משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
תאגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים

אוניברסיטת חיפה
הפקולטה לחינוך

מטה מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי
المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

משחקים כסביבה להצגת מושגים ומשפטים מתמטיים ולפתרון בעיות

חלק ראשון

מדור: אפשר גם אחרת

כתבה: נצה מובשוביץ-הדר

תקציר: מאמר זה הוא חלקו הראשון של מאמר המציג שלוש דוגמאות למשחקים. באופן טבעי יש במשחק משום יצירת יחס אוהד ללמידה ותוך כדי נוצרת תשתית אינטואיטיבית להבנת מושגים מתמטיים מורכבים כגון: פולינומים וטורים גיאומטריים. המשחקים המודגמים כאן הם " קפיצות על לוח דמקה" ו" צביעה של מפות". בחלק השני יודגם משחק נוסף.

מילות מפתח: משחק, מספר מינימאלי , קפיצות, לוח הדמקה, פולינומים, טור גיאומטרי, צביעת מפות, מהלך חוקי.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 39, תשס"ח 2008, עמוד 44.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 8 עמודים.

משחקים כסביבה להצגת מושגים ומשפטים מתמטיים ולפתרון בעיות חלק א

נצה מובשוביץ–הדר

בהיות משחק פעילות חביבה על רוב בני האדם ועל הצעירים שבהם במיוחד, הסביבה המשחקית היא קרקע נוחה ליצירת יחס אוהד ללמידה.

מאמר זה הוא חלק ראשון של מאמר, המציג שלוש דוגמאות הממחישות את הרעיון, כי ניתן לבנות תשתית אינטואיטיבית איתנה למשפטים ולמושגים מתמטיים רבים, תוך כדי משחק המתוכנן למטרה זו.

בחלק זה של המאמר יוצגו שני משחקים: "קפיצות על לוח דמקה" ו"צביעה של מפות". במאמר ההמשך, שיופיע בגיליון הבא, יוצג משחק נוסף, ה"משחק של סר-פינסקי".

משחק ראשון - קפיצות על לוח דמקה

זהו משחק לשניים על שני לוחות רגילים של משחק "דמקה", שבו מתחילים ממספר כלשהו של "חיילים", ומבצעים "קפיצות" ו"הורדה" מהלוח של החיילים, כמקובל במשחק דמקה. המטרה של כל שחקן היא להעביר את חייליו אל הלוח של המשתתף השני. מסתבר שזוהי משימה לא פשוטה המתקשרת, באורח מפתיע, לחתך הזהב ולמשפט על התכנסות של טור גיאומטרי. ההשראה לפיתוח המשחק הזה היא מהספר של Ross Honsberger (1976).

הערך הלימודי: פתרון בעיות, העלאת השערות, הוכחה/הפרכה, פולינומים, התכנסות של טור גיאומטרי, יחס הזהב.

מספר המשתתפים: שני שחקנים.

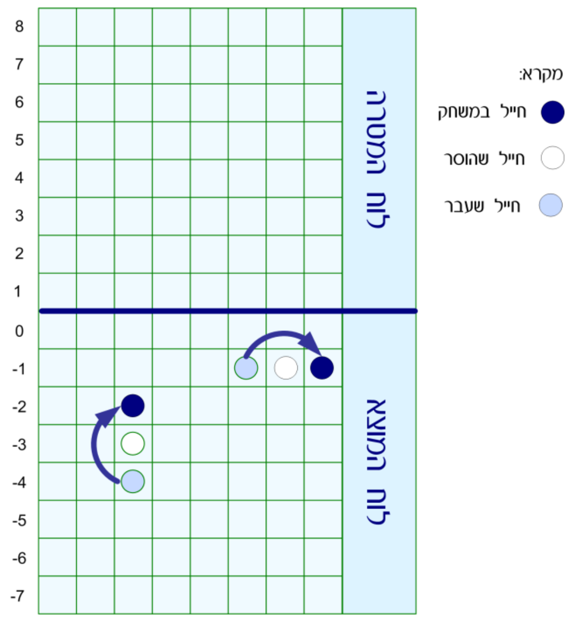
העזרים הנחוצים: שני לוחות דמקה (8x8 משבצות בשחור-לבן) ו- 20 חיילים בכל צבע.

כללי המשחק: המשחק נערך על שני לוחות צמודים זה לזה.

כל שחקן יושב כשהלוח שלו לפניו. לכל שחקן יש חיילים בצבע משלו, שונה מזה של היריב. לכל שחקן מותר להניח את החיילים שלו על כל משבצת על הלוח שלו.

