השרשרת מופיע אגף אחד של האי-שוויון, ואילו בצד השני האגף השני שלו. יש להקפיד ולתת הנמקות למעברים בשרשרת (במיוחד לאלה שאינם מניפולציות אלגבריות של הביטוי הקודם).

שיטה שנייה (אשר במקרים מסוימים עשויה להיות פשוטה יותר מבחינה אלגברית) היא, לצאת מהאי-שוויון שהנחנו את נכונותו (עבור k) וממנו להגיע לאי-שוויון אותו אנו מוכיחים (עבור $k+1$).

קיימת **שיטה** נוספת, ה**שלישית**, שהמבנה שלה דומה לזה של פתרון אי-שוויון. בשיטה הזאת עובדים עם האי-שוויון שיש להוכיח, ושואפים להראות שהוא נובע מאיזשהו אי-שוויון תקף, כלומר, שקיים אי-שוויון תקף שקול לו או חזק ממנו. לעתים מעדיפים תלמידים את השיטה הזאת, מפני שהיא מזכירה את שיטת הפתרון של אי-שוויונות (במקרים רבים העדפה זו נובעת מבלבול בין משמעויות של פתרון והוכחה של אי-שוויון). השיטה הזאת מסובכת מבחינה לוגית ולא מומלצת בדרך כלל.

בהמשך מוצגות השיטות השונות באמצעות דוגמאות. בדוגמה 1 נציג שתי הוכחות לפי שתי השיטות הראשונות, בדוגמה 2 נדגים את השיטה השלישית ונדון בבעייתיות שלה. בדוגמה 3 נראה מקרה שבו שימוש באי-שוויון עבור k כנקודת ההתחלה (שיטה שנייה) עדיף על שיטת השרשרת.

השיטה המומלצת להוכחת אי-שוויונות היא שיטת השרשרת.

דוגמה 1

נוכיח שעבור כל $n \ge 1$ טבעי מתקיים: $(1+a)^n \ge 1+na$ כאשר $a>-1$.

הוכחה בשיטת השרשרת

1) עבור $n=1$ נקבל: $(1+a)^1 \ge 1+1\cdot a$

מסקנה: הטענה נכונה עבור $n=1$.

2) נניח שהטענה נכונה עבור k, כלומר, מתקיים: $(1+a)^k \ge 1+ka$ ונוכיח את נכונות הטענה עבור $k+1$, כלומר, צריך להוכיח, כי מתקיים: $(1+a)^{k+1} \ge 1+(k+1)a$

הוכחה

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a) \ge^{\mathrm{I}} (1+ka)(1+a)$$

$$= 1+(k+1)a+ka^2 \ge^{\mathrm{II}} 1+(k+1)a$$

I. בגלל העובדה ש-$a>-1$, הביטויים באי-שוויון חיוביים, ולכן הקטנת אחד מגורמי המכפלה (לפי הנחת האינדוקציה) מקטינה את המכפלה כולה.

II. הושמט איבר אי-שלילי, לכן הערך בצד ימין קטן או שווה לזה בצד שמאל. (השתמשנו בביטוי "איבר אי-שלילי" כי אם $a=0$ האיבר שהושמט שווה ל-0, לכן אי-אפשר להגיד שהוא חיובי.)

בהוכחה בשיטה השנייה, נשתמש בנכונות האי-שוויון עבור k שאת נכונותו הנחנו.

(1) $(1+a)^k \ge 1+ka$

נכפיל את שני האגפים ב-$(1+a)$, שהוא ביטוי חיובי (לפי הנתון, $a>-1$) נקבל:

(2) $(1+a)^{k+1} \ge (1+ka)(1+a)$

(3) $(1+a)^{k+1} \ge 1+ka+a+ka^2$

כאשר פותרים אי-שוויון קיומו נתון, והשאלה היא עבור אילו ערכים של הנעלמים מתקיים האי-שוויון. בהוכחת אי-שוויון עצם קיומו של היחס אי-שוויון בין שני אגפים מוטל בספק, כל עוד הוא לא הוכח.

המחובר האחרון באגף הימני הוא אי-שלילי, לכן אם נשמיט אותו, אי-השוויון יישאר תקף (אבל לא שקול לאי-שוויון (3)).

$$(4)\ (1+a)^{k+1} \ge 1+ka+a$$

$$(5)\ (1+a)^{k+1} \ge 1+(k+1)a$$

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $k+1$ ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

להלן הצגה של שרשרת המעברים הלוגיים בין השורות בהוכחה בעזרת חיצים: חץ דו-כיווני פירושו כי שתי השורות שקולות, חץ חד-כיווני פירושו שהשורה שאליה מכוון החץ נובעת מהשורה שממנה יוצא החץ, אך לא להפך.

$$\textbf{(1)} \Leftrightarrow \textbf{(2)} \Leftrightarrow \textbf{(3)} \Rightarrow \textbf{(4)} \Leftrightarrow \textbf{(5)}$$

הערה: הוכחה זו ללא ההסברים המלווים (ובמיוחד ללא הטיעון הרשום בין (3) ל- (4)) הייתה שגויה, מכיוון שכאשר רושמים אי-שוויונות אחד מתחת לשני (כפי שמקובל בפתרון של אי-שוויונות), מתכוונים לכך שהאי-שוויונות הרשומים בשורות השונות שקולים זה לזה, ואילו כאן הם אינם שקולים. אי-שוויון (3) חזק מאי-שוויון (4).

