

הנושא: משולשים כמעט שווי צלעות

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מוצג תהליך של סדרת קיפולי נייר היוצר משולשים שמתקרבים למשולשים שווי צלעות ככל שממשיכים בו. כן מובאות הרחבות נוספות וכיווני חקירה נוספים של סדרות נוספות של קיפולי נייר.

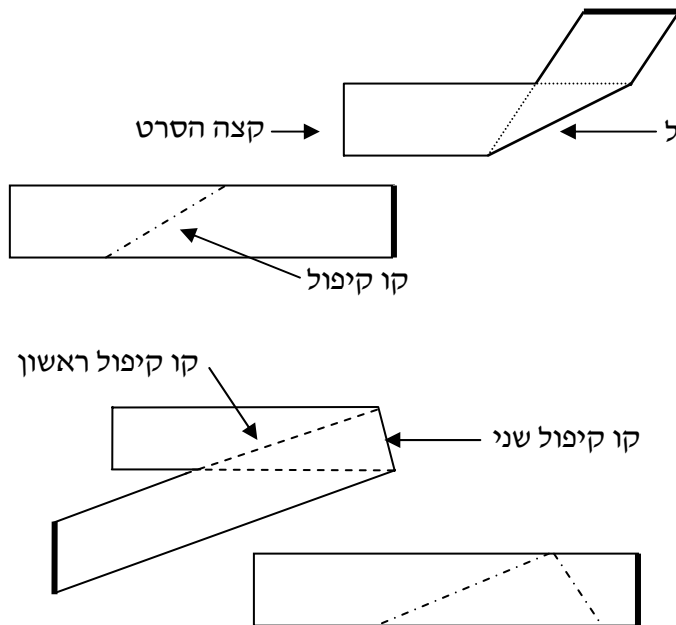
מילות מפתח: קיפולי נייר, גיאומטריה, גיאומטריה המישור, הנדסה, הנדסת המישור, משולשים, משולש שווה צלעות, גיאומטריה המרחב, הנדסת המרחב, גופים, ארבעון (טטרהדרון), תמנון (אוקטהדרון), עשרימון (איקוסהדרון), תריסרון (דודיקהדרון), אלגברה, סדרות, סדרה כללית.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 45, תשל"ו.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

משולשים כמעט שווי צלעות

ניקה סרטי נייר ארוך – בערך 1.5 מ'. מתאימים לכך סרט של מכונת חישוב, סרט נייר שמשתמשים בו לאריזה או כל סרט אחר בתנאי שהוא איננו רחב מדי ובתנאי ששני הצדדים שלו מקבילים בדיוק.



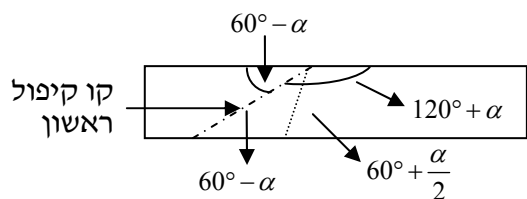
נקפל קצה אחד של הסרט כלפי מעלה, בזווית כלשהי, ונלחץ על קו הקיפול. קיבלנו קו קיפול ראשון. ניישר את הסרט.

עתה נקפל את הסרט כלפי מטה, כך שהקצה העליון של הסרט יתלכד עם קו הקיפול הראשון. נלחץ וניישר. בסרט הפתוח יהיו עתה שני קווי קיפול, היוצרים כעין משולש.

עתה נקפל שוב את הסרט כלפי מעלה, כך שהקצה התחתון של הסרט ייפול על קו הקיפול השני. כאשר נפתח את הסרט, נקבל שלושה קווי קיפול היוצרים שני משולשים.

נמשיך לקפל מעלה ומטה לסירוגין וניווכח שהמשולשים הנוצרים נהפכים יותר ויותר למשולשים שווי צלעות.

מדוע זה כך?



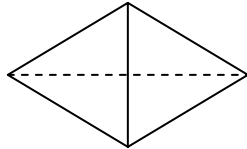
נניח שבקיפול הראשון התקבלה זווית חדה קטנה מ- 60° בהפרש שנשמנו באות α . כלומר מידת הזווית היא $60^\circ - \alpha$, הרי שבצד השני של הסרט נתקבלו שתי זוויות: אחת חדה, שגם מידתה $60^\circ - \alpha$ (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים) והשניה זווית קהה שמידתה: $180^\circ - (60^\circ - \alpha) = 120^\circ + \alpha$.