כל שחקן בתורו מבצע מהלך חוקי אחד בחיילים שלו. מהלך חוקי הוא העברת חייל אחד מעל לחייל אחר בכיוון אופקי או אנכי (אבל לא באלכסון), והסרה מהלוח של החייל שמעליו עבר, בקיצור: "קפיצה".

באיור 1 מוצגות לדוגמה שתי קפיצות כאלה. עיגול בצבע תכלת מייצג את המיקום ההתחלתי של החייל העובר, עיגול בצבע לבן מייצג חייל שהוסר במהלך הקפיצה, ועיגול בצבע כחול מייצג את המיקום הסופי של החייל העובר לאחר הקפיצה. בסוף המהלך רק העיגול הכחול מייצג חייל שנשאר על הלוח.



איור 1

במהלך המשחק ייתכן מצב בו חייליו של שחקן אחד מגיעים אל הלוח של היריב. יכול גם לקרות שעל אותה משבצת ניצבים שני חיילים - אחד של כל שחקן. החייל היורד מהלוח הוא רק מאותו צבע של החייל שעובר מעליו. אפשר לשחק בכל אחת משתי הגרסאות הבאות:

גרסה ראשונה

שני השחקנים מחליטים יחד על מספר החיילים ההתחלתי. כל אחד שם מספר זה של חיילים על הלוח שלו, במערך כרצונו. כל אחד בתורו מבצע מהלך חוקי אחד.

סוף המשחק: המנצח הוא מי שמצליח להביא את החיילים שלו אל השורה הכי רחוקה על הלוח של השחקן השני. כדאי לחזור על המשחק פעמים אחדות, ולערוך מעקב על-ידי רישום מצב הניצחון בכל משחק.

גרסה שנייה

שני השחקנים קובעים יחד את היעד (על הלוח של היריב) שאליו צריך להגיע. כל שחקן חופשי להחליט על מספר השחקנים, ועל המערך בו יציב אותם על הלוח שלו בראשית המשחק. בראשית המשחק רושמים את מספר החיילים במצב ההתחלתי של כל שחקן. כל שחקן בתורו מבצע מהלך חוקי אחד.

סוף המשחק: המנצח הוא הראשון שהגיע אל שורת היעד (על הלוח של היריב) עם חייל אחד לפחות. (כדאי לעשות מעקב אחרי מספר החיילים ההתחלתי ומספר הצעדים של המנצח.)

מההתנסות בשתי הגרסאות של המשחק עולות שאלות המעוררות ניתוח מתמטי מעניין. אציג כמה שאלות כאלה לדוגמה.

שאלות

1. מהו המספר המינימלי של חיילים במצב ההתחלתי, הנחוץ כדי להגיע במהלכים חוקיים אל השורה הראשונה (הכי קרובה) של היריב? מהו המערך המאפשר להגיע לשם במספר המהלכים הקטן ביותר?

2. כנ"ל לגבי השורה השנייה, השלישית והרביעית. האם יש לך השערה לגבי השורה החמישית? השישית?

3. א. נסמן ב- P משבצת בשורה שהוסכם עליה על הלוח של היריב. ניתן לכל משבצת על כל אחד מהלוחות ערך מקום כך: הערך יהיה חזקה של x (שערכו ייקבע בהמשך) שהמעריך שלה הוא המספר המינימלי של תזוזות אנכיות או אופקיות, בגודל של משבצת אחת, שצריך לעשות ממנה אל P. כך, למשל, הערך של P עצמה הוא x^0. יש ארבע משבצות שערכן הוא x^1, ושמונה שערכן הוא x^2 (איפה הן?). אם נניח ש- P נמצאת בשורה השלישית בטור החמישי, מהו ערך המקום של כל משבצת על כל לוח?

ב. ניתן לקבוצת חיילים, שערוכה על הלוח, את הערך שהוא סכום ערכי המשבצות שהם תופסים בכל צעד במשחק. הערך של קבוצת החיילים משתנה מצעד לצעד, כי קודם כל "נופל" חייל ואחר כך משבצת אחת מתפנה ואחרת מתמלאת.

קיימים שלושה טיפוסים שונים של קפיצות, הנבדלים זה מזה בשינוי בערך של קבוצת החיילים, הנובע מהקפיצה שהתבצעה.

(1) הבאת חייל יותר קרוב לנקודה P.

(2) הבאת חייל למקום יותר רחוק מ- P.

(3) הבאת חייל למקום שמרחקו מ- P לא שונה מהמרחק הקודם.