הוכחה ללא סימני שאלה (או סימון דומה), וללא הדגשה של היעדר מצב שקול בין (2) ל- (3), היא פגומה מבחינה לוגית!

דוגמה 2

נוכיח שעבור כל $n \ge 1$ טבעי מתקיים:

$$(1-a)^n < \frac{1}{1+na}$$

כאשר $0<a<1$.

הוכחה בשיטת השרשרת:

עבור $n=1$ צריך לוודא שמתקיים:

$$(1-a)^1 < \frac{1}{1+1\cdot a}$$

ובכן:

$$1-a =^{\mathrm{I}} \frac{(1-a)(1+a)}{1+a} = \frac{1-a^2}{1+a} <^{\mathrm{II}} \frac{1}{1+a}$$

I. הכפלנו מונה ומכנה באותו גורם השונה מ- 0 ;

II. הגדלנו את המונה על-ידי השמטת ביטוי שלילי $(-a^2)$;

מסקנה: הטענה נכונה עבור $n=1$.

נניח שהטענה נכונה עבור k, כלומר: $(1-a)^k < \frac{1}{1+ka}$, ונוכיח את נכונות הטענה עבור $k+1$.

כלומר, צריך להוכיח:

$$(1-a)^{k+1} < \frac{1}{1+(k+1)a}$$

$$(1-a)^{k+1} = (1-a)^k(1-a) <^{\mathrm{I}}$$

$$\frac{(1-a)}{1+ka} =^{\mathrm{II}} \frac{(1-a)}{1+ka}\cdot\frac{1+(k+1)a}{1+(k+1)a} =$$

$$\frac{1-a+ka+a-(k+1)a^2}{(1+ka)\left[1+(k+1)a\right]} =$$

$$\frac{1+ka}{(1+ka)\left[1+(k+1)a\right]} - \frac{(k+1)a^2}{(1+ka)\left[1+(k+1)a\right]} <^{\mathrm{III}}$$

$$\frac{1+ka}{(1+ka)\left[1+(k+1)a\right]} = \frac{1}{1+(k+1)a}$$

I. על סמך הנחת האינדוקציה תוך שימוש בעובדה ש- $1-a>0$, אשר מבטיחה שהביטויים באי-שוויון הם חיוביים.

II. הכפלנו מונה ומכנה באותו גורם השונה מ- 0.

III. הגדלנו את הביטוי על-ידי השמטת המחובר השלילי.

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $k+1$. לכן, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

כעת נציג את **השיטה השנייה** המבוססת על טיפול באגפים של האי-שוויון:

$$(1)\ (1-a)^{k+1} \overset{?}{<} \frac{1}{1+(k+1)a}$$

נרשום את אגף שמאל בצורה המתאימה לשימוש בהנחת האינדוקציה:

$$(2)\ (1-a)(1-a)^k \overset{?}{<} \frac{1}{1+(k+1)a}$$

לפי הנחת האינדוקציה, קיים:

$$(1-a)^k < \frac{1}{1+ka}$$

לכן מספיק להוכיח את האי-שוויון:

$$(3)\quad \frac{1-a}{1+ka} \overset{?}{<} \frac{1}{1+(k+1)a}$$

הביטוי שבאגף שמאל של האי-שוויון (3) גדול מהביטוי שבאגף שמאל של האי-שוויון (1). לכן האי-שוויון (3) חזק מהאי-שוויון (1). מכאן נובע, אם נוכיח את האי-שוויון (3), נוכל להסיק ממנו את נכונותו של האי-שוויון (1).

כדי להוכיח את האי-שוויון (3), נכפיל את המונה ואת המכנה של אגף ימין ב- $(1-a)$. (פעולה זו מותרת כי נתון ש- $a \ne 1$) נקבל:

$$(4)\quad \frac{1-a}{1+ka} < \frac{1-a}{(1-a)(1+(k+1)a)}$$

המונים של שני האגפים שווים, ולכן, כיוון שהביטויים חיוביים, מספיק להוכיח שהמכנה של הביטוי באגף שמאל גדול מזה אשר באגף ימין, כלומר:

$$(5)\quad 1+ka \overset{?}{>} [1+(k+1)a](1-a)$$

או:

$$(6)\quad 1+ka \overset{?}{>} 1-a+(k+1)a-(k+1)a^2$$

נעביר את אגף שמאל לאגף ימין ונקבל שהאי-שוויון (6) שקול לאי-שוויון:

$$(7)\quad 0 > -(k+1)a^2$$

אי-שוויון זה תקף משום שבאגף ימין מופיע ביטוי שלילי. מתקפותו של האי-שוויון (7) אפשר להסיק שגם האי-שוויון (6) תקף, ואז גם האי-שוויון (5) תקף וכו'. בסופו של דבר מקבלים שגם האי-שוויון (1) תקף.

