משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
תאגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים

אוניברסיטת חיפה
הפקולטה לחינוך

מטה מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי
المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

טענה מתחום האלגברה- איך פיתגורס היה מנסח?

מדור: זרקור מהעבר

כתב: אבי סיגלר

תקציר: לאחרונה עוסקים אנשי החינוך המתמטי בחיזוק השילוב שבין תחומים שונים במתמטיקה. במאמר זה, מציג המחבר בעיה בנושא טכניקה אלגברית טהורה, המנוסחת וניתנת לפתרון בדרכים של גיאומטריה אוקלידית.

מילות מפתח: טכניקה אלגברית, דמיון משולשים, סכום זוויות במשולש, הצבה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 39, תשס"ח 2008, עמוד 34.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע ע"י אוניברסיטת חיפה עפ"י מכרז מס' **6/1.07**
הפרויקט מבוצע עבור האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים, המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי –- הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל' 04-8288351 פקס. 04 - 8240757
דוא"ל: hmathcntr@construct.haifa.ac.il אתר: http://highmath.haifa.ac.il

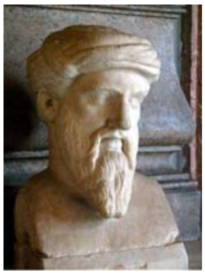
טענה מתחום האלגברה - איך פיתגורס היה מנסח?

אבי סיגלר

הקדמה

בעת האחרונה מוקדשת מחשבה רבה לדרכי שילוב של תחומים שונים בהוראת המתמטיקה והצגתם כנושא אחד. קיימת תחושה כי שילוב זה חסר במידת מה בתכנית הלימודים הסטנדרטית, הנהוגה בבתי הספר. במאמר זה מוצגת דוגמה מובהקת ליצירת הקישוריות בתחום המתמטיקה בין הנושאים השונים הנלמדים.

להלן מוצגת הוכחה גיאומטרית לטענה אלגברית, שבדרך כלל מוכחת בעזרת טכניקה אלגברית ברמה של כיתות ט-י. ההוכחה הגיאומטרית מורכבת מארבע טענות עזר והוכחתן.



פיתגורס (582 לפנה"ס - 496 לפנה"ס בקירוב)

הטענה

אם a,b,c מספרים חיוביים ומתקיים:

(1) $a^2+ac=b^2$

(2) $b^2+ab=c^2$

אז מתקיים: (3) $a^2+bc=c^2$

הפתרון האלגברי

הפתרון המוצג כאן הוא אחת מכמה דרכי פתרון אפשריות (ברמה של תלמיד כיתה י):

נחלץ את c מ- (1) ונקבל: (4) $c=\dfrac{b^2-a^2}{a}$

נציב את הביטוי שקיבלנו עבור c ב- (2) ונקבל:

$$b^2+ab=\frac{(b^2-a^2)^2}{a^2}$$

$$b(a+b)=\frac{(b-a)^2(b+a)^2}{a^2}$$

משום ש- a ו- b חיוביים, $b+a\neq 0$, לכן:

$$b=\frac{(b-a)^2(b+a)}{a^2}$$

נפתח סוגריים, נכנס איברים דומים ונקבל:

(5) $b^3-b^2a-2a^2b+a^3=0$

נסמן: $a^2+bc-c^2=M$, ונוכיח ש- $M=0$ (ובכך הוכחנו את הטענה).

נציב במקום c את: $\dfrac{b^2-a^2}{a}$ מ (4), ובמקום c^2 את b^2+ab מ- (2).