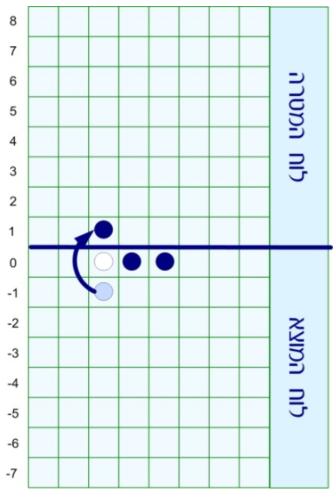
(התוכל לתת דוגמה לכל אחד מהסוגים?) איזה שינוי חל בערך של קבוצת החיילים (המוגדר לעיל) על-ידי כל אחד משלושת הסוגים האלה? מהו הערך של x שעבורו קפיצה מסוג (1) לא תשנה את הערך של קבוצת החיילים? (מצפה לך הפתעה - הערך קשור לחתך הזהב!)

4. האם יש שורה שמעבר אליה אי-אפשר להגיע, גם אם אין הגבלה על מצב ההתחלה מבחינת מספר החיילים, ואפילו אין הגבלה על גודל הלוח $(n \times n)$? אם יש לך השערה בעניין, ייתכן שהדרך הבאה תסייע לך להוכיח אותה: נבחר x כך שאכן הערך של קבוצת החיילים לא משתנה אם מבצעים קפיצה מסוג (1). עליך לגייס את מה שלמדת על פולינומים ועל התכנסותם של טורים גיאומטריים כדי לסיים את ההוכחה.

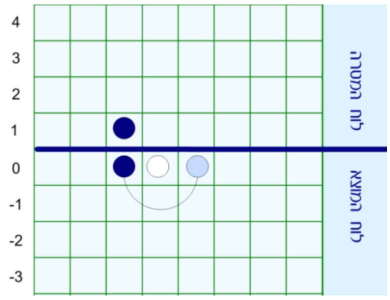
תשובות

1. כדי להגיע לשורה הראשונה של הלוח של היריב בקפיצה אחת נחוצים שני חיילים באותה עמודה בשורות 1 ו- 2.

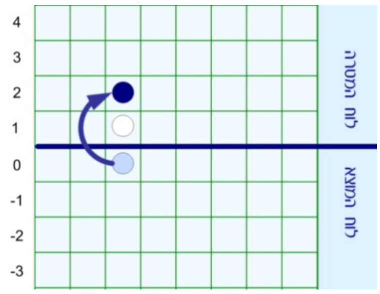
2. כדי להגיע לשורה 2 נחוצים 4 חיילים: שלושה בשורה 1 (למשל, בטור 1, 2, 3) ואחד בשורה 2 מתחת לאחד הקיצוניים (למשל, בטור 3). שלוש קפיצות מביאות לתוצאה המבוקשת. דוגמה למהלך כזה מוצגת באיורים 2א – 2ג.



איור 2א: קפיצה ראשונה

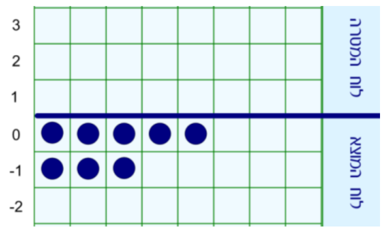


איור ב2: קפיצה שנייה

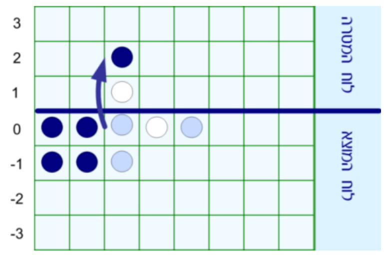


איור ג2: קפיצה שלישית

כדי להגיע לשורה השלישית על הלוח של היריב, נחוצים 8 חיילים, חמישה בשורה 1 ועוד שלושה בשורה 2, מתחת לשלושת הקיצוניים בשורה 1 (ראה איורים א3 ו- ב3). משתמשים בארבעה חיילים כדי להביא חייל לשורה 2 (ב- 3 קפיצות כמו קודם), ובעוד ארבעה חיילים, כדי להשלים את המלאכה ב- 7 קפיצות (נסה בעצמך).