את הלוגיקה של ההוכחה הזאת אפשר להציג באמצעות חצים באופן הבא:

$$\mathbf{(7) \Leftrightarrow (6) \Leftrightarrow (5) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (3) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (1)}$$

נשים לב לחץ החד-כיווני בשרשרת המעברים. המבנה הלוגי של ההוכחה הוא מהסוף להתחלה. כיוון זה מסובך יותר להבנה, מאשר הכיוון הטבעי שהוא מההתחלה אל הסוף. כל האי-שוויונות שרשמנו במהלך ההוכחה הופיעו עם סימן שאלה מפני שתקפותם עדיין לא הוכחה.

הוכחה ללא סימני שאלה (או סימון דומה), וללא הדגשה של היעדר מצב שקול בין (2) ל- (3), היא פגומה מבחינה לוגית!

דוגמה 3

קיימים מקרים בהם הוכחה בשיטה אחת פשוטה וטבעית יותר משיטה אחרת. את הטענה הבאה לא נוח להוכיח בשיטת השרשרת, והדרך הטבעית להוכחתה היא תוך שימוש באי-שוויון שאת נכונותו מניחים בצעד האינדוקציה.

נוכיח שעבור $n \ge 2$ טבעי ועבור כל שני מספרים ממשיים a ו- b השונים זה מזה ומקיימים $a+b>0$, מתקיים האי-שוויון: $2^{n-1}(a^n+b^n) > (a+b)^n$, כאשר $a+b>0$ ו- $a \ne b$.

הוכחה

1) עבור $n=2$ יש לוודא ש- $2(a^2+b^2) > (a+b)^2$.

אי-שוויון זה שקול לאי-שוויון: $2(a^2+b^2)-(a+b)^2 > 0$.

ואי-שוויון זה אכן תקף, כי:

$$2(a^2+b^2)-(a+b)^2 = 2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab$$

$$= a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 > 0$$

מסקנה: הטענה נכונה עבור $n=2$.

2) נניח שהטענה נכונה עבור k, כלומר:

$$2^{k-1}(a^k+b^k) > (a+b)^k$$

ונוכיח את הטענה עבור $k+1$, כלומר, צריך להוכיח, כי:

$$(1)\quad 2^k(a^{k+1}+b^{k+1}) > (a+b)^{k+1}$$

לפי הנחת האינדוקציה, מתקיים:

$$2^{k-1}(a^k+b^k) > (a+b)^k$$

נכפיל את שני האגפים של האי-שוויון ב- $(a+b)$. (מותר לעשות זאת בגלל הנתון: $(a+b)>0$) נקבל:

$$2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b) > (a+b)^{k+1}$$

על מנת להשלים את ההוכחה מספיק להראות שמתקיים האי-שוויון הבא:

$$2^k(a^{k+1}+b^{k+1}) > 2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)$$

או:

$$(2)\quad 2(a^{k+1}+b^{k+1})-(a^k+b^k)(a+b) > 0$$

ובכן:

$$2(a^{k+1}+b^{k+1})-(a^k+b^k)(a+b) =$$

$$= 2a^{k+1}+2b^{k+1}-a^{k+1}-ba^k-ab^k-b^{k+1} =$$

$$= a^{k+1}+b^{k+1}-ba^k-ab^k = (a-b)(a^k-b^k)$$

קיימים שני מקרים:

אם $a<b$ אז גם $a^k<b^k$ כלומר, המכפלה חיובית;

אם $a>b$ אז גם $a^k>b^k$, גם כאן המכפלה חיובית;

כלומר, בכל המקרים מתקיים:

$$2(a^{k+1}+b^{k+1})-(a^k+b^k)(a+b) = (a-b)(a^k-b^k) > 0$$

ומכאן מתקבל האי-שוויון (2), שהיינו צריכים להוכיח כדי להסיק את תקפותו של האי-שוויון (1).

במאמר זה הצגנו את עקרונות ההוכחה באינדוקציה, וכפי שנאמר בתחילה, למאמר זה חלק שני העוסק בהרחבת עיקרון האינדוקציה ובדוגמאות נוספות. החלק השני יפורסם בגיליון הבא.

מקורות

מובשוביץ-הדר, נ' (1993). אינדוקציה מתמטית – אתגרי חשיבה לחידוד ההבנה. *על"ה 13*, 66-57.

פרק על אינדוקציה מאת המחבר מופיע בספר "פרקים באלגברה" (מתמטיקה לחטיבה עליונה, 5 יחידות לימוד), האוניברסיטה העברית בירושלים, המרכז להוראת מדעים, תשס"ז.

ד"ר אלכס חייט

המרכז להוראת המדעים באוניברסיטה העברית,
והמכללה האקדמית להנדסה בירושלים.
תחומי מחקר עיקריים: מתמטיקה שימושית, היסטוריה ופילוסופיה של המתמטיקה, וההשפעה של מהפכת המחשבים על ההכשרה המתמטית.
khait@vms.huji.ac.il