נקבל:

$$M=a^2+\frac{b(b^2-a^2)}{a}-(b^2+ab)$$

מ- (5) נקבל:

$$M=\frac{a^3+b^3-a^2b-b^2a-a^2b}{a}=\frac{a^3-2a^2b-b^2a+b^3}{a}=0$$

וכאמור, מכאן נובע ש: $a^2+bc=c^2$

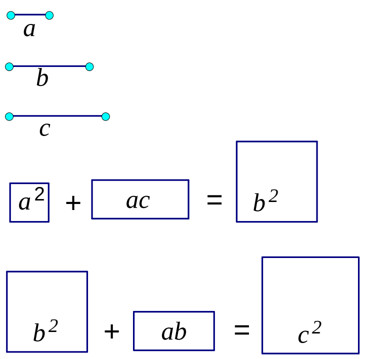
כעת נעביר את הבעיה לבעיה מתחום הגיאומטריה, ונשאל: "איך פיתגורס היה מנסח את הבעיה, לו היה חי כיום?"

ביוון העתיקה a^2 פירושו היה: שטח הריבוע ששטחו a, ו- bc פירושו היה: שטח מלבן שצלעותיו b ו- c. ולכן סביר להניח שפיתגורס היה נותן לבעיה גוון גיאומטרי.

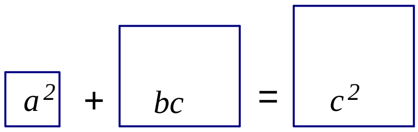
הטענה בניסוחה הגיאומטרי:

נתונים שלושה **קטעים** שאורכיהם a,b ו- c,

ולגביהם מתקיים:



צריך להוכיח ש:



(הסימון בתוך הריבועים והמלבנים הוא בכתב מודרני, היוונים היו משתמשים, כנראה, רק בציור המרובעים.)

ההוכחה הגיאומטרית

ההוכחה מכילה ארבע טענות עזר, שאחריהן מופיעה הוכחת הטענה המרכזית.

טענה 1: קיים $c>b>a$.

הוכחה: מ- (1) נובע ש: $b>a$ ומ- (2) נובע ש: $c>b$.

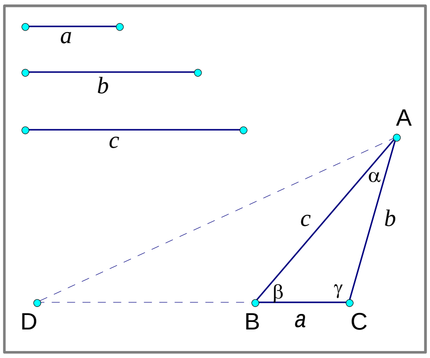
טענה 2: קיים $a+b>c$.

הוכחה: נתון כי: $b^2+ab=c^2$ (2)

מטענה (1): $c>b$, לכן ברור ש: $a+b>c$, כי $(a+b)b=c^2$.

מסקנה: מן הקטעים a,b ו- c אפשר ליצור משולש (שילוב של טענות 1 ו-2).

טענה 3: אם במשולש ABC, שצלעותיו a,b,c וזוויותיו α,β,γ מתקיים: $a^2+ac=b^2$ (1), אז: $\beta=2\alpha$.



סרטוט 1

הוכחה: נאריך את CB עד D כך ש: $BD=AB$ (ראה סרטוט 1). לכן: $DC=a+c$. אבל לפי הנתון קיים: $a(a+c)=b^2$.

לכן: $\frac{b}{a}=\frac{a+c}{b}$ כלומר $\frac{DC}{AC}=\frac{AC}{BC}$.

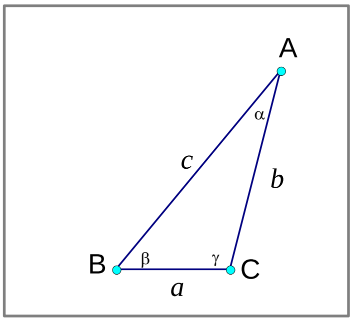
לכן לפי משפט הדמיון הראשון: $\Delta ABC\sim\Delta DAC$.

ואז: $\sphericalangle D=\alpha$. אבל $DB=AB$ (בניית העזר), ומכאן: $\beta=2\alpha$. מ.ש.ל.