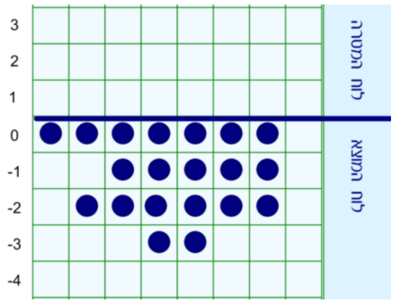


איור א3: עמדת מוצא

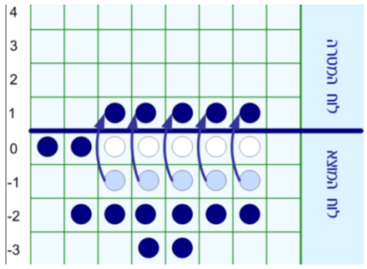


איור ב3: אחרי שלוש קפיצות ראשונות

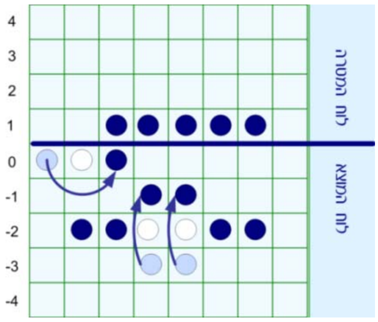
בניגוד למצופה - כדי להגיע לשורה הרביעית לא נחוצים 16 חיילים במצב ההתחלתי אלא 20. אחרי מהלך הכולל 12 קפיצות (המוצא באיורים א4 – ה4) מגיעים למערך של שמונה חיילים המאפשר, כפי שראינו לעיל, להביא חייל לשורה השלישית. אבל מערך זה "יושב" שורה אחת יותר גבוה, וכך ניתן להביא באופן דומה חייל לשורה הרביעית ב- 7 קפיצות נוספות. כך שסך הכל 19 קפיצות מביאות את התוצאה המבוקשת. אבל עדיין אין בכך הוכחה שזהו המספר המינימלי של חיילים.



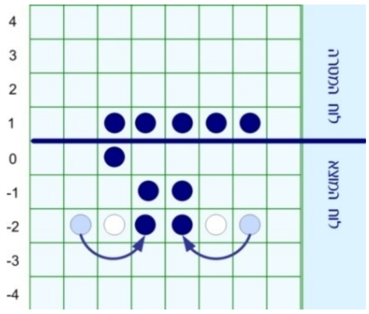
איור א4: עמדת מוצא



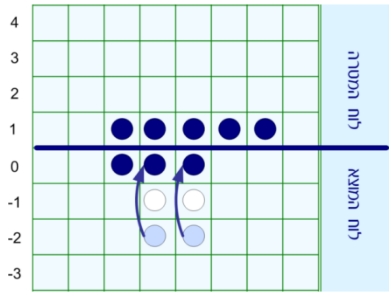
איור ב4: חמש הקפיצות הראשונות



איור ג4: קפיצות שישית עד שמינית



איור ד4: קפיצות תשיעית ועשירית



איור 4: קפיצה אחת- עשרה ושתיים- עשרה

3א. אם נקודת המטרה P נמצאת בשורה השלישית בטור החמישי על לוח המטרה, ערכי המקום של המשבצות בלוח המוצא מוצגים באיור 5.

8	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8
7	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7
6	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6
5	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5
4	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^2	x^3	x^4
3	x^4	x^3	x^2	x^1	$P=x^0$	x^1	x^2	x^3
2	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^2	x^3	x^4
1	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5
0	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6
-1	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7
-2	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8
-3	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9
-4	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}
-5	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}
-6	x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}
-7	x^{14}	x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}

לוח המטרה

לוח המוצא

איור 5

3ב. בכל מהלך, לפני ביצוע הקפיצה, יש שתי משבצות סמוכות שיש בהן חיילים, ולאחר ביצוע הקפיצה הן ריקות ושלישית נתפסת. יש שלושה סוגים של קפיצות:

(1) כאלו שמביאות חייל למקום יותר קרוב אל P.

(2) כאלו שמביאות חייל למקום יותר רחוק מ- P.

(3) כאלו המשאירות את החייל שקפץ באותו מרחק מ- P.

בקפיצה מסוג (1) מרוויחים ערך x^n ומפסידים שתי חזקות יותר גבוהות: x^{n+1} ו- x^{n+2}. לפיכך השינוי בערך של המערך כולו הוא:

$$x^n-(x^{n+1}+x^{n+2})=x^n(1-x-x^2)$$

באופן דומה בקפיצה מסוג (2) השינוי הוא:

$$x^{n+2}-(x^{n+1}+x^n)=x^n(x^2-x-1)$$

מהלך מסוג (3) הוא, למעשה, קפיצה מעבר לשורה או לטור בו נמצא P. הואיל ומשני עברי P ערכי-המקום זהים, השינוי בערך המערך הוא:

$$x^n-(x^{n-1}+x^n)=-x^{n-1}$$

אם בוחרים את x כך שהערך של המערך לא ישתנה, כאשר מבצעים מהלך מסוג 1 (מתקרבים אל P) כלומר, כך ש: $1-x-x^2=0$, מקבלים $x=\frac{(-1\pm\sqrt{5})}{2}$. נבחר בשורש החיובי ונקבל ש- x הוא $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$, היינו, בין 0 ל- 1.