בקיפול השני כלפי מטה – חצינו את הזווית הקהה העליונה לשתי זוויות חדות, שמידת כל אחת מהן היא $60^\circ + \frac{\alpha}{2}$. בקיפול זה נוצרו למטה שתי זוויות: אחת חדה שמידתה גם $60^\circ + \frac{\alpha}{2}$ והשניה

$$\text{קהה שמידתה } 180^\circ - \left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 120^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

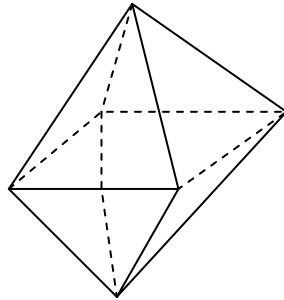
בקיפול הבא כלפי מעלה חצינו את הזווית הקהה התחתונה לשני חלקים שווים שמידת כל אחד מהם היא $60^\circ - \frac{\alpha}{4}$.

כשממשיכים לקפל, מעלה-מטה, מטה-מעלה, מקטינים יותר ויותר את השגיאה α עד שהיא כמעט לא מורגשת – והמשולשים נהפכים למשולשים שווי צלעות (כמעט). נשים לב: גם כאשר משרטטים משולש שווה צלעות באמצעות סרגל ומחוגה לא מרגישים באי דיוק של מעלה אחת ואפילו לא של שתי מעלות. נדגיש שאם זווית הקיפול הראשונה לא הייתה 60° המשולש לא יהיה אף פעם שווה צלעות – אבל אפילו אם הזווית הראשונה הייתה בת 50° , כלומר ההפרש α הוא 10° , הרי שבמשולש הרביעי והבאים אחריו לא נרגיש כלל בהפרש זה והמשולשים יראו כשווי צלעות לכל דבר.



נמשיך לקפל בסרט עד שנכין לעצמנו מספר ניכר של משולשים שווי צלעות (כמעט!). נחתוך מהסרט קטע של 4 משולשים שווי צלעות ונוכל לקפלם כדי ליצור ארבעון (ביונית – טטרהדרון).

אם נשתמש בקטע בן חמישה משולשים נוכל לקפל אחד מהם פנימה ולהדביקו.

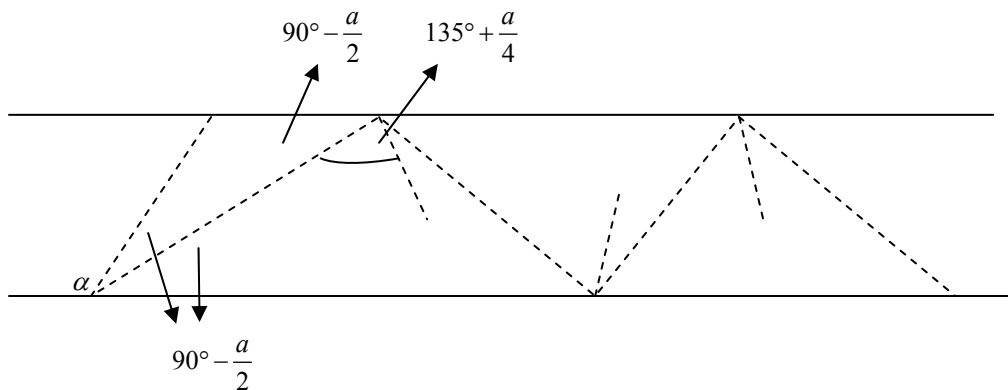


אם נוריד שתי חתיכות בנות שבעה משולשים, נוכל לקפלן וליצור תמנון (ביונית – אוקטהדרון). זהו גוף משוכלל בן 8 פיאות שכולם משולשים שווי צלעות חופפים.

נוכל גם לחתוך קטעים מתאימים וליצור את העשרימון (ביונית – איקוסהדרון), גוף בן 20 פיאות שכולן משולשים שווי צלעות חופפים.

נוכל לפתח סמלים לשיטת הקיפול שפיתחנו. נסמן באות U כל קיפול כלפי מעלה (מן המילה האגלית Up) ונסמן באות D כל קיפול כלפי מטה (מן המילה האנגלית Down). שיטת הקיפול שהשתמשנו בה היתה UDUDUD... כפי שראינו המשולשים הנוצרים מתכנסים למשולשים שווי צלעות.

נסו לחקור איזה סוג של משולשים ייוצרו אם במקום הסדרה הנ"ל נשתמש ב- UUDDUUDD... , כלומר שני קיפולים כלפי מעלה ואח"כ שני קיפולים כלפי מטה, ושוב שניים למעלה וכו'. שימו לב: בכל קיפול, צלע הסרט חייבת ליפול שוב על קו הקיפול הקודם.



בסדרה זאת של קיפולים נשים לב רק למשולשים הגדולים בעלי הזווית הקהה. תוכלו להשתמש בהם כדי ליצור את התריסרון, גוף משוכלל בעל 12 פיאות שכולן מחומשים משוכללים חופפים (ביונית – דודיקהדרון).

אילו משולשים נוצרים מהסדרה: UDDUDD...

תשובה:
UDDUDD... מקבלים משולשים שווים (כאשר 60°) שהם הצלעות הקצרות
היא 108° כמו במחומש משוכלל.