טענה 4: אם במשולש ΔABC שצלעותיו a,b,c וזוויותיו α,β,γ מתקיים:

$$a^2+ac=b^2$$
$$b^2+ab=c^2$$

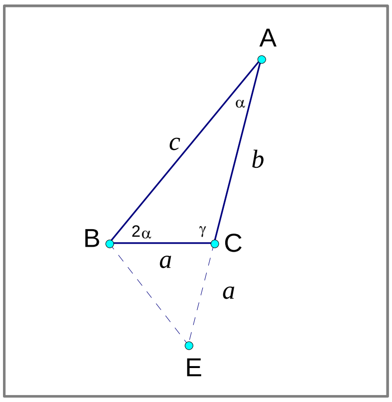
אז: $\gamma=4\alpha$ (ראה סרטוט 2).



סרטוט 2

הוכחה:

לפי טענה 3: $\beta=2\alpha$, נמשיך את AC עד E כך ש: $BC=CE=a$ (ראה סרטוט 3), לפי הנתון קיים: $b^2+ab=c^2$.



סרטוט 3

לכן: $b(a+b)=c^2$ מכאן נובע: $\frac{b}{c}=\frac{c}{a+b}$.

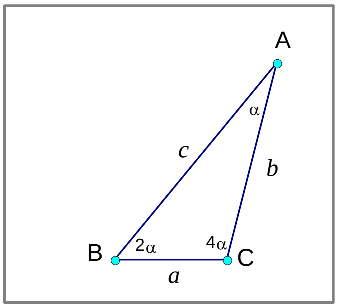
באותו אופן (כמו בהוכחת טענה 3): $\Delta ABC\sim\Delta AEB$. לכן $\sphericalangle E=2\alpha$. אבל המשולש BCE שווה-שוקיים, ומכאן, $\gamma=4\alpha$. מ.ש.ל.

מסקנה מטענות 4-1:

אם a,b,c שלושה קטעים המקיימים את הקשרים:

$$a^2+ac=b^2$$
$$b^2+ab=c^2$$

אז מהקטעים a,b,c אפשר ליצור משולש שזוויותיו $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$, וגודלן הוא: $\alpha, 2\alpha, 4\alpha$, ולכן: $7\alpha=180^\circ$, ו- $\alpha=\frac{180^\circ}{7}$ (ראה סרטוט 4).



סרטוט 4

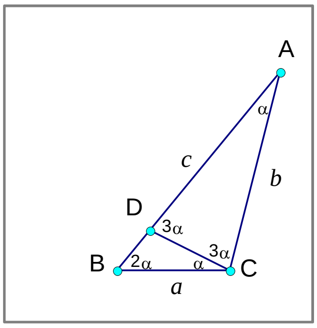
עתה נחזור לטענה המרכזית ונוכיח אותה.

הוכחת הטענה המרכזית

יש להוכיח כי:

$$\begin{cases} a^2+ac=b^2 \\ b^2+ab=c^2 \end{cases} \Rightarrow a^2+bc=c^2$$

הוכחה (ראה סרטוט 5).



סרטוט 5

נקצה על AB את הקטע AD כך ש: $AD=AC=b$. $(c>b)$. לכן אורכו של הקטע BD הוא: $c-b$.

המשולש ΔADC שווה-שוקיים, בעל זווית הראש α, ולכן כל אחת מזוויות הבסיס היא בת 3α (כי הוכח ש: $\alpha=\frac{180^\circ}{7}$), ולכן: $\measuredangle C=4\alpha$ $\sphericalangle DCB=\alpha$.

מכאן נובע כי: $\Delta BCD \sim \Delta BAC$ ומתקיים הקשר:

$$BC^2=BD\cdot BA$$

כלומר: $a^2=(c-b)c$.

ומכאן נובע: $a^2+bc=c^2$. מ.ש.ל.

נוכחנו כאן בשילוב בין תחומי המתמטיקה: גיאומטריה הנחלצת לעזרת הוכחה באלגברה, ואלגברה המספקת בעיות מאתגרות בגיאומטריה.

ד"ר אבי סיגלר
בית הספר הטכני של חיל האוויר חיפה,
מנהל פדגוגי ומורה למתמטיקה.