כדאי לשים לב לכך שזהו הערך ההופכי של **חיתוך הזהב!**

היות ש: $x^2=1-x$, מהלך מסוג (2) מוביל לשינוי שלילי בערך המערך כולו, ומהלך מסוג (3) גם הוא מפחית או לכל היותר משאיר את ערכו ללא שינוי. מכאן שכדי להגיע ל- P (שערכה = 1) צריך להתחיל במערך שערכו גדול או שווה ל- 1.

4. בתשובות לשאלה 2 ראינו שאפשר להגיע לשורה הרביעית. נדון כעת במטרה להגיע למשבצת כלשהי בשורה החמישית (כלומר, כאשר יש בפולינום מערך גדול או שווה 5). בתשובה לשאלה 3 ראינו שכדי להגיע לשורה החמישית, מערך הפתיחה חייב להיות בעל ערך ≤ 1.

אם ניתן להגיע למשבצת מסוימת בשורה החמישית, אזי אפשר להגיע גם לכל משבצת אחרת בשורה זו, על-ידי הזזת המערך ההתחלתי ימינה או שמאלה. לכן, מספיק להראות לגבי נקודה כלשהי P בשורה 5 שהיא לא ניתנת להשגה, אפילו אם משחקים על לוח אינסופי בגודלו.

נחשב את הערך של כל מחצית המישור ("לוח המוצא"), שבו ניתן להציב את המערך הפותח, על-ידי חישוב ערכי הנקודות בטורים. בזוכרנו כי $0<x<1$, נקבל עבור טור הנקודות שמתחת לנקודה P (הנמצאת כעת בשורה החמישית של לוח היריה) את הטור הגיאומטרי האינסופי:

$$x^5+x^6+x^7+\cdots=\frac{x^5}{1-x}$$

ועבור כל אחד משני הטורים שנמצאים מימינו ומשמאלו של הטור הזה נקבל:

הידעת?
"חיתוך הזהב" או "יחס הזהב" הוא מספר לא רציונלי, המופיע גם בתופעות שונות, כמו: בקונכיות, בתפרחת חמניות, במוסיקה ועוד...

Φ=1.6180133987...

$$x^6+x^7+x^8\cdots=\frac{x^6}{1-x}$$

ובסה"כ
$$\frac{2x^6}{(1-x)}$$

באופן דומה יש שני טורים $x^7+x^8+x^9+\cdots$ שנותנים יחד
$$\frac{2x^7}{(1-x)}$$

וכך הלאה, נקבל עבור הערך של כל מחצית המישור שבו ניתן להציב את המערך הפותח:

$$S=\frac{x^5}{1-x}+2\left(\frac{x^6}{1-x}+\frac{x^7}{1-x}+\frac{x^8}{1-x}+\cdots\right)$$
$$=\frac{x^5}{1-x}+2\frac{x^6}{1-x}\left(1+x+x^2+\cdots\right)$$
$$=\frac{x^5}{1-x}+2\frac{x^6}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}$$

ומפני שראינו לעיל לגבי ערכו של x, שמתקיים: $x^2=1-x$.

$$S=x^3+2x^2=x(x^2+2x)$$
$$=x(1-x+2x)=x+x^2=$$
$$x+1-x=1$$

מכאן יוצא שכדי להגיע לשורה החמישית נחוץ לוח אינסופי, שבו במערך הפתיחה יש חייל על כל משבצת. במילים אחרות, אין מערך סופי המאפשר להגיע לשורה החמישית, כי כל מערך סופי הוא מערך חלקי של מערך אינסופי, שבו יש משבצות ריקות, ועל כן ערכו של כל מערך סופי הוא קטן מ- 1.

ההוכחה הזאת מיוחסת למתמטיקאי ג'ון קונווי
http://en.wikipedia.org/wiki/John_Horton_Conway

משחק שני: משחק צביעה של מפות

זהו משחק לשניים, המיועד להביא את המתחרים להכרה שהאטלס המדיני הצבעוני והמוכר משיעורי גיאוגרפיה מעורר שאלה מתמטית מאוד עמוקה: האם יש חסם עליון למספר הצבעים הנחוצים לצביעה של מפות? ואם כן – מהו? תוך כדי משחק מתברר שיש מפות שלצביעתן מספיקים בעצם שני צבעים בלבד, ויש, כמובן, מפות אחרות, שלא ניתן לצבוע אותן בשני צבעים. בעיית צבעי המפה, שהייתה נושא למחקר, להשערות והפרכותיהן, במשך למעלה ממאה שנה, יחד עם פתרונה בשנת 1976, מקבלים באמצעות המשחק משמעות מאוד בהירה ומוחשית.

החומרים הדרושים: מפה מדינית לא צבועה ועפרונות צבעוניים שונים אחדים. (לחילופין אפשר לרשום קוד של הצבע על-פי האות הראשונה של שמו: **א**דום, **צ**הוב, **כ**חול וכד'.)

כלל הצביעה: אסור לצבוע שתי מדינות בעלות קו-גבול משותף באותו צבע.

הערך הלימודי: המשחקים יכולים לשמש פתיח ללימוד נושאים בטופולוגיה, ובמיוחד למשפט צבעי-המפה, שפשטות ניסוחו עומדת בניגוד בולט לקושי להוכיח אותו.

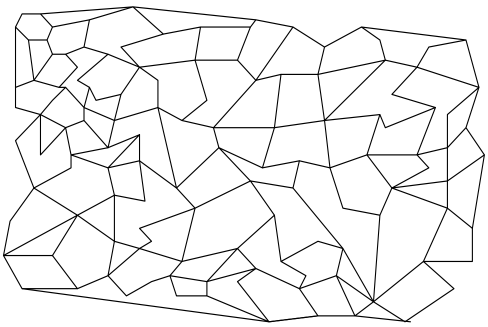
מספר המשתתפים: זהו משחק לשניים.

גם למשחק זה שתי גרסאות.

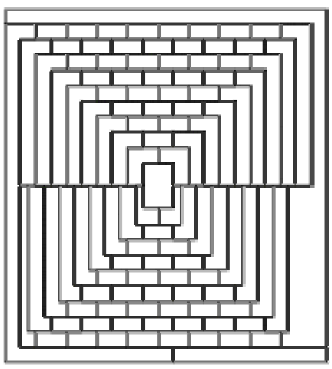
א. גרסה ראשונה - צובעים צובעים

כללי המשחק: בתחילת המשחק מחליטים על מספר הצבעים שבהם יתנהל המשחק. כל שחקן בתורו בוחר באחד הצבעים וצובע את אחת המדינות במפה, לפי כלל הצביעה. המשחק מסתיים כאשר אחד השחקנים לא יכול לבצע מהלך צביעה חוקי ומפסיד.

הערה: מובן מאליו ששימוש במספר צבעים כמספר המדינות במפה, הופך את המשחק לבלתי מעניין (אין מצב של ניצחון). המשתתפים ישקלו לאור זה את המספר הרצוי להם של צבעים. אפשר לחזור על המשחק בשינוי ההחלטה על מספר הצבעים. (איור 6 ואיור 7 הם שני סרטוטים שונים למשחק.)



איור 6



איור 7

והנה כמה שאלות מעניינות:

שאלות

1.1 מהו המספר הקטן ביותר של צבעים שבו הצלחת, יחד עם יריבך, לסיים את המשחק בתיקו (ללא ניצחון)? האם זהו המספר המינימלי של צבעים שבו יכול המשחק להסתיים בתיקו?

1.2 סרטטו מפה (מישורית) שהמשחק עליה יכול להסתיים בתיקו בעזרת שני צבעים.

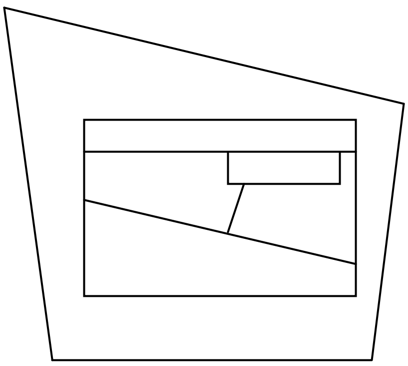
1.3 סרטטו מפה (מישורית) שהמשחק עליה יכול להסתיים בתיקו בעזרת שלושה צבעים, אבל לא יכול להסתיים בפחות משלושה צבעים.

ב. גרסה שנייה - החסכן והפזרן

כללי המשחק: בתחילת המשחק מחליטים על מספר הצבעים שבהם יתנהל המשחק. אחד השחקנים משחק בתפקיד החסכן והשני בתפקיד הפזרן. כל שחקן בתורו צובע את אחת המדינות במפה, לפי כלל הצביעה ובהתאם לתפקידו. מטרת החסכן היא לגרום לכך שהמפה כולה תהיה צבועה במספר הצבעים שהוחלט עליו מראש, או פחות ממנו. אם זהו המקרה הוא המנצח. הפזרן משחק בצבעים שעליהם הוחלט מראש, במידה שהדבר ניתן. אם באיזה שהוא שלב לפני סיום צביעת המפה הדבר לא ניתן לביצוע - הוא המנצח. הפזרן מנסה לשחק כך, שבאחד הצעדים הבאים הצביעה תהיה בלתי אפשרית, ואילו החסכן מנסה למנוע זאת.

מפה א

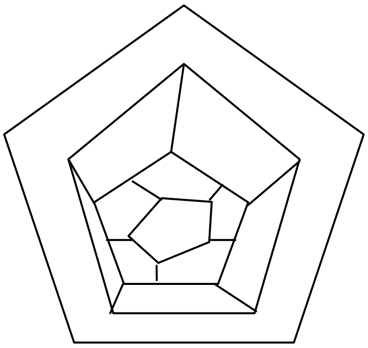
שחקו על המפה שבאיור 8 (כדאי להכין עותקים נוספים שלה). תוך כדי משחק נסו למצוא מהו מספר הצבעים שעבורו יכול החסכן להבטיח לעצמו ניצחון.



איור 8

מפה ב

שחקו על המפה שבאיור 9. תוך כדי משחק נסו למצוא אסטרטגיית ניצחון עבור הפזרן, אם משחקים בחמישה צבעים. (כדאי להכין עותקים נוספים.)



איור 9

שאלות

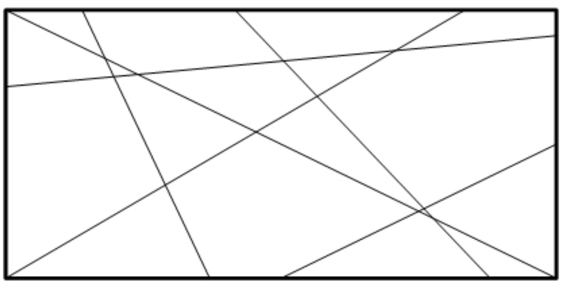
2.1 מהו מספר הצבעים הקטן ביותר שבו ניתן לצבוע את מפה א? האם מספר זה שווה למספר הצבעים שבו יכול החסכן להבטיח לעצמו ניצחון? מה מקור ההבדל?

2.2 מפה ב היא מפה שנוצרה על-ידי עיוות של פוליאדר (רב-פיאון). מה שם הפוליאדר? מהי אסטרטגיית הניצחון עבור הפזרן, אם משחקים בחמישה צבעים על מפה ב?

שאלות נוספות

בתוך מסגרת מלבנית מעבירים n קווים ישרים, המחלקים את המסגרת לתחומים מצולעים. אין כל הגבלות על אופן העברת הקווים הישרים, למעט, כמובן, הדרישה הטריוויאלית שכל קו יחתוך שתי צלעות של המלבן, או שיעבור דרך קדקוד וצלע שהקדקוד אינו נמצא עליה, או דרך שני קדקודים נגדיים .

3.1 כמה צבעים נחוצים כדי לצבוע כל תחום חלקי שנוצר בתוך המלבן, כך ששני תחומים בעלי צלע משותפת לא יהיו צבועים באותו צבע?



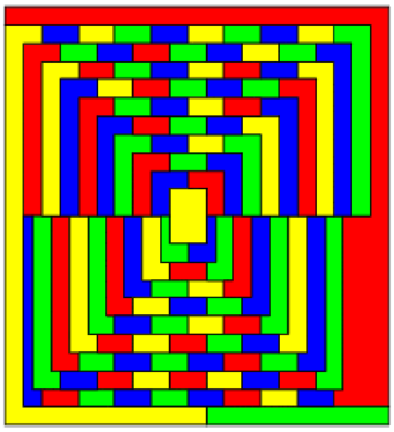
איור 10

3.2 מהו תנאי הכרחי ומספיק לכך, שאפשר יהיה לצבוע מפה מישורית בעזרת שני צבעים בלבד, כך ששני תחומים בעלי צלע משותפת לא יהיו צבועים באותו צבע?

תשובות

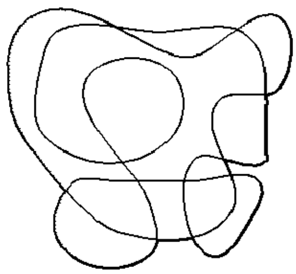
גרסה ראשונה - צובעים צובעים

1.1 המפה באיור 11 –הבנויה ממלבנים, היא פרי עטו של מרטין גרדנר. להלן אופן צביעתה בארבעה צבעים בלבד. מתוך: **http://mathworld.wolfram.com/Four-ColorTheorem.html**



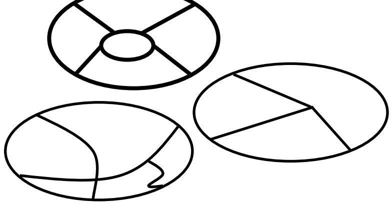
איור 11

1.2 לוח שחמט הוא מפה של 64 מדינות הניתנת לצביעה בשני צבעים. משפט שני צבעי המפה קובע, שכל מפה מישורית ניתנת לצביעה בשני צבעים בלבד, אם ורק אם בכל צומת נפגשים מספר זוגי של קווים. דוגמה פחות טריוויאלית היא המפה באיור 12.



איור 12

1.3 באיור 13 מוצגות שלוש דוגמאות למפות שאי-אפשר לצבוע בפחות מ- 3 צבעים.

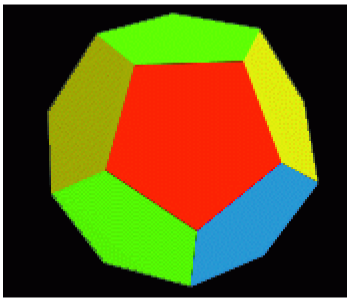


איור 13

גרסה שנייה - החסכן והפזרן

2.1 מפה א ככל מפה ניתנת לצביעה ב- 4 צבעים, אבל החסכן זקוק לחמישה כדי להבטיח לעצמו ניצחון. הפער נובע מההבדל בין משפט צבעי המפה, המבטיח קיומה של דרך לצביעה ב- 4 צבעים, לבין מצב ההתחרות בין החסכן לפזרן, שבו החסכן צריך להתמודד על מספר צבעים קטן ככל האפשר, בעוד הפזרן לא רק שאיננו משתף עמו פעולה, אלא מפריע לו בכך.

2.2 מפה ב מתקבלת על-ידי מתיחה (ללא קריעה) של פוליאדר העשוי מ- 12 מחומשים הנקרא דודקאדר (איור 14). אסטרטגיית הניצחון של הפזרן היא לצבוע תמיד את ה"פאה" של הדודקאדר, הנמצאת ממול לפאה אותה צבע הפזרן במהלכו האחרון, תוך שימוש באותו צבע בו השתמש החסכן.



איור 14

3.1 כדי לצבוע כל תחום חלקי שנוצר בתוך המלבן, כך ששני תחומים בעלי צלע משותפת לא יהיו צבועים באותו צבע, נחוצים שני צבעים בלבד.

3.2 תנאי הכרחי ומספיק לכך שבשני צבעים בלבד ניתן יהיה לצבוע מפה מישורית, כך ששני תחומים בעלי צלע משותפת לא יהיו צבועים באותו צבע הוא, שכל צומת במפה תהיה זוגית.

עוד על בעיית ארבעת צבעי המפה - ההיסטוריה שלה ופתרונה, אפשר לקרוא בספר Robin Wilson (2002), ובאתרים:

http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html

http://www.c3.lanl.gov/mega-math/workbk/map/mpbkgd.html

http://www.c3.lanl.gov/mega-math/workbk/map/map.html

http://www.cs.uwaterloo.ca/~alopez-o/math-faq/node56.html

מקורות

Barnsley, M. (1988). *Fractals Everywhere* . California: Academic Press.

Honsberger, R. (1976). *Mathematical Gems II, Dolciani Mathematical Exposition No. 2* (pp. 23-28). Mathematical Association of America.

Moscovich, I. (1984). *Super Games.* New York: St. Martin's Press.

Schroeder, M. (1991). *Fractals, Chaos, Power Laws - Minutes from an Infinite Paradise* (pp. 20-25). New York : W.H. Freeman.

Peirgen, H.O., Jürgen, H., & Saupe, D. (1992). *Fractals for the Classroom, Part I: Introduction to Fractals and Chaos* (pp. 41-43, 48-150, 319-322). New York: Springer-Verlag.

Wilson, R. (2002). *Four Colours Suffice: How the Map Problem Was Solved* . The Penguin Press.

פרופ' נצה מובשוביץ-הדר

הטכניון, המחלקה להוראת המדעים. מנהלת את "קשר-חם"- המרכז הארצי לקידום, שיפור ורענון החינוך המתמטי בישראל. בעבר ניהלה את המוזיאון הלאומי למדע, תכנון וטכנולוגיה.